UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JUDY MARIE SCHAFER

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS: APLICAÇÕES DA EQUAÇÃO DO CALOR

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

TOLEDO
2019

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JUDY MARIE SCHAFER

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS: APLICAÇÕES DA EQUAÇÃO DO CALOR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Toledo, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Ma. Marcia Regina Piovesan

TOLEDO
2019

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

O Trabalho de Conclusão de Curso intitulado "Equações Diferenciais Parciais: Aplicações da Equação do Calor" foi considerado **APROVADO** de acordo com a ata nº __ de __/__/____

Fizeram parte da banca examinadora os professores:

Professora Orientadora Ma. Marcia Regina Piovesan

Professora Ma. Karen Carrilho da Silva Lira

Professor Me. Loreci Zanardini

TOLEDO

2019

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha mãe Serli Mundel por acreditar em mim, nos meus sonhos e por me dar uma educação de qualidade se esforçando muito para isso.

Agradeço ao meu pai Elemar Miguel Schafer por estar presente em todos os momentos e me incentivando sempre nos estudos.

Agradeço aos meus irmãos Bruna Alessandra Schafer, Kevin Heinrich Schafer e William Thiago Schafer por acompanharem toda a minha caminhada me fortalecendo.

Agradeço ao meu avô Adolfo Mundel por realizar meu sonho de graduação.

Agradeço aos meus amigos pelas palavras de incentivo e por se fazerem presente em todos os momentos.

Agradeço em especial à minha professora de Equações Diferenciais Jocelaine Cargnelutti.

Agradeço à minha orientadora Marcia Regina Piovesan por confiar no meu estudo, por toda paciência e compromisso dedicados a mim durante todo o período de Iniciação Científica e Trabalho de Conclusão de Curso.

Agradeço aos professores Karen Carrilho da Silva Lira e Loreci Zanardini por aceitaram o convite para a banca de avaliação.

Agradeço à Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Câmpus Toledo pela acolhida e a todos os professores que contribuíram para a minha formação.

Por fim, manifesto aqui a minha gratidão à Deus, que me deu força e energia para realizar o sonho de concluir a faculdade.

RESUMO

A presente pesquisa aborda um estudo sobre as Equações Diferenciais Parciais (EDP's) tendo como foco a Equação do Calor e suas diferentes condições de contorno. Através de uma pesquisa bibliográfica serão apresentados definições, pré-requisitos, classificações, métodos, exemplos de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's), Equações Diferenciais Parciais e problemas de contorno para a Equação do Calor. O objetivo é caracterizar as Equações Diferenciais Parciais, principalmente a equação que representa a difusividade térmica.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias. Séries de Fourier. Equações Diferenciais Parciais. Equação do Calor.

ABSTRACT

This research deals with a study about the Partial Differential Equations (PDE's) focusing on the Heat Equation and its different contour conditions. Through a bibliographic research will be presented definitions, prerequisites, classifications, methods, examples of Ordinary Differential Equations (ODE's), Partial Differential Equations and contour problems for the Heat Equation. The objective is to characterize the partial differential equations, mainly the equation that represents the thermal diffusivity.

Keywords: Ordinary Differential Equations. Fourier Series. Partial Differential Equations. Heat equation.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta uma introdução as equações diferenciais ordinárias (EDO's), sua história, alguns colaboradores, suas classificações, método de resoluções para as equações como, o método de equações lineares, variáveis separáveis e equações exatas.

Além das equações diferenciais ordinárias é feito um estudo sobre as equações diferenciais parciais (EDP's), como sua classificação, as séries de Fourier e a equação da difusão do calor, na qual é descrita por meio da distribuição de temperatura em três coordenadas espaciais e uma coordenada temporal:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \dot{q} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \tag{1.1}$$

sendo $\dot{q}$ considerado um termo de fonte, e α representa a difusividade térmica do material.

As equações diferenciais tiveram início com os estudos de Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) durante o século XVII. Embora Newton tenha atuado pouco na área de equações diferenciais propriamente dita, o desenvolvimento do cálculo e a elucidação dos princípios básicos da mecânica forneceram a base para a aplicação das equações diferenciais no século XVIII, especialmente por Euler (BOYCE; DIPRIMA, 2006).

Segundo Iório & Iório (2013) as equações de calor e da onda trazem um interesse do ponto de vista físico, e além disso, são protótipos elíptico e hiperbólico e o conhecimento sobre tais equações e suas propriedades permitem estudos em torno de equações bem mais gerais do mesmo tipo.

Na maioria das vezes não conseguimos encontrar uma solução para a EDP mas, quando encontrada ela envolve funções arbitrárias das variáveis independentes ao invés de constantes. Assim, para a resolução destes problemas se é utilizado do método de Fourier, sendo que em uma primeira etapa de resolução utiliza-se a separação de variáveis para obter os problemas de autovalor, sendo que se obtém uma família de soluções da equação diferencial parcial que satisfazem uma parte das condições de fronteira. E então, utilizamos a Análise de Fourier para compor a solução do problema como uma série, cujos termos são produtos dessas soluções por coeficientes adequadamente escolhidos (FIGUEIREDO, 2005).

O estudo em torno das séries de Fourier se faz necessário já que elas expressam uma dada função como uma série de senos e, ou, cossenos, que são autofunções de determinados problemas de autovalor. A consideração de certos problemas para as equações diferenciais parciais, em estudo, conduz à necessidade de expressar dada função como uma série de autofunções de problemas de autovalor mais gerais, porém faz-se necessário instrumentos mais avançados que não serão abordados neste trabalho (FIGUEIREDO, 2005).

Portanto, o tema previsto para o Trabalho de Conclusão de Curso em questão, está relacionado a Equações Diferenciais Parciais (EDP's), visando responder as seguintes perguntas: "O que são EDP's? Como se dá a difusão do calor?".

Assim o trabalho foi dividido em três seções, sendo que na primeira seção trataremos de uma revisão de equações diferenciais ordinárias e métodos de resolução das EDO's, bem como a resolução de alguns exemplos. Na segunda é feito um estudo inicial em relação as equações diferenciais parciais, com as séries de Fourier e o método de separação de variáveis para EDP, e por fim, na terceira seção estudaremos a Equação do Calor e algumas aplicações.

Vale ressaltar que o presente trabalho é baseado em estudos de equações diferenciais ordinárias apresentados por (ZILL; CULLEN, 2006), (BOYER; MERZBACH, 2019), (GERHARD, 2007) e notas de aulas da Unicamp e Usp, (UNICAMP,), (USP, 2016). Além, dos estudos em torno das equações diferenciais parciais apresentados por (FIGUEIREDO, 2005), (IÓRIO; IÓRIO, 2013) e (IÓRIO, 2016) e os problemas trazidos nos estudos de (BOYCE; DIPRIMA, 2006).

2 INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

2.1 História das Equações Diferenciais

O estudo das equações diferenciais ordinárias inicia com os criadores do Cálculo, Newton e Leibniz, no final do século XVIII, motivados por problemas físicos. A preocupação dominante desde aquela época até meados do século XIX era a obtenção de soluções das equações em forma explícita. Inicialmente, procurava-se expressar as soluções em termos de funções elementares. O desejo de obter explicitamente as soluções de uma equação diferencial é bastante natural e razoável. Entretanto, logo se verificou que o número de equações que podiam ser resolvidas em termos de funções elementares era muito pequeno, até mesmo com a introdução de novas funções como, por exemplo, as funções elípticas e outras funções representadas por integrais. Esta constatação gerou a busca de novos métodos e surgiu assim, no século XIX, o uso da série de funções. Aliás, esse método surge dentro do estudo das equações diferenciais parciais, cuja resolução aparecem equações diferenciais ordinárias. O rigor que a Análise ganhava no decorrer do século XIX começou a pôr em dúvida certos métodos onde as operações com séries eram feitas um tanto descuidadamente. Os teoremas de existência e unicidade de solução surgem nessa fase. A importância desses teoremas reside em que, sabendo-se a priori da existência de solução, sua busca através de processos informais se torna justificável e promissor, uma vez que a "solução"assim obtida pode ser verificada a posteriori. Os teoremas de existência e unicidade marcam, por assim dizer, o início da fase moderna, que realmente se define com Poincaré, no final do século XIX. Agora o aspecto é bem diverso; há grande interesse nas questões qualitativas que são bastante por seu intrínseco significado físico. Assim, se tem como objetivo de retirar das equações diferenciais informações sobre o comportamento de suas soluções, sem a preocupação de escrevê-las explicitamente.

2.2 Classificação das Equações Diferenciais Ordinárias

Como objeto de estudo, a resolução das equações diferenciais, para facilitar o uso do método adequado para sua resolução, podem ser classificadas quanto a sua dependência, uma ou várias váriaveis independentes, pela sua linearidade, sua ordem ou homogeneidade.

2.2.1 Classificação pelo tipo

Se uma equação contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável independente, ela é chamada de equação diferencial ordinária (EDO). Por exemplo,

$$\frac{dy}{dt} - 5y = 1 \tag{2.1}$$

$$(y - x)dx + 4x\ dy = 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} = x \tag{2.3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 6y = 0 \tag{2.4}$$

são equações diferenciais ordinárias. Uma equação que envolve as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes é chamada de equação diferencial parcial (EDP). Por exemplo,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{2.5}$$

2.2.2 Classificação pela linearidade

As equações diferenciais ordinárias são ditas lineares se a função

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^n) = 0 \tag{2.6}$$

em que F é uma função de x, y e suas derivadas $y', y'', \cdots, y^n$ é linear em relação as variáveis $y, y', \cdots, y^{n-1}$ e y^n.

$$a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x)y = g(x). \tag{2.7}$$

2.2.3 Classificação quanto a sua ordem

Para classificar a equação diferencial quanto a sua ordem, será a ordem da derivada de maior grau que aparece na equação.

Exemplos:

$$y''' + 5y' + 6x = 0 - \text{EDO de } 3^{\underline{a}} \text{ ordem} \tag{2.8}$$

$$y^{(4)} + y' + y = 0 - \text{EDO de } 4^{\underline{a}} \text{ ordem} \tag{2.9}$$

2.2.4 Classificação quanto a sua homogeneidade

Uma equação diferencial da forma $a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_0(x)y - g(x) = 0$ é dita homogênea quando possuir uma função independente de $g(x)$, caso contrário, se a função independente, $g(x) \neq 0$, a equação é dita não-homogênea.

Exemplos:

$$(y^2 + yx)dx + x^2dy = 0 - \text{EDO homogênea} \tag{2.10}$$

$$x\ dx + (y - 2x)dy = 0 - \text{EDO homogênea} \tag{2.11}$$

$$y'' + 3y' + 4y = 3x + 2 - \text{EDO não-homogênea} \tag{2.12}$$

$$y'' - 4y = 2e^{3x} - \text{EDO não-homogênea} \tag{2.13}$$

2.3 Métodos de Resolução de EDO's de primeira ordem

Teorema 2.1 *(Existência e Unicidade) Considere o problema de valor inicial $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ com $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = y'_0$, onde p, q e g são contínuas em um intervalo aberto I. Então existe exatamente uma solução $y = \phi(x)$ desse problema e a solução existe em todo intervalo I.*

Observação 2.1 *i) O problema de valor inicial tem uma solução; em outras palavras, existe uma solução.*

ii) O problema de valor inicial tem uma única solução.

iii) A solução ϕ está definida em todo intervalo T, onde os coeficientes são contínuos e, pelo menos, duas vezes diferenciável.

2.3.1 EDO's separáveis

Uma EDO de primeira ordem pode ser escrita das seguintes formas:

$$F(x, y, y') = 0 - \text{Forma geral} \tag{2.14}$$

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 - \text{Forma diferencial} \tag{2.15}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) - \text{Forma normal} \tag{2.16}$$

sendo x a variável independente e y a variável dependente.

Quando a equação é separável podemos escrever

$$M = M(x)\ ,\ N = N(y), \tag{2.17}$$

$$N(y) \neq 0 \tag{2.18}$$

Assim, a equação 2.15 fica reescrita

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \tag{2.19}$$

bastando apenas separar as variáveis e integra-lá para determinar a solução geral.

Exemplo 2.3.1.1 *Vamos resolver a equação* $y' = \dfrac{x}{y}$

Reescrevendo a equação temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \tag{2.20}$$

$$y\ dy = x\ dx \tag{2.21}$$

$$\int y\ dy = \int x\ dx \tag{2.22}$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c_1 \tag{2.23}$$

$$y^2 - x^2 = c \tag{2.24}$$

$$y = \pm\sqrt{x^2 + c} \tag{2.25}$$

A solução geral será $y = \pm\sqrt{x^2 + c}$.

Exemplo 2.3.1.2 *Vamos resolver a equação* $e^y \dfrac{dy}{dt} - t - t^3 = 0$

Primeiramente reescrevemos a equação, na sequência podemos integra-lá:

$$e^y dy = (t^3 + t)dt \tag{2.26}$$

$$\int e^y dy = \int (t^3 + t)dt \tag{2.27}$$

$$e^y = \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + c \tag{2.28}$$

$$ln|e^y| = ln\left|\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + c\right| \tag{2.29}$$

$$y = ln\left|\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + c\right| \tag{2.30}$$

A solução geral será $y = ln\left|\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + c\right|$.

2.3.2 Método do Fator Integrante

Seja a EDO linear de 1ª ordem

$$a_1(x)y' + a_2(x)y = g(x), \tag{2.31}$$

sendo $a_1(x) \neq 0$, pois se $a_1(x) = 0$ a equação não é mais diferencial.

Vamos dividir 2.31 por $a_1(x)$

$$y' + \frac{a_2(x)}{a_1(x)}y = \frac{g(x)}{a_1(x)}. \tag{2.32}$$

Considerando $\frac{a_2(x)}{a_1(x)} = p(x)$ e $\frac{g(x)}{a_1(x)} = f(x)$, reescrevemos a equação da seguinte forma:

$$y' + p(x)y = f(x). \tag{2.33}$$

Analisaremos 3 casos:
Caso 1: Se $f(x) = 0$;
Caso 2: Se $p(x) = 0$;
Caso 3: Se $p(x) = a$ e $f(x) = b$, sendo $a, b = constantes$.

CASO 1: $f(x) = 0$

$$y' = -p(x)y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -p(x)dx \tag{2.34}$$

com $y \neq 0$,

$$ln|y| = \int -p(x)dx + c \Rightarrow e^{ln|y|} = e^{\int -p(x)dx + c} \tag{2.35}$$

$$y = c.e^{\int -p(x)dx} \tag{2.36}$$

A equação 2.36 é a solução geral da equação diferencial.

CASO 2: $p(x) = 0$

$$y' = f(x) \Rightarrow \int dy = \int f(x)dx \tag{2.37}$$

$$y = \int f(x)dx + c \tag{2.38}$$

A equação 2.38 é solução geral da equação diferencial.

CASO 3: $p(x) = a$ e $f(x) = b$ com $a, b = constantes$

$$y' + ay = b \Rightarrow y' = b - ay \tag{2.39}$$

$$y' = -a\left(\frac{-b}{a} + y\right) \tag{2.40}$$

$$\int \frac{dy}{y - \frac{b}{a}} = \int -a\ dx, \tag{2.41}$$

com $y \neq \frac{b}{a}$,

$$ln\left|y - \frac{b}{a}\right| = -ax + c_1 \tag{2.42}$$

$$e^{ln\left|y - \frac{b}{a}\right|} = e^{-ax+c_1} \Rightarrow y - \frac{b}{a} = c.e^{-ax} \tag{2.43}$$

$$y = \frac{b}{a} + c.e^{-ax} \tag{2.44}$$

A equação 2.44 é solução geral da equação diferencial.

Porém, para resolver 2.33 pelo método do fator integrante, vamos multiplicar a equação por uma função $\mu(x)$, obtendo uma equação exata:

$$\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \mu(x)f(x) \tag{2.45}$$

pela regra do produto de derivadas, temos:

$$[\mu(x)y(x)]' = \mu(x)y'(x) + y(x)\mu'(x) \tag{2.46}$$

quando comparado o lado esquerdo de 2.45 com o lado direito de 2.46, temos

$$\mu'(x) = \mu(x)p(x) \tag{2.47}$$

reescrevendo a equação 2.47 e utilizando o método de separação de variáveis, chegamos a

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu(x)p(x) \Rightarrow \int \frac{d\mu}{\mu} = \int p(x)dx \tag{2.48}$$

$$ln|\mu| = \int p(x)dx \Rightarrow \mu = e^{\int p(x)dx} \tag{2.49}$$

Reescrevendo de modo que o lado direito de 2.45 é igual ao lado esquerdo de 2.46, temos:

$$\int [\mu(x)y(x)]' = \int \mu(x)f(x)dx \tag{2.50}$$

$$\mu(x)y(x) = \int \mu(x)f(x) \tag{2.51}$$

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)f(x)dx \tag{2.52}$$

Portanto $y(x) = \dfrac{1}{\mu(x)} \displaystyle\int \mu(x)f(x)dx$ é solução geral.

Exemplo 2.3.2.1 *Vamos resolver a equação* $\dfrac{dy}{dt} - 2ty = t$

Analisamos primeiro que $p(t) = -2t$ e $f(t) = t$. Portanto,

$$\mu(t) = e^{\int -2tdt} = e^{-t^2} \tag{2.53}$$

$$\int [\mu(t)y(t)]' = \int te^{-t^2}dt \tag{2.54}$$

Para resolver o lado direito de 2.54 vamos utilizar o método de substituição, no qual $u = -t^2$, assim $du = -2tdt \Rightarrow \dfrac{-du}{2} = tdt$. Tendo assim a equação

$$\mu(t)y(t) = \frac{-1}{2} \int e^u du \tag{2.55}$$

$$e^{-t^2}y(t) = \frac{-1}{2}e^{-t^2} + c \tag{2.56}$$

$$y(t) = \frac{\frac{-1}{2}e^{-t^2} + c}{e^{-t^2}} \tag{2.57}$$

$$y(t) = \frac{-1}{2} + \frac{c}{e^{-t^2}} \Rightarrow y(t) = \frac{-1}{2} + ce^{t^2} \tag{2.58}$$

Logo, a solução geral é $y(t) = \dfrac{-1}{2} + ce^{t^2}$.

Exemplo 2.3.2.2 *Vamos resolver a equação* $(x^2+9)\dfrac{dy}{dx} + xy = 0$.

Vamos reescrever a equação de modo que fique na forma de 2.33 e depois resolvê-la.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{(x^2+9)} = 0, \text{ sendo } p(x) = \frac{xy}{(x^2+9)} \tag{2.59}$$

Determinando a função $\mu(x)$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{x}{x^2+9}dx} \tag{2.60}$$

Utilizando o método de substituição, em que $u = x^2 + 9$ e $du = 2x\ dx$, temos

$$\mu(x) = e^{\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}} \Rightarrow \mu(x) = e^{\frac{1}{2}ln|u|} \Rightarrow \mu(x) = e^{\frac{1}{2}ln|x^2+9|} \tag{2.61}$$

$$\mu(x) = e^{ln\sqrt{x^2+9}} \Rightarrow \mu(x) = \sqrt{x^2+9} \tag{2.62}$$

Multiplicando a equação por $\mu(x)$, temos

$$\sqrt{x^2+9}\ y' + \frac{xy}{x^2+9}\sqrt{x^2+9} = 0 \tag{2.63}$$

$$\int [\sqrt{x^2+9}\ y]'dx = \int 0\ dx \tag{2.64}$$

$$\sqrt{x^2+9}\ y = c \tag{2.65}$$

$$y = \frac{c}{\sqrt{x^2+9}} \tag{2.66}$$

Logo, a solução geral é $y = \dfrac{c}{\sqrt{x^2+9}}$

2.3.3 Equações Exatas

Seja a equação diferencial ordinária de primeira ordem $M(x,y)+N(x,y)y' = 0$, dizemos que ela é exata se, e somente se, existir uma função $\phi(x,y)$ de forma que

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = M(x,y)$ e $\frac{\partial \phi}{\partial y} = N(x,y)$, ou seja, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Para encontrar $\phi(x,y)$, precisamos:

1º: Verificar se a EDO é exata, ou seja, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

2º:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = M(x,y) \tag{2.67}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = N(x,y) \tag{2.68}$$

3º: Integrar 2.67 em relação a x

$$\int \partial \phi(x,y) = \int M(x,y)dx \tag{2.69}$$

$$\phi(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y) \tag{2.70}$$

4º: Derivar 2.70 em relação a y

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{d}{dy}\int M(x,y)dx + g'(y) \tag{2.71}$$

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{d}{dy}\int M(x,y)dx \tag{2.72}$$

Assim basta integrar 2.72 em relação a y e substituir em 2.70, para determinar a solução geral.

Exemplo 2.3.3.1 *Vamos determinar a solução geral de* $(ycos(t)+2te^y)+(sen(t)+t^2e^y-1)\frac{dy}{dt}=0$

1º: Verificar se é exata:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = cos(t) + 2te^y \tag{2.73}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = cos(t) + 2te^y \tag{2.74}$$

2º:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = M(t,y) \tag{2.75}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = N(t,y) \tag{2.76}$$

3º:

$$\phi(t,y) = \int (ycos(t) + 2te^y)dt + g(y) \tag{2.77}$$

$$\phi(t,y) = ysen(t) + t^2e^y + g(y) \tag{2.78}$$

4º: Derivar 2.78 em relação a y

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = sen(t) + t^2e^y + g'(y) \tag{2.79}$$

Comparando 2.79 com 2.76

$$g'(y) = -1 \Rightarrow \int g'(y) = -y \tag{2.80}$$

$$\phi(t,y) = ysen(t) + t^2e^y - y = c \tag{2.81}$$

A solução geral é dada por $ysen(t) + t^2e^y - y = c$.

Exemplo 2.3.3.2 *Vamos determinar a solução geral de:* $(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$

Verificar se é exata:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x + 2y \tag{2.82}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x + y \tag{2.83}$$

Como 2.82 $\neq$ 2.83, temos que a equação não é exata, então para resolvê-la utilizando o método de exatas é necessário transforma-lá, porém não abordaremos tal método neste estudo.

2.4 Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem

As equações lineares de segunda ordem têm uma importância crucial no estudo de equações diferenciais por duas razões principais. A primeira é que equações lineares têm uma estrutura teórica rica, subjacente a diversos métodos sistemáticos de resolução. Além disso, uma parte substancial dessa estrutura e desses métodos é compreensível a um nível matemático relativamente elementar. Outra razão para estudar equações lineares de segunda ordem é que elas são essenciais para qualquer investigação mais profunda das áreas clássicas da física matemática. Não se pode ir muito longe do desenvolvimento de mecânica dos fluídos , condução de calor, movimento ondulatório ou fenômenos eletromagnéticos sem esbarrar na necessidade de resolver equações diferenciais lineares de segunda ordem (BOYCE; DIPRIMA, 2006).

De forma geral temos que a equação diferencial de segunda ordem é dada por

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{2.84}$$

se neste caso F for linear podemos reescrever 2.84 da seguinte forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \tag{2.85}$$

na qual g, p e q são funções da variável independente x.

Considera-se a equação diferencial de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes da forma

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{2.86}$$

sendo a, b, e c são constantes e $a \neq 0$.

Vamos procurar soluções da EDO 2.86 que sejam da forma $y = e^{mx}$. Assim,

$$y' = me^{mx} \tag{2.87}$$

$$y'' = m^2 e^{mx} \tag{2.88}$$

Substituindo na EDO 2.86, temos

$$am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0 \tag{2.89}$$

$$e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0 \tag{2.90}$$

Temos que $e^{mx} \neq 0 \ \forall x$, então

$$am^2 + bm + c = 0 \tag{2.91}$$

Definimos 2.91 como equação característica de 2.86.

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2.92}$$

Analisaremos três casos:

1º caso: $\Delta > 0$ duas raízes reais e distintas;

2º caso: $\Delta < 0$ duas raízes complexas;

3º caso: $\Delta = 0$ duas raízes iguais e reais.

Proposição 2.1 *(Princípio da Superposição) Sejam $y_1, y_2, ..., y_k$ soluções para a equação diferencial linear de n-ésima ordem homogênea em um intervalo I. Então, a combinação linear*

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_k y_k(x), \tag{2.93}$$

em que os c_i, $i = 1, 2, ..., k$, são constantes arbitrárias, é também uma solução no intervalo.

Demonstração: *Se definirmos $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, então*

$$a_2(x)[c_1 y_1'' + c_2 y_2''] \ + a_1(x)[c_1 y_1' + c_2 y_2'] \ + \ a_0(x)[c_1 y_1 + c_2 y_2] = \tag{2.94}$$

$$= c_1 \underbrace{[a_2(x) y_1'' + a_1(x) y_1' \ + \ a_0(x) y_1]}_{0} + c_2 \underbrace{[a_2(x) y_2'' \ + \ a_1(x) y_2' + a_0(x) y_2]}_{0} \tag{2.95}$$

$$= c_1 \times 0 + c_2 \times 0 = 0. \tag{2.96}$$

□

2.4.1 Raízes Reais e Distintas

Considerando que $b^2 - 4ac > 0$, temos como solução da equação $am^2 + bm + c = 0$ duas raízes reais e distintas, sejam m_1 e m_2 estas raízes, assim $y_1 = e^{m_1 x}$ e $y_2 = e^{m_2 x}$ são soluções da equação diferencial $ay'' + by' + c = 0$.

A solução geral da EDO é a combinação linear das soluções y_1 e y_2, escrita da seguinte forma $y = c_1y_1 + c_2y_2$, ou ainda: $y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}$.

2.4.2 Raízes Complexas Conjugadas

Considerando que $b^2 - 4ac < 0$, a equação $am^2 + bm + c = 0$ possui duas raízes complexas conjugadas, sejam $m_1 = \lambda + i\mu$ e $m_2 = \lambda - i\mu$ estas raízes, sendo λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Assim $y_1(x) = e^{(\lambda+i\mu)x}$ e $y_2(x) = e^{(\lambda-i\mu)x}$ são soluções da equação diferencial ordinária.

Observação 2.2 *Ao observar as soluções y_1 e y_2 percebemos que as mesmas têm valores complexos, porém, gostaríamos que estas soluções fossem reais.*

Para isso consideremos:

$$y(x) = c_1y_1 + c_2y_2 \tag{2.97}$$

$$y(x) = c_1e^{(\lambda+i\mu)x} + c_2e^{(\lambda-i\mu)x} \tag{2.98}$$

$$y(x) = c_1e^{\lambda x}[cos(\mu x) + isen(\mu x)] + c_2e^{\lambda x}[cos(\mu x) - isen(\mu x)] \tag{2.99}$$

$$y(x) = c_1e^{\lambda x}cos(\mu x) + ic_1e^{\lambda x}sen(\mu x) + c_2e^{\lambda x}cos(\mu x) - ic_2e^{\lambda x}sen(\mu x) \tag{2.100}$$

$$y(x) = (c_1 + c_2)e^{\lambda x}cos(\mu x) + i(c_1 - c_2)e^{\lambda x}sen(\mu x) \tag{2.101}$$

$$y(x) = k_1e^{\lambda x}cos(\mu x) + k_2e^{\lambda x}sen(\mu x) \tag{2.102}$$

sendo k_1 e k_2 constantes arbitrárias.

2.4.3 Raízes Repetidas

Nesta situação temos que o discriminante $(b^2 - 4ac)$ da equação característica é zero, logo $m_1 = m_2 = \dfrac{-b}{2a}$, ou seja, considerando $m = m_1 = m_2$, temos que $2am + b = 0$ assim, $y_1 = e^{mx}$. Verifiquemos agora que $y_2 = x\ e^{mx}$.

$$ay_2'' + by_2' + cy_2 = a(2me^{mx} + m^2xe^{mx}) + b(e^{mx} + mxe^{mx}) + cxe^{mx} \tag{2.103}$$

$$= (2am + b)e^{mx} + (am^2 + bm + c)xe^{mx} \tag{2.104}$$

$$= 0(e^{mx}) + 0(xe^{mx}) = 0 \tag{2.105}$$

Portanto, para este caso a solução geral é

$$y = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx} \tag{2.106}$$

Exemplo 2.4.3.1 *Resolva a equação $y'' + y' - 6y = 0$.*

A equação característica é

$$m^2 + m - 6 = (m - 2)(m + 3) = 0 \tag{2.107}$$

cujas raízes são $m = 2$ e $m = -3$. Portanto, pela proposição 2.1, a solução geral da equação diferencial dada é

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}. \tag{2.108}$$

Exemplo 2.4.3.2 *Resolva a equação $4y'' + 12y' + 9y = 0$.*

A equação característica é

$$4m^2 + 12m + 9 = 0 \tag{2.109}$$

que pode ser fatorada como

$$(2m + 3)^2 = 0 \tag{2.110}$$

de modo que a única raiz é $m = -\dfrac{3}{2}$. Assim, por 2.106, a solução geral é

$$y = c_1 e^{-\frac{3x}{2}} + c_2 x e^{-\frac{3x}{2}} \tag{2.111}$$

Exemplo 2.4.3.3 *Resolva a equação $y'' - 6y' + 13y = 0$.*

A equação característica é $m^2 - 6m + 13 = 0$. Pela fórmula quadrática, as raízes são

$$m = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = 3 \pm 2i \tag{2.112}$$

Por 2.102 a solução geral da equação diferencial é

$$y = e^{3x}(c_1\ cos(2x) + c_2\ sen(2x)) \tag{2.113}$$

3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Tendo em vista vários problemas da engenharia e de outras ciências, principalmente no que diz respeito a distribuições de temperatura, vibrações e potenciais, que dependem de muitas variáveis, o que é comum na prática, o modelo acaba por envolver as derivadas em relação a cada uma destas variáveis, tendo assim as equações diferenciais parciais (EDP's).

Assim a equação diferencial parcial é uma equação que envolve duas ou mais variáveis independentes e derivadas parciais de uma função $u = u(x_1, x_2, \cdots x_n)$. Podendo ser representada por:

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \cdots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}) = 0 \tag{3.1}$$

onde $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega$, Ω é um domínio em $\mathbb{R}^n$, F é uma função dada e $u(x)$ é a função que queremos determinar.

Além disso, as equações diferenciais parciais podem ser classificadas quanto a sua ordem, linearidade e sua homogeneidade. Quanto a classificação pela sua linearidade se torna semelhante às EDO's, sendo que a ordem de uma EDP é dada pela derivada parcial de maior grau:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 - \text{(EDP de primeira ordem)} \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 - \text{(EDP de segunda ordem)} \tag{3.3}$$

Uma EDP de segunda ordem nas variáveis independentes x e y e na variável dependente $u = u(x, y)$ é dita linear sobre $M \subset \mathbb{R}^2$ se pode ser escrita na forma:

$$A(x,y)u_{xx} + B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} + D(x,y)u_x + E(x,y)u_y + F(x,y)u + G(x,y) = 0 \tag{3.4}$$

onde A, B, C, D, E, F e G dependem somente das variáveis independentes x e y.

Exemplo 3.0.0.1 $xyu_{xx} + xu_{yy} + u = 0$, *é linear.*

Exemplo 3.0.0.2 $uu_x + u_{yy} = 0$, *não é linear*

Definição 3.1 *Uma EDP linear pode ser escrita na forma*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u(x) + d(x) = 0 \tag{3.5}$$

onde alguns dos coeficientes a_{ij} não são identicamente nulos.

Podemos denominar algumas EDP's como semi-lineares, sendo os coeficientes das derivadas que representam a ordem da EDP,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_j} \tag{3.6}$$

é linear e o restante da equação possui algum correspondente não-linear.

Uma EDP linear é homogênea se o termo independente de u é identicamente nulo, caso contrário, a equação é dita não-homogênea. Da definição anterior, a equação é homogênea se, e somente se o termo $d \equiv 0$.

3.1 Séries de Fourier

Durante o estudo das Equações Diferenciais Parciais, será perceptível que os conhecimentos do Cálculo Diferencial e Integral e de Equações Diferenciais são insuficientes para resolver alguns problemas que as próprias EDP's sugerem. Nesse sentido, faz-se necessário abordarmos neste trabalho as séries de Fourier, objetivando expressar funções mais complexas em termos de funções elementares mais familiares (GERHARD, 2007).

Uma soma de senos e cossenos da forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] \tag{3.7}$$

define uma função f cujos valores em cada ponto é a soma da série para aquele valor de x.

Temos que as funções $sen(\frac{n\pi x}{L})$ e $cos(\frac{n\pi x}{L})$, $n = 1, 2, 3, ...$, são periódicas com período fundamental $T = \frac{2L}{n}$, sendo que $sen(x)$ e $cos(x)$ têm período fundamental 2π e que $sen(\alpha x)$ e $cos(\alpha x)$ têm período fundamental $\frac{2\pi}{\alpha}$. Escolhendo $\alpha = \frac{n\pi}{L}$, vemos que o período T de $sen(\frac{n\pi x}{L})$ e de $cos(\frac{n\pi x}{L})$ é dado por $T = \frac{2\pi L}{n\pi} = \frac{2L}{n}$. Logo, como todo múltiplo inteiro de um período também é um período, cada uma das funções $sen(\frac{n\pi x}{L})$ e $cos(\frac{n\pi x}{L})$ têm o período comum $2L$.

Assim, definimos a equação (3.7) como a série de Fourier de f. Nesse sentido, espera-se que os coeficientes a_n e b_n estejam diretamente ligados a f, e por este motivo, vamos supor que a série (3.7) convirja uniformemente no intervalo $[-L, L]$, para que possamos utilizar a Proposição 3.1 e posteriormente obter os chamados coeficientes de Fourier.

Proposição 3.1 *Suponhamos que as funções u_n sejam contínuas e que a série* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *convirja uniformemente. Então a soma da série* $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *é também uma função contínua.*

Definição 3.2 *O produto interno padrão (u, v) de duas funções reais u e v no intervalo $\alpha \leq x \leq \beta$ é definido por*

$$(u, v) = \int_{\alpha}^{\beta} u(x)v(x)dx. \tag{3.8}$$

As funções u e v são ditas ortogonais em $\alpha \leq x \leq \beta$ se seu produto interno for nulo, ou seja, se

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(x)v(x)dx = 0. \tag{3.9}$$

Um conjunto de funções é dito um conjunto ortogonal se cada par de funções diferentes pertencentes ao conjunto é ortogonal.

Observação 3.1 *Um conjunto de funções $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ é dito um conjunto ortogonal se $(f_i, f_j) = 0, i \neq j$, ou seja, cada par de funções diferentes pertencentes ao conjunto é ortogonal.*

As funções $sen(\frac{m\pi x}{L})$ e $cos(\frac{m\pi x}{L})$, $m = 1, 2, ...$ formam um conjunto ortogonal de funções no intervalo $[-L, L]$. De fato, tal afirmação pode ser comprovada, pois, as três relações de ortogonalidade (3.10), (3.11) e (3.12) ditadas a seguir são satisfeitas:

$$\int_{-L}^{L} cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ L & \text{se } m = n \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\int_{-L}^{L} cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0, \text{ para qualquer m e n} \tag{3.11}$$

$$\int_{-L}^{L} sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ L & \text{se } m = n \end{cases} \tag{3.12}$$

Demonstração: Os resultados apresentados anteriormente podem ser obtidos com a utilização de identidades trigonométricas que expressam produtos de senos, ou de cossenos, ou de seno por cosseno, como soma de senos ou de cossenos. Por exemplo, na equação (3.10) temos:

$$\int_{-L}^{L} cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \tag{3.13}$$

entretanto, utilizando

$$cos(A)cos(B) = \frac{1}{2}\left[cos(A-B) + cos(A+B)\right] \tag{3.14}$$

obtemos

$$\frac{1}{2}\int_{-L}^{L} cos\left[\frac{(m-n)\pi x}{L}\right] + cos\left[\frac{(m+n)\pi x}{L}\right] dx \tag{3.15}$$

que ao integrar, resulta em

$$\frac{L}{2\pi}\left[\frac{sen\left[\frac{(m-n)\pi x}{L}\right]}{m-n} + \frac{sen\left[\frac{(m+n)\pi x}{L}\right]}{m+n}\right]\Bigg|_{-L}^{L}. \tag{3.16}$$

Ao fazermos a susbstituição dos extremos de integração, temos

$$\frac{L}{2\pi}\left[\frac{sen\left[(m-n)\pi\right]}{m-n} - \frac{sen\left[-(m-n)\pi\right]}{m-n} + \frac{sen\left[(m+n)\pi\right]}{m+n} - \frac{sen\left[-(m+n)\pi\right]}{m+n}\right] \tag{3.17}$$

ou ainda,

$$\frac{L}{2\pi}\left[\frac{sen\left[(m-n)\pi\right]}{m-n} + \frac{sen\left[(m-n)\pi\right]}{m-n} + \frac{sen\left[(m+n)\pi\right]}{m+n} + \frac{sen\left[(m+n)\pi\right]}{m+n}\right]. \tag{3.18}$$

Como sabemos que

$$sen\left[(m-n)\pi\right] = 0 \tag{3.19}$$

$$sen\left[(m+n)\pi\right] = 0 \tag{3.20}$$

podemos concluir que

$$\frac{L}{2\pi}\left[\frac{sen\left[(m-n)\pi\right]}{m-n} + \frac{sen\left[(m+n)\pi\right]}{m-n} + \frac{sen\left[(m+n)\pi\right]}{m+n} + \frac{sen\left[(m+n)\pi\right]}{m+n}\right] = 0. \tag{3.21}$$

Porém, $m+n$ deve ser diferente de zero, assim como $m-n$, e, isso acontece parcialmente, pois, m e n são positivos, logo $m+n \neq 0$. Mas quando $m = n$, a integral pode ser calculada da seguinte forma:

$$\int_{-L}^{L} cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \tag{3.22}$$

$$= \int_{-L}^{L} cos^2\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \tag{3.23}$$

utilizando a identidade trigonométrica

$$cos^2(A) = \frac{1}{2}\left[1 + cos(2A)\right] \tag{3.24}$$

temos,

$$\frac{1}{2}\int_{-L}^{L} 1 + cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) dx \tag{3.25}$$

ou ainda,

$$\frac{1}{2}\left[x + \frac{L}{2m\pi}sen\left(\frac{2m\pi x}{L}\right)\right]\Bigg|_{-L}^{L} \tag{3.26}$$

substituindo os extremos de integração, temos

$$\frac{1}{2}\left[L + \frac{L}{2m\pi}sen(2m\pi) + L - \frac{L}{2m\pi}sen(-2m\pi)\right] = \frac{1}{2}\left[2L + \frac{2L}{2m\pi}sen(2m\pi)\right] \tag{3.27}$$

Como

$$sen(2m\pi) = 0 \tag{3.28}$$

podemos concluir que

$$\frac{1}{2}\left[2L + \frac{2L}{2m\pi}sen(2m\pi)\right] = \frac{1}{2}2L = L \tag{3.29}$$

ou seja,

$$\int_{-L}^{L} cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ L & \text{se } m = n \end{cases} \tag{3.30}$$

Na equação (3.12) temos:

$$\int_{-L}^{L} sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \tag{3.31}$$

entretanto, utilizando

$$sen(A)sen(B) = \frac{1}{2}\left[cos(A - B) - cos(A + B)\right] \tag{3.32}$$

obtemos

$$\frac{1}{2}\int_{-L}^{L} cos\left[\frac{(m-n)\pi x}{L}\right] - cos\left[\frac{(m+n)\pi x}{L}\right] dx \tag{3.33}$$

onde, ao integrar, resulta em

$$\frac{L}{2\pi}\left[\frac{sen\left[\frac{(m-n)\pi x}{L}\right]}{m-n} - \frac{sen\left[\frac{(m+n)\pi x}{L}\right]}{m+n}\right]\Bigg|_{-L}^{L}. \tag{3.34}$$

Ao fazermos a susbstituição dos extremos de integração, temos

$$\frac{L}{2\pi}\left[\frac{sen\left[(m-n)\pi\right]}{m-n} - \frac{sen\left[-(m-n)\pi\right]}{m-n} - \frac{sen\left[(m+n)\pi\right]}{m+n} + \frac{sen\left[-(m+n)\pi\right]}{m+n}\right] \tag{3.35}$$

ou ainda,

$$\frac{L}{2\pi}\left[\frac{sen\left[(m-n)\pi\right]}{m-n} + \frac{sen\left[(m-n)\pi\right]}{m-n} - \frac{sen\left[(m+n)\pi\right]}{m+n} - \frac{sen\left[(m+n)\pi\right]}{m+n}\right]. \tag{3.36}$$

Como sabemos que

$$sen\left[(m-n)\pi\right] = 0 \tag{3.37}$$

$$sen\left[(m+n)\pi\right] = 0 \tag{3.38}$$

conclui-se que

$$\frac{L}{2\pi}\left[\frac{sen\left[(m-n)\pi\right]}{m-n} + \frac{sen\left[(m-n)\pi\right]}{m-n} - \frac{sen\left[(m+n)\pi\right]}{m+n} - \frac{sen\left[(m+n)\pi\right]}{m+n}\right] = 0. \tag{3.39}$$

Mas quando $m = n$, a integral pode ser calculada da seguinte forma:

$$\int_{-L}^{L} sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \tag{3.40}$$

$$= \int_{-L}^{L} sen^2\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \tag{3.41}$$

utilizando a identidade trigonométrica

$$sen^2(A) = \frac{1}{2}\left[1 - cos(2A)\right] \tag{3.42}$$

temos,

$$\frac{1}{2}\int_{-L}^{L} 1 - cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) dx \tag{3.43}$$

ou ainda

$$\frac{1}{2}\left[x - \frac{L}{2m\pi} sen\left(\frac{2m\pi x}{L}\right)\right]\Bigg|_{-L}^{L} = L \tag{3.44}$$

substituindo os extremos de integração, temos

$$\frac{1}{2}\left[L - \frac{L}{2m\pi} sen(2m\pi) + L + \frac{L}{2m\pi} sen(-2m\pi)\right] \tag{3.45}$$

assim,

$$\frac{1}{2}\left[L - \frac{L}{2m\pi} sen(2m\pi) + L - \frac{L}{2m\pi} sen(2m\pi)\right] = \frac{1}{2}\left[2L - \frac{2L}{2m\pi} sen(2m\pi)\right] \tag{3.46}$$

Como

$$sen(2m\pi) = 0 \tag{3.47}$$

podemos afirmar que

$$\frac{1}{2}\left[2L - \frac{2L}{2m\pi} sen(2m\pi)\right] = \frac{1}{2} 2L = L \tag{3.48}$$

ou seja,

$$\int_{-L}^{L} sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ L & \text{se } m = n \end{cases} \tag{3.49}$$

Voltando a dedução dos coeficientes de Fourier, podemos afirmar com base na proposição 3.1, que a igualdade (3.7) é contínua e, portanto, podemos integrá-la em ambos os membros de $-L$ a L (isso porque f deve ser periódica de período $2L$), obtendo

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{L} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] dx \tag{3.50}$$

utilizando algumas propriedades de integrais definidas chegamos a

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_{-L}^{L} cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \int_{-L}^{L} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx\right] = \tag{3.51}$$

$$= \frac{a_0}{2}[L]\Bigg|_{-L}^{L} + a_n\frac{L}{n\pi}\left[sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]\Bigg|_{-L}^{L} + b_n\frac{L}{n\pi}\left[cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]\Bigg|_{-L}^{L} = \tag{3.52}$$

$$= \frac{a_0}{2}[2L] + a_n\frac{L}{n\pi}\left[sen(n\pi) + sen(n\pi)\right] + b_n\frac{L}{n\pi}\left[cos(n\pi) - cos(n\pi)\right] = \tag{3.53}$$

$$La_0 + a_n\frac{L}{n\pi}[0+0] + b_n\frac{L}{n\pi}[0] = La_0 \tag{3.54}$$

ou ainda

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \tag{3.55}$$

Para obter os demais coeficientes, multiplicamos (3.7) por $cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$, onde $m \geq 1$ é fixo e posteriormente integramos,

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{L} f(x)cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L} cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-L}^{L} cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx + b_n\int_{-L}^{L} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx\right] \end{aligned} \tag{3.56}$$

sendo que, pelas relações de ortogonalidade vistas no exemplo 3.1, a igualdade (3.56) pode ser reduzida a

$$\int_{-L}^{L} f(x)cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = a_nL$$

ou ainda

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx. \tag{3.57}$$

De maneira análoga, podemos obter

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx. \tag{3.58}$$

apenas multiplicando (3.7) por $sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ e integrando.

Portanto, a série trigonométrica (3.7) definida pelos coeficientes (3.55), (3.57) e (3.58) é chamada de série de Fourier da função f, como vimos, e (3.55), (3.57) e (3.58) são denominados coeficientes de Fourier da função f.

$\square$

É interessante também, apresentar duas classes de funções onde os coeficientes de Fourier podem ser simplificados. Esses grupos de funções são compostos pelas funções pares e ímpares.

Definição 3.3 *Séries de Fourier de Cossenos e dos Senos.*

i. A série de Fourier tem uma função par no intervalo $(-L, L)$ *é a série de cossenos*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{3.59}$$

onde

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \tag{3.60}$$

ii. A série de Fourier de uma função ímpar no intervalo (-L, L) é a série dos senos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{3.61}$$

sendo que

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \tag{3.62}$$

3.2 Resolução das Equações Diferenciais Parciais

Entre os procedimentos mais conhecidos para a obtenção de soluções particulares de EDP's se tem o Método de Separação de Variáveis, cuja essência é obter soluções particulares da EDP reduzindo-a a uma ou mais equações diferenciais ordinárias (EDO).

Apesar de existirem diversos métodos que podem ser utilizados para a obtenção de soluções particulares de uma EDP linear, no método de separação de variáveis buscamos determinar uma solução particular na forma de um produto entre uma função $X(x)$ e uma função $Y(y)$,

$$u(x, y) = X(x)Y(y). \tag{3.63}$$

Assim, em alguns casos é possível reduzir uma EDP linear em duas variáveis a duas EDO's. Observando que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'Y, \tag{3.64}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = XY', \tag{3.65}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''Y, \tag{3.66}$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial x^2} = XY''. \tag{3.67}$$

Através do método de separação de variáveis, em alguns casos, substituímos uma EDP por um conjunto de EDO's que são resolvidas sujeitas a condições iniciais ou de contorno. A solução desejada de uma EDP é expressa como uma soma, uma série infinita, em geral, formada por soluções das EDO's. Em alguns casos é necessário lidar com uma série em senos e cossenos.

4 EQUAÇÃO DO CALOR

A equação de difusão do calor tem como objetivo principal, determinar a distribuição da temperatura, que representa como a temperatura do meio varia com a posição. Através da distribuição de temperatura é possível calcular pela Lei de Fourier o fluxo de calor por condução em qualquer ponto de um meio ou em uma superfície.

Tal conhecimento sobre a distribuição da temperatura nos permite verficar a integridade estrutural através da determinação de tensões térmicas, expansões e deflexões de um sólido, além de se utilizar para otimizar a espessura de um material isolante.

4.0.1 Condições de Contorno para a Equação do Calor

Os três tipos de condições de contorno comumente encontradas em situações de transferência de calor são:

i) Primeira Espécie ou Condição de Direchlet
Essa condição corresponde a uma situação na qual a superfície é mantida a uma temperatura fixa T_S. Essa situação ocorre de forma aproximada quando a superfície entra em contato direto com um sólido em fusão ou com um líquido em ebulição, nesses casos há transferência de calor na superfície, a qual permanece à temperatura do processo de mudança de fase.

ii) Segunda Espécie ou Condição de Neumann
Essa condição corresponde a existência de um fluxo de calor fixo ou constante $q(s)$ na superfície relacionada ao gradiente de temperatura na superfície, podendo ser escrito como:

$$q''_S(0) = -k\frac{\partial T}{\partial x}|_{x=0} \tag{4.1}$$

Quando $q''_S(x) = 0$ dizemos que a superfície está isolada, ou seja, não há transferências de calor da superfície para o meio.

iii) Terceira Espécie ou Condição de Robin
Nesta condição ocorre a existência de aquecimento (ou resfriamento) por convecção na superfície, podendo ser expressa através do balanço de energia na superfície,

$$-k\frac{\partial T}{\partial x} = h(T_S - T_\infty) \tag{4.2}$$

onde h é a constante de transferência de calor por convecção, T_S é a temperatura da superfície e T_∞ representa a temperatura do meio.

Observação 4.1 *A equação do calor também pode ser representada através dos sistemas de coordenadas cilíndricas e esféricas, de forma que as equações são representadas respectivamentee por:*

1)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(kr\frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}(k\frac{\partial T}{\partial \phi}) + \frac{\partial}{\partial z}(k\frac{\partial T}{\partial z}) + q = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \tag{4.3}$$

2)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(kr^2\frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 sen^2\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} + (k\frac{\partial T}{\partial \phi}) + \frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}(ksen\theta\frac{\partial T}{\partial \phi}) + q = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \tag{4.4}$$

4.0.2 Barra Unidimensional em Regime Transiente

Considere inicialmente o problema de determinarmos a distribuição de temperatura numa barra uniforme, $0 \leq x \leq L$, em regime transiente, ou seja, existe variação da temperatura em relação ao tempo. Suponhamos que as extremidades da barra sejam mantidas à temperatura constante de $0°C$. Temos assim a seguinte equação:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \tag{4.5}$$

Com a condição inicial

$$T(x,0) = f(x) \tag{4.6}$$

para $0 \leq x \leq L$ e com as seguintes condições de contorno:

$$T(0,t) = 0 \tag{4.7}$$

$$T(L,t) = 0 \tag{4.8}$$

onde $0 \leq x \leq L$.

Utilizando o Método de Variáveis Separáveis, para resolvermos este problema de condução do calor, vamos supor que:

$$T(x,t) = X(x)Y(t) \tag{4.9}$$

Substituindo a $T(x,t)$ em 4.5 temos:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = X''(x)Y(t) \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = X(x)Y'(t) \tag{4.11}$$

Sendo assim, a equação do calor pode ser escrita da seguinte forma:

$$\alpha^2 X''(x)Y(t) = X(x)Y'(t) \tag{4.12}$$

$$\frac{X''}{x} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{Y'}{y} = \lambda, \lambda = \text{constante} \tag{4.13}$$

Com isso, surgem dois problemas a serem resolvidos:

1) EDO de segunda ordem:

$$X'' - \lambda x = 0 \tag{4.14}$$

2) EDO de primeira ordem:

$$Y'(t) - \alpha^2 \lambda y = 0 \tag{4.15}$$

Resolvendo a equação: $X'' - \lambda x = 0$

Supondo $X(x) = e^{rx}$ solução da nossa equação, assim derivando duas vezes temos:

$$(r^2 - \lambda)e^{rx} = 0 \tag{4.16}$$

Como $e^{rx} \neq 0$, isso implica que $r^2 = \lambda$, logo:

Se $\lambda = 0$, temos que

$$X'' = 0 \tag{4.17}$$

$$X' = c_1 \tag{4.18}$$

$$X = c_1 x + c_2 \tag{4.19}$$

sendo c_1 uma constante diferente de 0.

Se $\lambda > 0$, temos que

$$r_1 = \sqrt{\lambda} \tag{4.20}$$

$$r_2 = -\sqrt{\lambda} \tag{4.21}$$

Então,

$$x(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} \tag{4.22}$$

Impondo as Condições de Contorno, temos:

$$T(0,t) = 0 \Rightarrow X(0)Y(t) = 0 \tag{4.23}$$

$$T(L,t) = 0 \Rightarrow X(L)Y(t) = 0 \tag{4.24}$$

Ou seja, $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$.

De $X(0) = 0$ com substituição em 4.22 temos:

$$c_1 + c_2 = 0 \tag{4.25}$$

De $x(L) = 0$ com substituição em 4.22 temos

$$c_1 e^{\sqrt{\lambda}L} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}L} = 0 \tag{4.26}$$

Obtendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{\lambda}L} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}L} = 0 \end{cases} \tag{4.27}$$

em que,

$$c_1 = c_2 = 0 \tag{4.28}$$

Ou seja, considerando $\lambda > 0$ a equação produz somente equações triviais, o que não resolve o nosso problema.

Portanto, consideremos $\lambda < 0$.

Assim, $r^2 = \lambda \Rightarrow r = \pm\sqrt{\lambda}i$. Logo

$$X(x) = c_1 cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 sen(\sqrt{\lambda}x) \tag{4.29}$$

Impondo as condições de contorno, temos que:

- $X(0) = 0$: $c_1 cos(0) + c_2 sen(0) = 0 \Rightarrow c_1 \times 1 + c_2 \times 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$
- $X(L) = 0$: $X(L) = c_1 cos(\sqrt{\lambda}L) + c_2 sen(\sqrt{\lambda}L) = 0 \Rightarrow 0 \times cos(\sqrt{\lambda}L) + c_2 sen(\sqrt{\lambda}L) = 0 \Rightarrow X(L) = c_2 sen(\sqrt{\lambda}L) = 0$

como queremos soluções não triviais, impomos que $sen(\sqrt{\lambda_n}x) = 0$ de onde

$$\sqrt{\lambda}L = n\pi, n \in \mathbb{Z} \tag{4.30}$$

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \tag{4.31}$$

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \tag{4.32}$$

Sendo $sen(\sqrt{\lambda_n}x)$ as autofunções e $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ os autovalores.

Portanto, $X(x) = c_2sen(\frac{n\pi}{L}x), n \in \mathbb{Z}$ é solução da EDO de segunda ordem.

Agora temos que resolver o segundo problema, $y' + \alpha^2\lambda y = 0$.

Podemos resolver essa equação utilizando o método do fator integrante, na qual $\mu(t) = e^{\int \alpha^2\lambda dt} = e^{\alpha^2\lambda t}$.

Sendo assim, multiplicando $\mu(t)$ em ambos os lados da equação, temos:

$$\mu(t)y' + \alpha^2\lambda y\mu(t) = 0\ \mu(t) \tag{4.33}$$

$$e^{\alpha^2\lambda t}y' + \alpha^2\lambda ye^{\alpha^2\lambda t} = 0 \tag{4.34}$$

$$[ye^{\alpha^2\lambda t}]' = 0 \tag{4.35}$$

$$\int [ye^{\alpha^2\lambda t}]'dt = \int 0\ dt \tag{4.36}$$

$$ye^{\alpha^2\lambda t} = c \tag{4.37}$$

$$y(t) = ce^{-\alpha^2\lambda t} \tag{4.38}$$

onde $\lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{L}$.

Sendo assim, a solução da EDP é:

$$T(x,t) = c_n e^{-\alpha^2\frac{n^2\pi^2 t}{L^2}} sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right), n = 1, 2, \cdots \tag{4.39}$$

Pelo princípio da sobreposição

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\alpha^2\frac{n^2\pi^2 t}{L^2}} sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{4.40}$$

Impondo, agora a condição inicial, $T(x,0) = f(x)$, temos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x) \tag{4.41}$$

Multiplicamos a equação por $sen\left(\frac{m\pi}{L}x\right), m = 1, 2, \cdots$ e integrando de 0 à L, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) sen\left(\frac{m\pi}{L}x\right) = f(x) sen\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \tag{4.42}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^L sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) sen\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \int_0^L f(x) sen\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx \tag{4.43}$$

Utilizando as relações de ortogonalidade:

$$\int_0^L sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) sen\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \begin{cases} 0, & se\ m \neq n \\ \frac{L}{2}, & se\ m = n. \end{cases} \tag{4.44}$$

$$c_n \frac{L}{2} = \int_0^L f(x) sen\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx \tag{4.45}$$

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) sen\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx \tag{4.46}$$

Logo, a solução para o problema da equação do calor unidimensional em regime transiente com temperatura prescrita nula nas extremidaddes é dada por:

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\alpha^2 \frac{n^2\pi^2 t}{L^2}} sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{4.47}$$

com a c_n determinada acima.

Problema 1: *Encontre a temperatura u(x,t) em qualquer instante em uma barra de metal com 50 cm de comprimento, insulada nos lados, inicialmente a uma temperatura uniforme de* $20° C$ *em toda a barra e cujas extremidades são mantidas a* $0°$ *para todo* $t > 0$.

A temperatura na barra satisfaz os seguintes problemas de condução do calor

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \tag{4.48}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \tag{4.49}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t > 0 \tag{4.50}$$

com $L = 50$ e $f(x) = 20$ para $0 < x < 50$. Logo, da equação 4.47, a solução é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/2500} sen\left(\frac{n\pi x}{50}\right), \tag{4.51}$$

onde, de 4.46,

$$c_n = \frac{2}{50}\int_0^{50} 20\ sen\left(\frac{n\pi x}{50}\right) dx \tag{4.52}$$

$$c_n = \frac{40}{50}\int_0^{50} sen\left(\frac{n\pi x}{50}\right) dx \tag{4.53}$$

Utilizando de $u = \dfrac{n\pi x}{50}$ e $dx = \dfrac{50du}{n\pi}$,

$$c_n = \frac{40}{50}\int_0^{50} sen(u)\frac{50du}{n\pi} \tag{4.54}$$

$$c_n = \frac{40}{n\pi}\int_0^{50} sen(u)du = -\frac{40}{n\pi}cos(u)\Big|_0^{50} = -\frac{40}{n\pi}cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right)\Big|_0^{50} \tag{4.55}$$

$$c_n = -\frac{40}{n\pi}(cos(n\pi) - 1)\begin{cases} \dfrac{80}{n\pi} & \text{, n ímpar;} \\ 0 & \text{, n par.} \end{cases} \tag{4.56}$$

Finalmente, substituindo os c_n na equação 4.51, obtemos

$$u(x,t) = \frac{80}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/2500} sen\left(\frac{n\pi x}{50}\right) \tag{4.57}$$

4.0.3 Barra com Extremidades Isoladas

Neste caso vamos considerar as seguintes condições:

Condição inicial

$$T(x,0) = f(x) \tag{4.58}$$

Condições de Contorno

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = 0 \tag{4.59}$$

e

$$\frac{\partial T}{\partial x}(L,t) = 0 \tag{4.60}$$

Utilizando o Método de Variáveis Separáveis, supomos $T(x,t) = x(x)y(t)$, e substituimos na equação do calor,

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \tag{4.61}$$

$$\alpha^2 x''(x)y(t) = x(x)y'(t) \tag{4.62}$$

$$\frac{x''}{x} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{y'}{y} = \lambda, \lambda = constante \tag{4.63}$$

o que resulta em dois problemas:

1) $x'' - \lambda x = 0$, (EDO de 2ª ordem)

2) $y' - \lambda\alpha^2 y = 0$, (EDO de 1ª ordem).

Resolvendo o primeiro problema, $x'' - \lambda x = 0$.
Supondo $x(x) = e^{rx}$ solução e derivando duas vezes, temos:

$$(r^2 - \lambda)e^{rx} = 0 \tag{4.64}$$

$$r^2 - \lambda = 0 \tag{4.65}$$

$$r^2 = \lambda \tag{4.66}$$

$$r = \sqrt{\lambda} \tag{4.67}$$

Como já vimos no problema anterior, necessitamos de soluções não triviais , e essas possivelmente são encontradas se consideramos $\lambda < 0$, sendo assim:

$$x(x) = c_1 cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 sen(\sqrt{\lambda}x) \tag{4.68}$$

Impondo as condições de contorno, temos:

$$[c_1 cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 sen(\sqrt{\lambda}x)]' = 0 \tag{4.69}$$

$$-c_1 sen(\sqrt{\lambda}x) + c_2 cos(\sqrt{\lambda}x) = 0 \tag{4.70}$$

De $x'(0) = 0$ temos que $c_2 = 0$ e de $x'(L) = 0$ temos $-c_1 sen(\sqrt{\lambda}L) = 0$.
Como queremos encontrar soluções não triviais, temos que

$$sen(\sqrt{\lambda}L) = 0 \tag{4.71}$$

$$\sqrt{\lambda}L = n\pi, n \in \mathbb{Z} \tag{4.72}$$

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \tag{4.73}$$

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \tag{4.74}$$

Portanto, $x(x) = -c_1 cos(\frac{n\pi}{L}x)$.
Resolvendo o segundo problema, $y' + \alpha^2\lambda y = 0$.
Usando o Método do Fator Integrante, temos:

$$\mu(t) = e^{\int \alpha^2\lambda dt} = e^{\alpha^2\lambda t} \tag{4.75}$$

$$\mu(t)y' + \alpha^2\lambda y\mu(t) = 0 \tag{4.76}$$

$$e^{\alpha^2\lambda t}y' + \alpha^2\lambda y e^{\alpha^2\lambda t} = 0 \tag{4.77}$$

$$[ye^{\alpha^2\lambda t}]' = 0 \tag{4.78}$$

$$\int [ye^{\alpha^2\lambda t}]' dt = \int 0 dt \tag{4.79}$$

$$ye^{\alpha^2\lambda t} = c \tag{4.80}$$

$$y(t) = ce^{-\alpha^2\lambda t} \tag{4.81}$$

Ou seja,

$$T(x,t) = x(x)y(t) = c_n e^{\frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{L^2}} cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), n = 1, 2, \cdots \tag{4.82}$$

Pelo princípio da superposição, temos que

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{L^2}} cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{4.83}$$

Impondo a condição inicial para determinarmos c_n, temos:

$$T(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)=f(x) \tag{4.84}$$

Multiplicando a equação por $cos(\frac{m\pi}{L}x)$, chegamos em

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)=f(x)cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \tag{4.85}$$

e integrando a equação de 0 à L, obtemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n\int_0^L cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx=\int_0^L f(x)cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx \tag{4.86}$$

Utilizando os resultados das relações de ortogonalidade, temos:

$$\int_0^L cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx=\begin{cases}0, \ se \ m\neq n\\ \frac{L}{2}, \ se \ m=n\end{cases} \tag{4.87}$$

Ou seja,

$$c_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx \tag{4.88}$$

Logo, a solução geral para a equação será:

$$T(x,t)=\frac{c_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{\frac{-\alpha^2n^2\pi^2t}{L^2}}cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{4.89}$$

com c_n determinado acima.

Problema 2: *Encontre a temperatura $u(x,t)$ em uma barra metálica com 25cm de comprimento, isolada tanto nas extremidades quanto nos lados, cuja distribuição inicial de temperatura é $u(x,0)=x$ para $0<x<25$.*

Inicialmente, vemos que a barra satifaz o problema de condução de calor

$$\alpha^2u_{xx}=u_t, \quad 0<x<L, \ t>0 \tag{4.90}$$

$$u(x,0)=f(x), \quad 0\leq x\leq L \tag{4.91}$$

$$u_x(0,t)=0, \quad u_x(L,t)=0, \quad t>0 \tag{4.92}$$

com $L = 25$. Logo da equação

$$u(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{4.93}$$

a solução é

$$u(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} cos\left(\frac{n\pi x}{25}\right), \tag{4.94}$$

os coeficientes são determinados pela seguinte equação

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{4.95}$$

Assim, temos que

$$c_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx = \frac{2}{25}\int_0^{25} x dx = \frac{2}{25}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{25} \tag{4.96}$$

$$c_0 = \frac{2}{25}\left(\frac{25^2}{2}\right) = 25 \tag{4.97}$$

e, para $n \geq 1$.

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \tag{4.98}$$

$$c_n = \frac{2}{25}\int_0^{25} x\ cos\left(\frac{n\pi x}{25}\right) dx \tag{4.99}$$

Utilizando-se de $u = n\pi x$, $x = \dfrac{u}{n\pi}$ e $dx = \dfrac{du}{n\pi}$ temos que

$$c_n = \frac{2}{25}\int_0^{25} \frac{u}{n\pi} cos\left(\frac{u}{25}\right) \frac{du}{n\pi} \tag{4.100}$$

$$c_n = \frac{2}{25}\int_0^{25} \frac{u}{n^2\pi^2} cos\left(\frac{u}{25}\right) du \tag{4.101}$$

$$c_n = \frac{2}{25n^2\pi^2}\int_0^{25} u cos\left(\frac{u}{25}\right) du \tag{4.102}$$

Utilizando-se de $u = u$, $v' = cos\left(\dfrac{u}{25}\right)$ e $v = 25\ sen\left(\dfrac{u}{25}\right)$, temos que

$$c_n = \frac{2}{25n^2\pi^2}\left[u25\ sen\left(\frac{u}{25}\right) - \int 25\ sen\left(\frac{u}{25}\right) du\right]\Bigg|_0^{25} \tag{4.103}$$

$$c_n = \frac{2}{25n^2\pi^2}\left[25u\ sen\left(\frac{u}{25}\right) - 25\left(-25\ cos\left(\frac{u}{25}\right)\right)\right]\Bigg|_0^{25} \tag{4.104}$$

Substiuindo $u = n\pi x$ em c_n, temos

$$c_n = \frac{2}{25n^2\pi^2}\left[25(n\pi x)sen\left(\frac{n\pi x}{25}\right) + 625\ cos\left(\frac{n\pi x}{25}\right)\right]\Bigg|_0^{25} \tag{4.105}$$

$$c_n = \frac{2}{25n^2\pi^2}\left[625n\pi\ sen(n\pi) + 625\ cos(n\pi) - 625\right] \tag{4.106}$$

$$c_n = \frac{2}{25n^2\pi^2}625[(n\pi)\ sen(n\pi) + cos(n\pi) - 1] \tag{4.107}$$

$$c_n = \frac{50}{n^2\pi^2}[(n\pi)\ sen(n\pi) + cos(n\pi) - 1] \tag{4.108}$$

Como $sen(n\pi) = 0$ para todo n inteiro positivos, logo

$$c_n = \frac{50}{n^2\pi^2}[cos(n\pi) - 1] = \begin{cases} \dfrac{-100}{n^2\pi^2} & \text{,para n ímpar;} \\ 0 & \text{, para n par} \end{cases} \tag{4.109}$$

Portanto,

$$u(x,t) = \frac{25}{2} - \frac{100}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^2}e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/625}cos\left(\frac{n\pi x}{25}\right) \tag{4.110}$$

é a solução do problema dado.

4.0.4 Temperatura Prescrita Qualquer

Supondo que uma das extremidades da barra é mantida a uma temperatura constante T_1 e a outra é mantida a uma outra temperatura T_2, obedecendo a condição inicial $T(x,0) = f(x)$. Então as condições de contorno da nossa equação do calor são:

$$T(0,t) = T_1 \neq 0 \tag{4.111}$$

$$T(L,t) = T_2 \neq 0 \tag{4.112}$$

Como as condições de contorno não são homogêneas, devemos analisar que, quando t tende ao infinito a temperatura $v(x)$ tende para uma constante, sendo independente do tempo t e das condições iniciais.

Temos que $v(x)$ deve satisfazer a equação do calor, $\alpha^2\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{\partial T}{\partial t}$, sendo assim, $v''(x) = 0, 0 < x < L$.

Além disso, $v(x)$ deve satisfazer as condições de contorno, onde $v(0) = T_1$ e $v(L) = T_2$.

Sendo assim, $v(x) = (T_1 - T_2)\frac{x}{L} + T_1$.

Agora vamos espressar $T(x)$ como a soma da distribuição estado estacionário $v(x)$ com outra distribuição (transiente) $w(x,t)$, então,

$$T(x,t) = v(x) + w(x,t) \tag{4.113}$$

Como $v(x)$ já foi determinado, temos que determinar $w(x,t)$. Para isso, substituímos $v(x) + w(x,t)$ em $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, ou seja,

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 (v(x) + w(x,t))}{\partial x^2} = \frac{\partial (v(x) + w(x,t))}{\partial t} \tag{4.114}$$

Como $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$ e $\dfrac{\partial v}{\partial t} = 0$, segue que

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial t} \tag{4.115}$$

.

Analogamente

$$w(0,t) = T(0,t) - v(0) = T_1 - T_1 = 0 \tag{4.116}$$

$$w(L,t) = T(L,t) - v(L) = T_2 - T_2 = 0 \tag{4.117}$$

$$w(x,0) = T(x,0) - v(x) = f(x) - v(x). \tag{4.118}$$

Ou seja, temos um problema com as mesmas características do 1º caso resolvido nesta seção. Utilizando os resultados obtidos na resolução deste, temos que a solução para o problema é dado por:

$$T(x,t) = (T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{L^2}} sen(\frac{n\pi x}{L}) \tag{4.119}$$

onde,

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L [f(x) - (T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1] sen(\frac{n\pi x}{L}) dx. \tag{4.120}$$

Problema 3: *Considere o problema de condução de calor*

$$u_{xx} = u_t, \ 0 < x < 30, \ t > 0$$

$$u(0,t) = 20, \ u(30,t) = 50, \ t > 0$$

$$u(x,0) = 60 - 2x,\ 0 < x < 30$$

Encontre a distribuição de temperatura estado estacionário e o problema de valores de contorno que determina a distribuição transiente

A temperatura estado estacionário satisfaz $v''(x) = 0$ e as condições de contorno $v(0) = 20$ e $v(30) = 50$. Assim, $v(x) = 20 + x$. A solução transiente $w(x,t)$ satisfaz a equação do calor

$$w_{xx} = w_t, \tag{4.121}$$

as condições de contorno homogêneas

$$w(0,t) = 0, \quad w(30,t) = 0, \tag{4.122}$$

e a condição inicial modificada

$$w(x,0) = 60 - 2x - (20 + x) = 40 - 3x \tag{4.123}$$

Utilizando-se de 4.119 e 4.120, temos que

$$u(x,t) = (50-20)\frac{x}{30} + 20 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{30^2}} sen\left(\frac{n\pi x}{30}\right) \tag{4.124}$$

onde

$$c_n = \frac{2}{30}\int_0^{30} \left[40 - 3x - (50-20)\frac{x}{30} + 20\right] sen\left(\frac{n\pi x}{30}\right) dx \tag{4.125}$$

$$c_n = \frac{2}{30}\int_0^{30} [60 - 3x - x]\, sen\left(\frac{n\pi x}{30}\right) dx \tag{4.126}$$

$$c_n = \frac{2}{30}\int_0^{30} [60 - 4x]\, sen\left(\frac{n\pi x}{30}\right) dx \tag{4.127}$$

$$c_n = \frac{2}{30}\left[\int_0^{30} 60 sen\left(\frac{n\pi x}{30}\right) dx - \int_0^{30} -4x sen\left(\frac{n\pi x}{30}\right) dx\right] \tag{4.128}$$

$$c_n = \frac{2}{30}\left[60\int_0^{30} sen\left(\frac{n\pi x}{30}\right) dx + 4\int_0^{30} x sen\left(\frac{n\pi x}{30}\right) dx\right] \tag{4.129}$$

Utilizando-se de $u = \dfrac{n\pi x}{30}$, logo $x = \dfrac{30u}{n\pi}$ e $dx = \dfrac{30du}{n\pi}$, temos que

$$c_n = \frac{2}{30}\left[60\int_0^{30} sen(u)\frac{30du}{n\pi} + 4\int_0^{30}\frac{30u}{n\pi}sen(u)\frac{30du}{n\pi}\right] \tag{4.130}$$

$$c_n = \frac{2}{30}\left[\frac{-1800}{n\pi}cos\left(\frac{n\pi x}{30}\right) + \frac{3600}{n^2\pi^2}\left(-\frac{n\pi x}{30}cos\left(\frac{n\pi x}{30}\right) + sen\left(\frac{n\pi x}{30}\right)\right)\right]\Bigg|_0^{30} \tag{4.131}$$

$$c_n = \frac{120}{n\pi}cos\left(\frac{n\pi x}{30}\right) + \frac{240}{n^2\pi^2}\left(\frac{-n\pi x}{30}cos\left(\frac{n\pi x}{30}\right) + sen\left(\frac{n\pi x}{30}\right)\right)\Bigg|_0^{30} \tag{4.132}$$

$$c_n = \frac{120}{n\pi}cos\left(\frac{n\pi x}{30}\right) - \frac{8x}{n\pi}cos\left(\frac{n\pi x}{30}\right) + \frac{240}{n^2\pi^2}sen\left(\frac{n\pi x}{30}\right)\Bigg|_0^{30} \tag{4.133}$$

$$c_n = \frac{120}{n\pi}cos(n\pi) - \frac{240}{n\pi}cos(n\pi) - \frac{120}{n\pi} = \begin{cases} 0 \text{ , n ímpar;} \\ \dfrac{-240}{n\pi} \text{ , n par.} \end{cases} \tag{4.134}$$

Substituindo c_n em 4.124 temos a solução do problema.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Através deste trabalho foi possível ampliar os conhecimentos acerca das Equações Diferenciais, bem como da complexidade em torno das Equações Diferenciais Parciais, que por sua vez, são representadas em vários problemas da Física e da Engenharia que não são vistos durante o curso de Licenciatura em Matemática. O trabalho buscou introduzir de forma simples o assunto de Equações Diferenciais dando ênfase as Equações Diferenciais Parciais.

A complexidade citada aqui em torno das Equações Diferenciais Parciais, se dá principalmente pelo fato de que poucas são as EDP's descritas de uma forma homogênea, tornando assim a resolução mais complexa ou até mesmo sem solução. Assim, para compreender melhor essas EDP's é necessário fazer estudos mais aprofundados, que podem ficar como sugestão de trabalhos futuros.

Com o trabalho foi possível adquirir os conhecimentos necessários para a análise das Equações Diferenciais Parciais, tendo como estruturação os estudos em torno das Equações Diferenciais Ordinárias, além de poder compreender a importância das Séries de Fourier para a elaboração de soluções para as EDP's.

A equação do calor é fundamental em numerosos e diversos campos da ciência, principalmente no ramo da Engenharia, o que acaba despertando interesse de alunos da licenciatura a aprofundarem seus conhecimentos em torno da Matemática Aplicada.

Por fim, compreende-se a necessidade de um estudo futuro para ampliação do conhecimento das EDP's, trazendo assim alguns outros problemas que não foram abordados neste trabalho.

REFERÊNCIAS

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, 8a ed.* [S.l.: s.n.], 2006.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da matemática.* [S.l.]: Editora Blucher, 2019.

FIGUEIREDO, D. G. D. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais, 4a ed.* [S.l.: s.n.], 2005.

GERHARD. *Solução analítica para problemas de difusão de calor bidimensionais e tridimensionais.* Chapecó: [s.n.], 2007.

IÓRIO, R.; IÓRIO, V. de M. *Equações diferenciais parciais: uma introduçao.* [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2013.

IÓRIO, V. *Um curso de Graduação, 4a ed.* [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2016.

UNICAMP. *Aula 1: Classificação das Equações Diferenciais, Equações Lineares de Primeira Ordem e Fatores Integrantes.* Disponível em: ⟨https://www.ime.unicamp.br/~valle/Teaching/2016/MA311/Aula1.pdf⟩.

USP. *Equações Diferenciais de Segunda Ordem.* 2016. Disponível em: ⟨https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/3593400/mod_resource/content/2/17.1%20Equa%C3%A7%C3%B5es%20Lineares%20de%20Segunda%20Ordem.pdf⟩. Acesso em: 22 mai. 2019.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Equações diferenciais.* [S.l.]: Pearson Makron Books, 2006.