

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL - PROFMAT

CÁTIA PIANO

**DIFERENTES ABORDAGENS PARA O ESTUDO DAS FUNÇÕES
EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS**

DISSERTAÇÃO

PATO BRANCO

2016

CÁTIA PIANO

**DIFERENTES ABORDAGENS PARA O ESTUDO DAS FUNÇÕES
EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de “Mestre em Matemática”.

Orientador: João Biesdorf, Dr.

PATO BRANCO

2016

P581d Piano, Cátia.
Diferentes abordagens para o estudo das funções exponenciais e logarítmicas / Cátia Piano. -- 2016.
108 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. João Biesdorf
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Pato Branco, PR, 2016.
Bibliografia: f. 106.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Funções exponenciais. 3. Logarítmos. I. Biesdorf, João, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD (22. ed.) 510

Título da Dissertação No. 018

“DIFERENTES ABORDAGENS PARA O ESTUDO DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS”.

por

Cátia Piano

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Pato Branco, às 14h do dia 15 de dezembro de 2016. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Prof. João Biesdorf, Dr.
(Presidente - UTFPR/Pato Branco)

Prof. Airton Kist, Dr.
(UEPG/Ponta Grossa)

Prof. Rômel da Rosa Silva, Dr.
(UTFPR/Branco)

Prof. Rômel da Rosa da Silva, Dr.
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR”

Aos meus pais, Vilson e Melânia, e minha irmã Carine, meus maiores tesouros.

AGRADECIMENTOS

O ano de 2016 tem sido um ano de grandes desafios em minha vida. Novo emprego, nova cidade, final de mestrado, dissertação, uma fratura de tornozelo. Ao final desta etapa não posso deixar de agradecer aos que colaboraram de uma forma ou de outra para que eu chegasse até aqui.

À Deus, pelo dom da vida e por me permitir superar desafios e medos que a vida trouxe durante esses quase três anos, por me acompanhar semanalmente e me proteger dos perigos da estrada nas viagens de ida e volta às aulas e orientações.

À minha família, pai, mãe, mana, agradeço pela presença e incentivo constantes para que eu não deixe de me desafiar e me propor novos desafios.

Ao meu orientador, Professor João Biesdorf, pela dedicação e paciência em me orientar nesta pesquisa.

À CAPES pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.

À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.

Aos professores Airton Kist e Rômel da Rosa da Silva, por aceitarem o convite para participar da banca de avaliação deste trabalho.

Aos amigos, de perto e de longe, pelo incentivo e apoio, por compreenderem minhas ausências e por colaborarem da maneira que podiam, por fazerem meus dias mais alegres e por estarem ao meu lado quando precisei. Não cito nomes para não cometer a falha de esquecer alguém.

Agradecimento especial aos amigos e colegas de turma, pelas horas de estudo, exercícios compartilhados, risadas, brincadeiras e confraternizações. Guardarei de todos ótimas lembranças.

Um agradecimento especial à Adalgisa Loureiro de Mello, amiga que o mestrado me deu de presente, e hoje também colega de trabalho, e a sua família, por me acolherem na mudança para uma nova cidade e por, literalmente, cuidarem de mim no momento mais difícil deste último ano durante uma internação hospitalar, período final de mestrado e elaboração de

dissertação.

Agradeço à todos que de uma forma ou de outra colaboraram para a realização deste trabalho.

É evidente para mim que o paraíso religioso da juventude, assim perdido, foi a primeira tentativa de me libertar das cadeias do “mero individualismo”, de uma existência dominada por desejos, esperanças e sentimentos primários. Além de mim, fora de mim, estava o mundo imenso, que existe independente dos seres humanos e que se nos apresenta como um enorme e eterno enigma. (Albert Einstein 1879-1955, Notas Autobiográficas)

RESUMO

PIANO, Cátia. DIFERENTES ABORDAGENS PARA O ESTUDO DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS. 108 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2016.

Ao longo da realização deste trabalho buscamos compreender melhor as funções exponenciais e logarítmicas de modo que pudéssemos apresentá-las de maneira diferente da abordagem tradicional. Em um primeiro momento resgatamos os conceitos de potenciação, desde os expoentes naturais, passando pelos expoentes inteiros e racionais, e chegando aos expoentes reais e depois definindo o logaritmo como “operação inversa” da potenciação. Em seguida caracterizamos a função exponencial através de propriedades básicas (ser monótona e levar somas em produtos) e definimos o logaritmo como sua função inversa. Depois disso, fizemos o mesmo com a função logarítmica, definindo-a através de propriedades básicas (ser crescente e levar produtos em somas) para então definir a função exponencial como sua inversa, mostrando por fim, que ambas as formas de definir as funções exponenciais, e conseqüentemente as logarítmicas, são equivalentes. Por fim, trazemos uma caracterização geométrica dos logaritmos, tornando as demonstrações das propriedades mais intuitivas e simples.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Função Logarítmica. Função Exponencial.

ABSTRACT

PIANO, Cátia. DIFFERENT APPROACHES TO THE STUDY OF EXPONENTIAL AND LOGARITHMIC FUNCTIONS. 108 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2016.

Along this work we search to better understand the exponential and logarithmic functions so that we could present them differently from the traditional approach. In a first moment we recovered the concepts of potentiation, from the natural exponents, through the entire rational exponents, to the real exponents and then defining the logarithm as the "reverse operation" of potentiation. Then we characterize the exponential function through basic properties (be monotonous and take sums into products) and define the logarithm as its inverse function. After that, we did the same with the logarithmic function, defining it through basic properties (being increasing and taking products into sums) and then defining the exponential function as its inverse, showing, finally, that both ways of defining the exponential functions and, consequently, the logarithmic functions, are equivalent. Finally, we bring a geometric characterization of the logarithms, making the demonstrations of properties more intuitive and simple.

Keywords: Mathematics Teaching. Logarithmic Function. Exponential Function.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	– Gráfico da Função Exponencial $f(x) = a^x$ com $0 < a < 1$	34
FIGURA 2	– Gráfico da Função Exponencial $f(x) = a^x$ com $a > 1$	35
FIGURA 3	– Gráfico Função Seno	36
FIGURA 4	– Gráfico Função Quadrática $g(x) = x^2$	37
FIGURA 5	– Gráfico Função $h(x) = x^3$	37
FIGURA 6	– Gráfico de uma função polinomial. Exemplo de gráfico de uma função contínua	38
FIGURA 7	– Gráfico da função $h(x)$. Exemplo de gráfico de uma função contínua em intervalos	39
FIGURA 8	– Gráfico de uma Função Logarítmica com $a > 1$	43
FIGURA 9	– Intervalos Consecutivos de extremos $a^0; a^{1/n}; a^{2/n}, \dots, a^{m/n}, \dots, a^M$	51
FIGURA 10	– Gráfico das funções $f_1(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x)$ e $f_2(x) = \log_3(x)$	55
FIGURA 11	– Gráfico de $y = a^x$, $y = x$ e $y = \log_a(x)$	57
FIGURA 12	– Plano Cartesiano	73
FIGURA 13	– Hipérbole	74
FIGURA 14	– Hipérbole com centro na origem e focos sobre o eixo x	74
FIGURA 15	– Hipérbole com centro na origem e focos sobre o eixo y	75
FIGURA 16	– Hipérbole com centro em um ponto C do plano e reta focal não paralela aos eixos	76
FIGURA 17	– Gráfico da função $H(x) = \frac{1}{x}$: Hipérbole de centro na origem e reta focal $y = x$	77
FIGURA 18	– Ramo positivo da Hipérbole $h(x) = \frac{1}{x}$	77
FIGURA 19	– Faixa de Hipérbole	78
FIGURA 20	– Semicírculo de centro $C(3, 0)$ e raio 3.	79
FIGURA 21	– Cálculo da área de um semicírculo por aproximação.	79
FIGURA 22	– Divisão do intervalo $[a, b]$ em três subintervalos, gerando três retângulos inscritos na faixa de Hipérbole H_a^b	81
FIGURA 23	– Refinamento da divisão do intervalo $[a, b]$	82
FIGURA 24	– Transformação T_2	84
FIGURA 25	– Transformação T_k sobre retângulo R de lados paralelos aos eixos	84
FIGURA 26	– Transformação T_k levando a faixa H_a^b na faixa H_{ak}^{bk}	85
FIGURA 27	– Caso 1 - Soma das áreas das faixas de hipérbole	86
FIGURA 28	– Caso 2 - Soma das áreas de faixas de hipérbole	88
FIGURA 29	– O número e (FONTE: LIMA, 2013b, p.202)	90
FIGURA 30	– Faixas de Hipérbole: H_a^b , $H(3)_a^b$ e $H(k)_a^b$ com os retângulos de base $[c, d]$ inscritos	99

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
1.1	QUAIS OS OBJETIVOS DESTA TRABALHO?	10
1.1.1	Objetivo Geral	10
1.1.2	Objetivos Específicos	10
1.2	COMO ESTE TRABALHO ESTÁ ESTRUTURADO?	10
1.3	POR QUE REALIZAR ESTE TRABALHO?	11
2	DEFINIÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL COMO GENERALIZAÇÃO DA POTENCIAÇÃO	17
2.1	PRIMEIRAS PROPRIEDADES	17
2.2	EXPOENTES IRRACIONAIS	25
2.3	FUNÇÃO EXPONENCIAL	32
2.4	FUNÇÃO LOGARÍTMICA	41
3	DEFINIÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL ATRAVÉS DE PROPRIEDADES CARACTERIZADORAS	45
3.1	FUNÇÕES EXPONENCIAIS	45
3.2	LOGARITMOS	54
4	DEFINIÇÃO DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA ATRAVÉS DE PROPRIEDADES CARACTERIZADORAS	59
4.1	FUNÇÕES LOGARÍTMICAS	59
4.2	FUNÇÕES EXPONENCIAIS	70
5	DEFINIÇÃO DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA ATRAVÉS DO CONCEITO DE ÁREA DE UMA FAIXA DE HIPÉRBOLE	72
5.1	HIPÉRBOLE	72
5.2	ÁREA DE UMA FAIXA DE HIPÉRBOLE	76
5.3	CARACTERIZAÇÃO GEOMÉTRICA DOS LOGARITMOS	83
5.3.1	Logaritmo Natural	89
5.3.2	A base dos Logaritmos Naturais	90
5.4	FUNÇÃO EXPONENCIAL	95
5.5	MUDANÇA DE BASE	98
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	101
6.1	O QUE LEVO DESTA TRABALHO?	102
6.2	SUGESTÕES DE APLICAÇÕES EM SALA DE AULA	102
6.3	EXPECTATIVAS PARA TRABALHOS FUTUROS E APROFUNDAMENTO	105
	REFERÊNCIAS	106
	Apêndice A – CONSTRUÇÃO DA REPRESENTAÇÃO DECIMAL DE UM NÚMERO REAL	107

1 INTRODUÇÃO

Ensinar Matemática tem sido um desafio para os professores ao longo de décadas, grande parte desse desafio consiste na dificuldade de apresentar a Matemática como algo interessante e estimulante aos alunos, contextualizando-a e fazendo com que os estudantes vejam na Matemática uma ferramenta da qual possam fazer uso para solucionar problemas do dia a dia.

Um dos conteúdos em que os alunos apresentam grandes dificuldades é Funções, mesmo tendo esta parte da Matemática grande aplicabilidade na vida cotidiana e na ciência. Estudaremos em especial as Funções Logarítmicas e Exponenciais, pois estas tem sido deixadas de lado pelos professores, as vezes por não haver tempo hábil durante o ano letivo para trabalhá-las, outras vezes por serem funções com as quais os estudantes geralmente apresentam dificuldades.

Esta pesquisa será norteadada pela busca de responder à questão: tendo as Funções Logarítmicas e Exponenciais grande aplicabilidade em diversas áreas da ciência e em situações do cotidiano, poderíamos defini-las de diferentes maneiras de forma a facilitar a compreensão das mesmas?

De maneira geral, caracterizamos este trabalho como de caráter bibliográfico, uma vez que foi desenvolvido através do estudo de livros, artigos, teses, dissertações, periódicos e outros materiais sobre Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas. A pesquisa é uma pesquisa teórica, pois foi construída através de estudos dos materiais existentes. Este trabalho caracteriza-se principalmente como uma revisão da literatura existente acerca do tema sendo que na elaboração e construção desta pesquisa inicialmente realizamos um estudo da literatura da teoria de Funções Exponenciais e Logarítmicas, definição e diferentes formas de defini-las, conceituação, demonstrações de propriedades, proposições e teoremas e ao final realizamos uma análise do trabalho, abrindo sugestões para futuros trabalhos.

1.1 QUAIS OS OBJETIVOS DESTE TRABALHO?

1.1.1 OBJETIVO GERAL

Explorar as Funções Exponenciais e Logarítmicas do ponto de vista do professor do Ensino Básico, principalmente do Ensino Médio, visando aprofundar-se na construção dos conceitos matemáticos, definindo-as de diferentes formas.

1.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Resgatar/Revisar as definições de potenciação com expoente natural, inteiro, racional, irracional;
- Definir a Função Logarítmica através de duas propriedades, e caracterizá-las, definindo ainda a Função Exponencial como a sua inversa;
- Definir Função Logarítmica geometricamente, caracterizá-la e definir a Função Exponencial como a sua inversa;
- Construir argumentos matemáticos que permitam definir potenciação com expoente irracional;

1.2 COMO ESTE TRABALHO ESTÁ ESTRUTURADO?

Baseamos o estudo dos conceitos matemáticos deste trabalho em duas obras: “Logaritmos” e “Números e Funções Reais”, ambas do autor Elon Lages de Lima, publicadas pela Sociedade Brasileira de Matemática. Procuramos aqui aprofundar e detalhar as definições, propriedades, teoremas e suas demonstrações.

Neste primeiro momento, a introdução, apresentamos ao leitor nossas motivações para a realização da pesquisa, nossos objetivos e os motivos pelos quais julgamos que nosso trabalho é válido.

No Capítulo 2, abordamos os conceitos básicos da potenciação da forma que estamos habituados a trabalhar e transmitir aos nossos alunos desde o Ensino Fundamental, seja com expoente natural, inteiro ou racional, apresentamos argumentos, como a continuidade, para justificarmos e construirmos a existência de potências em que o expoente é um número irracional. Também damos início ao estudo das Funções Exponenciais da forma que tradicionalmente estamos acostumados a tratá-las. Definimos ainda o Logaritmo (Função Logarítmica) como “o

inverso da potenciação”.

No Capítulo 3, caracterizamos as Funções Exponenciais através de duas propriedades, ou seja, como sendo uma função que leva somas em produtos, e uma função que é monótona (crescente ou decrescente). Definimos então a Função Logarítmica como a função inversa da Função Exponencial.

No Capítulo 4, fazemos o processo inverso do que fizemos no capítulo anterior. Inicialmente definimos as Funções Logarítmicas através como sendo funções que possuem duas propriedades que as caracterizam: a primeira é a função ser estritamente crescente e a segunda esta função levar produtos em somas. Definimos então a Função Exponencial como a função inversa da Função Logarítmica.

No Capítulo 5, estabelecemos o número e , o Logaritmo Natural e a Função Exponencial de base e geometricamente através da área de uma faixa de hipérbole, tornando assim as demonstrações mais intuitivas e simples. Definindo geometricamente a Função Logarítmica Natural mostramos é simples realizarmos as mudanças de um sistema de Logaritmos para outro de base diferente.

Em paralelo ao trabalho com as Funções Exponenciais e Logarítmicas, resgatamos conceitos de Monotonicidade de Funções, Progressões Aritméticas, Progressões Geométricas, Limites de Sequências, Limites de Funções, Função Inversa, entre outros.

Finalizamos o trabalho apresentando nossas considerações finais, nossa avaliação do trabalho realizado e sugestões de como podemos futuramente darmos prosseguimento à esta pesquisa.

1.3 POR QUE REALIZAR ESTE TRABALHO?

Desde que era aluna na Educação Básica, vi meus colegas dizerem que a Matemática é uma matéria difícil. Já durante a graduação e nos meus poucos anos de trabalho como professora, vejo a Matemática ser posta como a “causa” de grande parte das reprovações, muitos alunos me dizem que não veem utilidade para ela, é comum que ouvir dos alunos perguntas do tipo “Onde eu vou usar isso?” ou “Para que isso serve?”, ao mesmo tempo que é também comum ouvir dos meus colegas professores que os alunos são desinteressados, desmotivados e não estudam.

Entre os vários conteúdos estudados no Ensino Básico na disciplina de Matemática, um em que os alunos apresentam dificuldade são as Funções, em especial e objeto deste estudo,

as Funções Exponenciais e Logarítmicas.

O interesse em desenvolver esta pesquisa surgiu da observação pessoal das dificuldades encontradas pelos alunos no estudo de Funções Exponenciais e Logarítmicas, e da pouca atenção dada ao assunto por alguns autores dos livros didáticos adotados no Ensino Médio, que dedicam poucas páginas de seus livros para desenvolver este que é um dos conteúdos matemáticos do Ensino Básico com grande aplicabilidade em outras áreas do conhecimento ou ainda, o fazem sem motivação e sem contextualização adequadas, como observado e explorado por Oliveira (2014).

Outro fator que levou ao interesse por realizar um estudo aprofundado das Funções Exponenciais e Logarítmicas, e possivelmente o mais forte, é o gosto pessoal por estas funções, e o interesse em explorá-las e compreendê-las mais profundamente.

O estudo das Funções Exponenciais, bem como as Funções Logarítmicas (por serem funções inversas), permite que o aluno domine conceitos e possa aplicá-los aos acontecimentos diários, o que lhe dará a possibilidade de compreender diversos cálculos, como por exemplo os juros que pagará por um produto comprado a prazo, os rendimentos de um dinheiro aplicado a poupança, entre outros.

A construção dos primeiros conceitos das Funções Exponenciais começam ainda no Ensino Fundamental, quando no 6º ano os estudantes tem seu primeiro contato com as potências de base natural e expoente natural e suas propriedades operatórias. Já nesta etapa de ensino, boa parte dos alunos apresenta alguma dificuldade com os conceitos matemáticos envolvidos, como o significado do expoente e com a utilização das suas propriedades operatórias.

Ainda no decorrer dos anos finais do Ensino Fundamental são estudadas também as potências com bases inteiras e racionais, e com expoentes negativos e racionais.

Nesta fase é importante que o professor busque sanar as dificuldades dos alunos com a potenciação e, conseqüentemente, a radiciação, visto que se estes conceitos não estiverem bem formados é provável que o aluno sinta dificuldade quando tiver de associá-los a outros conhecimentos no Ensino Médio.

É ainda no final do Ensino Fundamental que os estudantes tem os primeiros contatos com o conceito de Funções. De acordo com as Diretrizes Curriculares para o Ensino Básico do Estado do Paraná,

No Ensino Fundamental, na abordagem do Conteúdo Estruturante Funções, é necessário que o aluno elabore o conhecimento da relação de dependência entre duas grandezas. É preciso que compreenda a estreita relação das funções com a Álgebra, o que permite a solução de problemas que envolvem números

não conhecidos. (PARANA, 2008, p.59)

Ao adentrar no Ensino Médio, os estudantes inicialmente estudam de maneira mais profunda e ampla os Números Reais e as Funções. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), o ensino de Matemática nesta etapa da educação básica (Ensino Médio) deve preparar o aluno para viver em sociedade, adequando o conhecimento científico adquirido no decorrer dos anos escolares às situações do cotidiano, adequando os conhecimentos adquiridos às necessidades sociais, culturais e profissionais, pois muitas áreas requerem alguma competência em Matemática, e o domínio dos conceitos e procedimentos matemáticos necessários em cada situação permitem que o cidadão tome suas decisões prudentemente tanto em sua vida pessoal quanto na vida profissional (BRASIL, 2002).

Seguindo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006), o estudo de Funções deve ser baseado na relação entre grandezas, como por exemplo, altura e idade, tempo e distância percorrida, área de um círculo e o tamanho do raio, entre outras, instigando os alunos a apresentarem outras relações com as quais tem contato frequentemente (BRASIL, 2006).

Um tipo de função específico em que os estudantes apresentam dificuldades de compreensão e de aprendizagem é a Função Exponencial e conseqüentemente sua inversa, a Função Logarítmica, pois, para muitos alunos, a aplicabilidade de tais funções não é clara, em outras palavras, parece que essas funções não tem aplicação real.

A área de aplicação das Funções Exponenciais é muito vasta, por isso é necessário que o professor busque contextualizar esses conceitos através de exemplos práticos, buscando instigar a curiosidade do aluno, despertando-o para a construção do conhecimento. Mas de nada adianta um conteúdo bem contextualizado se o estudante não compreender os conceitos matemáticos envolvidos.

Situações reais de crescimento populacional podem bem ilustrar o modelo exponencial. Dentre as aplicações da Matemática, tem-se o interessante tópico de Matemática Financeira como um assunto a ser tratado quando do estudo da função exponencial - juros e correção monetária fazem uso desse modelo. Nos problemas de aplicação em geral, é preciso resolver uma equação exponencial, e isso pede o uso da função inversa: a função logaritmo. O trabalho de resolver equações exponenciais é pertinente quando associado a algum problema de aplicação em outras áreas de conhecimento, como Química, Biologia, Matemática Financeira, etc. Procedimentos de resolução de equações sem que haja um propósito maior devem ser evitados. Não se recomenda neste nível de ensino um estudo exaustivo dos logaritmos. As progressões aritmética e geométrica podem ser definidas como, respectivamente, funções afim e exponencial, em que o domínio é o conjunto dos números naturais. Não devem ser tratadas como um tópico independente, em que o aluno não as reconhece como funções já estudadas. Devem-se evitar as exaustivas coletâneas de cálculos

que fazem simples uso de fórmulas (“determine a soma...”, “calcule o quinto termo...”). (BRASIL, 2006, p.74-75)

A construção da compreensão das Funções Exponenciais, como já dito anteriormente, começa no Ensino Fundamental, sendo então no Ensino Médio estendido à potências com base real e expoente real.

O ensino de potências cujo expoente é um número natural, inteiro e até racional no Ensino Básico é relativamente simples. O problema surge quando queremos ensinar o que é uma potência cujo o expoente é um número irracional. Como vamos justificar, por exemplo, o fato do gráfico de Função Exponencial $y = a^x$ ser uma curva sem nenhum “buraco” quando x assumir um valor irracional. (ALVES, 2014, p.13).

Alves (2014) ainda observa que é importante construir com o estudante um estudo tanto da base a quanto do expoente x para garantir a existência da Função Exponencial e que esta por sua vez esteja bem definida e seja possível estudar e demonstrar todas as suas propriedades. Destaca ainda que a Função Exponencial possui uma característica que a destaca das demais funções, que é o seu crescimento muito rápido, e que isto precisa ser trabalhado de maneira explícita para que o aluno a perceba, sendo que este trabalho pode ser feito através de gráficos e tabelas de comparação.

Quando falamos de Função Exponencial é comum que se trate também dos Logaritmos, e da Função Logarítmica pois esta é a função inversa da primeira.

Historicamente, os Logaritmos surgiram da necessidade de facilitar operações de potenciação, multiplicação, radiciação e divisão, pois foram desenvolvidos em uma época em que não existiam calculadoras e que com o advento das navegações e da Astronomia, no século XVI, os cálculos tornavam-se cada vez mais longos e cansativos (OLIVEIRA, 2014).

A grande vantagem dos Logaritmos é que eles transformam potências em produtos, produtos em somas, divisões em subtrações, o que facilita, em muito, os cálculos sem o auxílio de equipamentos eletrônicos. Mas, “com o surgimento das calculadoras, o uso das tábuas logarítmicas perdeu a sua utilidade, porém a função logarítmica continua extremamente importante na Matemática e em suas aplicações” (OLIVEIRA, 2014, p.55).

Entretanto, a importância das Funções Logarítmicas não deixa de existir, pois além de serem as funções inversas das Funções Exponenciais, estão associadas a diversos fenômenos e situações da natureza, como nas medidas de intensidades de terremotos (a escala Richter) e as medidas do som em decibéis, mas, ainda segundo Oliveira (2014), essas situações não são bem aproveitadas pelos autores de livros didáticos.

Não encontramos nos livros didáticos analisados problemas contextualizados que utilizassem estas propriedades pra modelá-los. A grande maioria dos problemas são modelados pela função exponencial e, em seguida, são utilizadas as propriedades dos logaritmos como função inversa da exponencial para solucioná-los. Os problemas relacionados à escala Richter, o Ph de substâncias, a medida da intensidade do som em decibéis, por exemplo, que utilizam Função Logarítmica para modelá-los, já vêm com a equação “montada”, ou seja, são situações contextualizadas que envolvem apenas manipulação. (OLIVEIRA, 2014, p.64)

As Funções Exponenciais e Logarítmicas modelam vários problemas diretamente ligados ao cotidiano dos alunos e professores. Não precisamos pensar em problemas isolados da natureza, ou em resfriamento de corpos, entre outros, basta lembrar que atualmente praticamente toda Matemática Financeira é modelada com estas funções. É cada vez mais comum que em algum momento de suas vidas as pessoas tomem empréstimos pessoais, façam compras a prazo pagando juros, financiem bens e até mesmo seus estudos. Neste ponto, é papel da Matemática, fornecer as ferramentas necessárias para que as pessoas possam analisar quais são as suas melhores opções e assim não serem lesadas.

Ao contrário do que muitos pensam, a Matemática não é uma ciência fria e pronta, em que nada pode ser mudado ou melhorado. Novos problemas e desafios estão sempre surgindo e precisam ser modelados e estudados, o que exige que a Matemática esteja em constante ampliação, com a criação de novos conceitos e teorias, e a melhoria de teorias já existentes.

De outro lado, em um mundo em constante evolução tecnológica, em que as máquinas são capazes de entregar cálculos complexos e trabalhosos prontos em segundos, o ensino de Matemática na Educação Básica, tem desafiado os professores todos os dias a buscarem alternativas de contextualizar os conteúdos a serem ensinados, mostrando seus significados, aplicações e importância.

Existe hoje uma grande gama de materiais para trabalhar de forma diferenciada com o Ensino da Matemática, e mesmo assim alguns conteúdos tem sido deixados de lado, sendo apenas superficialmente ensinados ou então simplesmente deixados para trás, seja pela grande quantidade de conteúdos a serem trabalhados no decorrer do ano letivo, seja pela redução de carga horária da disciplina ou pela falta de preparo dos professores.

As Funções Exponenciais, e ainda mais as Logarítmicas, são duas funções que tem sido “esquecidas” durante o Ensino Médio, mesmo quando se fala de que é necessário contextualizar e aplicar o que se ensina, visto que essas funções podem ser usadas para modelar problemas reais de diversas áreas do conhecimento e despertar o interesse do aluno. Elas tem sido tão esquecidas que os livros didáticos usam de poucas páginas para abordá-las e muitos professores

sentem-se inseguros para abordá-las sem o “apoio” do livro.

Pretendemos, ao final do trabalho, possibilitar que os professores de Matemática tenham acesso a esta pesquisa e façam uso dela para aprofundar seus conhecimentos, com os conceitos matemáticos por trás das Funções Exponenciais e das Funções Logarítmicas, e também as demonstrações e justificativas das propriedades dessas funções, e esperamos que assim possamos contribuir para a melhoria do processo de Ensino e Aprendizagem da Matemática no Ensino Básico.

2 DEFINIÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL COMO GENERALIZAÇÃO DA POTENCIAÇÃO

Neste capítulo vamos relembrar conceitos referentes à potenciação e suas propriedades que ensinamos aos nossos alunos desde o 6º ano do Ensino Fundamental, buscando justificar essas propriedades de modo a construir a base de conceitos necessários para o estudo posterior das Funções Exponenciais e Logarítmicas.

Nos basearemos aqui principalmente na obra “Logaritmos” de Elon Lages de Lima, e no livro “Números e Funções Reais” também do autor Elon Lages de Lima, buscando explorar mais profundamente definições, propriedades, teoremas e exemplos, permitindo ao leitor uma melhor compreensão do estudo das Funções Exponenciais e conseqüentemente das Funções Logarítmicas.

2.1 PRIMEIRAS PROPRIEDADES

Inicialmente, resgataremos a definição de seqüência de números reais. Estas seqüências serão utilizadas neste texto. Conforme LIMA(2008, p. 100-101):

Definição 2.1 (Seqüência de Números Reais). *Uma seqüência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definida no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ dos números naturais e tomando valores no conjunto \mathbb{R} dos números reais. O valor $x(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, será representado por x_n e chamado o termo de ordem n ou n -ésimo termo da seqüência.*

Escrevemos $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$, ou $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou simplesmente (x_n) para representar a seqüência x .

Também usaremos os conceitos de progressões. Lembrando que:

Definição 2.2 (Progressão Aritmética Infinita). *Dada uma seqüência de números reais*

$$(x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots),$$

dizemos que esta é uma Progressão Aritmética Infinita (PA) se existir r real tal que $x_n - x_{n-1} = r$

para todo natural $n > 1$. Ou seja:

$$x_2 = x_1 + r; \quad x_3 = x_2 + r; \quad \dots \quad x_n = x_{n-1} + r.$$

Definição 2.3 (Progressão Geométrica Infinita). *Dada uma sequência de números reais*

$$(x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots),$$

dizemos que esta é uma Progressão Geométrica Infinita (PG) se existir $q \neq 0$ real tal que $x_n = x_{n-1} \cdot q$ para todo $n > 1$. Ou seja:

$$x_2 = x_1 \cdot q; \quad x_3 = x_2 \cdot q; \quad \dots \quad x_n = x_{n-1} \cdot q.$$

Vejamos que é possível reduzir uma multiplicação à uma soma comparando uma Progressão Aritmética e uma Progressão Geométrica, como no exemplo:

Exemplo 2.4. *Seja a Progressão Geométrica com primeiro termo $x_1 = 2$ de razão $q = 2$ e os primeiros 10 termos, ou seja,*

$$PG : (2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024).$$

Consideremos também, a Progressão Aritmética com primeiro termo $x_1 = 1$, razão $r = 1$ e 10 primeiros termos, ou seja,

$$PA : (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10).$$

Vamos escrevê-las em linhas com os termos de mesma posição alinhados para facilitar a compreensão:

Termo	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
PG	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
PA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Se quiséssemos multiplicar dois termos da PG, como por exemplo, $a_3 = 8 = 2 \cdot 2^2 = 2^3$ e $a_7 = 128 = 2 \cdot 2^6 = 2^7$, bastaria que somássemos seus correspondentes na PA, no caso os termos $a_3 = 3$ e $a_7 = 7$, com $3 + 7 = 10$ e ver qual é o termo da PG que corresponde ao 10º termo da PA, no caso 1024, ou seja: $8 \cdot 128 = 1024$.

O processo que descrevemos acima para multiplicar dois termos de uma PG é a conhecida regra de multiplicação de potências de mesma base, ou seja, para multiplicarmos duas potências com bases iguais, conservamos a base e somamos os expoentes, e assim reduzimos o

cálculo a uma única potência, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, no exemplo acima, queríamos multiplicar $8 = 2^3$ por $128 = 2^7$, e vimos que bastava fazer $2^{10} = 2^{3+7}$.

Lima (2013a), diz que é importante salientar que essa redução da multiplicação à uma soma foi desenvolvida muito antes que existisse a notação de expoente para indicar multiplicações com fatores repetidos, pois os Logaritmos foram inventados antes da notação exponencial. De qualquer maneira, a regra da multiplicação de potências de mesma base é baseada em uma tábua de logaritmos de base a bem rudimentar:

Potência	Expoente
a	1
a^2	2
a^3	3
a^4	4
...	...
a^n	n

É claro que as potências a , a^2 , ..., a^n deverão estar devidamente calculadas. Contudo observamos que esta tábua é muito rudimentar, pois só nos permite calcular produtos em que o expoente n é natural.

Como diz Lima (2013a):

Acontece que, uma vez difundida a notação exponencial da forma a^n , não tardou muito a ideia de se considerarem potências com expoentes negativos e fracionários, e a constatação de que, se a é um número positivo diferente de 1, então todo número real pode ser arbitrariamente aproximado por potências de a com expoentes racionais. Esta observação conduz a possibilidade de elaborar uma tábua de logaritmos de base a que contenha, em sua coluna esquerda, números bastante próximos daquelas que pretendemos multiplicar. (LIMA, 2013a, p.8)

Vamos agora nos concentrar na revisão do conceito de potência de um número real qualquer. Começaremos com expoentes naturais e passaremos aos expoentes racionais.

Definição 2.5 (Potenciação). *Seja a um número real positivo. Dado um inteiro $n > 0$, a potência a^n é definida como o produto de n fatores iguais ao número a . Ou seja:*

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-fatores}}$$

Vale a propriedade fundamental:

Propriedade 2.6 (Propriedade Fundamental da Potenciação). *Seja a um número real positivo, e m e n números inteiros positivos, é verdade que:*

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Uma justificativa simples para a validade da propriedade decorre imediatamente da Definição 2.5, pois, veja que:

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m\text{-fatores}}.$$

Do mesmo modo que:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-fatores}}.$$

E assim, tem-se que:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m\text{-fatores}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n\text{-fatores}}.$$

Observe que ao eliminarmos os parenteses temos uma multiplicação com $m+n$ fatores iguais a a , ou seja:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{(m+n)\text{fatores}} = a^{m+n}.$$

Uma demonstração mais elaborada desta propriedade se dá usando o Primeiro Princípio de Indução, enunciado à seguir:

Definição 2.7 (Primeiro Princípio de Indução). *Seja n um número natural, e seja $P(n)$ uma propriedade relativa a n . Suponhamos que:*

- i) $P(1)$ é verdadeira;*
- ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ verdadeira implica em $P(n+1)$ verdadeira.*

Então $P(n)$ é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Para demonstrar a Propriedade 2.6 usando o Primeiro Princípio de Indução Finita, façamos variar n , fixado m natural. Veja então que:

- i) $P(1)$ é verdadeira, ou seja, a Propriedade é válida para $n = 1$, pois,*

$$a^m \cdot a^1 = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m\text{-fatores}} \cdot a = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{(m+1)\text{fatores}} = a^{m+1}.$$

- ii) Suponha que a Propriedade é verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, ou seja, $a^m \cdot a^n =$*

a^{m+n} , mostraremos que é válida também para $n + 1$. De fato, veja que, $a^{n+1} = a^n \cdot a^1$ pois $P(1)$ é verdadeira. E assim:

$$a^m \cdot a^{n+1} = a^m \cdot (a^n \cdot a^1) = a^m \cdot a^n \cdot a^1 = (a^m \cdot a^n) \cdot a^1$$

Como, por hipótese, $P(n)$ é verdadeira, temos então que:

$$a^m \cdot a^{n+1} = (a^m \cdot a^n) \cdot a^1 = a^{m+n} \cdot a^1.$$

Novamente, como $P(1)$ é verdadeira, concluímos que:

$$a^m \cdot a^{n+1} = a^{m+n+1}$$

Logo, $P(n + 1)$ é verdadeira. Portanto, pelo Primeiro Princípio de Indução, a Propriedade 2.6 é verdadeira para todo número natural n , fixado m .

O caso em que fixamos n e fazemos variar m é análogo, demonstrando a propriedade. ■

É claro que a propriedade Fundamental é válida para o produto de várias potências de mesma base, como exemplo:

$$a^{n_1} \cdot a^{n_2} \cdot a^{n_3} = a^{n_1+n_2} \cdot a^{n_3} = a^{(n_1+n_2)+n_3} = a^{n_1+n_2+n_3}.$$

Disso podemos concluir ainda que ao calcularmos um produto de p fatores iguais a a^n vale:

$$(a^n)^p = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot a^n \cdot \dots \cdot a^n}_{p\text{-fatores}} = a^{\overbrace{n+n+n+\dots+n}^{p\text{-parcelas}}} = a^{p \cdot n}.$$

Definimos ainda $a^0 = 1$ com a intenção de que a Propriedade 2.6 continue válida. Lembre que $m = m + 0$ para qualquer m natural, logo:

$$a^m = a^{m+0} = a^m \cdot a^0 \Rightarrow a^0 = 1.$$

De maneira semelhante, ao definirmos potências com expoentes inteiros negativos,

buscamos que a Propriedade 2.6 continue válida, logo devemos ter:

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1 \Rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Lema 2.8. *Seja $a > 1$ um número real e n um inteiro, temos que $a^n > 1$ se, e somente se, $n > 0$.*

Demonstração: (\Leftarrow) Primeiramente, mostraremos que $n > 0 \Rightarrow a^n > 1$, por indução sobre n . (i) Se $n = 1$ a implicação é verdadeira, pois $a^1 = a > 1$ por hipótese. (ii) Suponhamos que a afirmação é verdadeira para algum inteiro positivo $n = k$, isto é, $a^k > 1$ (H.I.), e provemos que a implicação é verdadeira para $n = k + 1$. De fato, como $a > 1$:

$$a > 1 \Rightarrow a \cdot a^k > 1 \cdot a^k \Rightarrow a^{k+1} > a^k \stackrel{(H.I.)}{>} 1,$$

logo a implicação é verdadeira para $n = k + 1$ e portanto, é verdadeira para todo inteiro $n > 0$ pelo Primeiro Princípio de Indução.

(\Rightarrow) Provemos, por redução ao absurdo, que se $a^n > 1 \Rightarrow n > 0$. Supondo que $n \leq 0$, temos $-n \geq 0$. Note que se $n = 0 \Rightarrow a^n = a^0 = 1$. E pela primeira parte da demonstração, se $-n > 0$, então, $a^{-n} > 1$, portanto:

$$-n \geq 0 \Rightarrow a^{-n} \geq 1,$$

multiplicando ambos os lados da última desigualdade por a^n que é positivo, obtemos:

$$a^{-n} \geq 1 \Rightarrow a^n \cdot a^{-n} \geq a^n \cdot 1 \Rightarrow a^0 = 1 \geq a^n,$$

o que é um absurdo, visto que contraria a hipótese $a^n > 1$. Portanto devemos ter $n > 0$. ■

Outra regra importante a ser lembrada é que dado um número real $a > 0$ e um inteiro positivo n , a notação $\sqrt[n]{a}$ representa a única raiz positiva da equação $x^n - a = 0$ ou ainda, o número positivo cuja n -ésima potência é igual a a , o que nos dá:

$$\sqrt[n]{a} > 0;$$

e

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Deste último fato decorre que, sendo n natural e a, b reais positivos, temos $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

De fato, seja $x = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ temos daí que

$$x^n = \left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \right)^n = \underbrace{\left(\sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a} \right)}_{n\text{-fatores}} \cdot \underbrace{\left(\sqrt[n]{b} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{b} \right)}_{n\text{-fatores}} = \left(\sqrt[n]{a} \right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b} \right)^n = a \cdot b,$$

e assim,

$$x^n = a \cdot b \Rightarrow x^n - a \cdot b = 0,$$

deste modo, x é a única raiz positiva da equação $x^n - a \cdot b = 0$, ou seja, $x = \sqrt[n]{a \cdot b}$. Portanto, $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Até aqui trabalhamos com potências cujos expoentes são números naturais ou inteiros. Para estender as propriedades anteriores à potências com expoente racional $r = \frac{p}{q}$ com p inteiro e q natural, precisamos definir $a^{\frac{p}{q}}$ de modo a termos um número real positivo que cumpra:

$$\left(a^{\frac{p}{q}} \right)^q = a^{\left(\frac{p}{q} \right) \cdot q} = a^p.$$

E assim, $a^{\frac{p}{q}}$ pode ser o número real positivo cuja q -ésima potência é igual a a^p , o que é o mesmo que afirmar que:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Deste modo, agora a^r está agora definida para todo número real a positivo e todo expoente r racional (definimos para expoentes naturais, estendemos para os expoentes nulo, inteiro negativo e racional), e, mesmo para expoentes fracionários $r = \frac{p}{q}$ e $s = \frac{u}{v}$ vale a Propriedade Fundamental enunciada anteriormente:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}.$$

De fato, como sabemos:

$$a^r = \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{pv}{qv}} = \sqrt[qv]{a^{pv}},$$

e também:

$$a^s = \sqrt[v]{a^u} = a^{\frac{u}{v}} = a^{\frac{qu}{qv}} = \sqrt[qv]{a^{qu}}.$$

E assim:

$$a^r \cdot a^s = \sqrt[qv]{a^{pv}} \cdot \sqrt[qv]{a^{qu}} \stackrel{(*)}{=} \sqrt[qv]{a^{pv} \cdot a^{qu}} \stackrel{(**)}{=} \sqrt[qv]{a^{pv+qu}} = a^{\frac{pv+qu}{qv}}.$$

Isso nos leva a concluir que:

$$a^r \cdot a^s = a^{\frac{pv+uq}{qv}}.$$

Como $r + s = \frac{p}{q} + \frac{u}{v} = \frac{pv+uq}{qv}$ temos então que $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

Acima, a igualdade (*) vem de que $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ como já mostramos, e a igualdade (**) é válida pois pv e qu são inteiros para os quais vale a Propriedade Fundamental da Potenciação.

Lema 2.9. *Seja a um número real, $a > 1$ e $r \in \mathbb{Q}$, temos: $a^r > 1 \Leftrightarrow r > 0$*

Demonstração: (\Leftarrow) Mostraremos inicialmente, se $a > 1$ é um número real e que se $r > 0$ é um racional, então, $a^r > 1$.

Seja $r = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{N}$, então $a^r = a^{\frac{p}{q}}$.

Como, pelo Lema 2.8, $a = (\sqrt[q]{a})^q > 1$ e $q \in \mathbb{N}$, então $\sqrt[q]{a} > 1$.

Ainda do Lema 2.8, se $\sqrt[q]{a} > 1$ e $p > 0$ inteiro, então $(\sqrt[q]{a})^p > 1$, mas:

$$(\sqrt[q]{a})^p = (a^{\frac{1}{q}})^p = \underbrace{a^{\frac{1}{q}} \cdot \dots \cdot a^{\frac{1}{q}}}_{p\text{-fatores}} = a^{\overbrace{\left(\frac{1}{q} + \dots + \frac{1}{q}\right)}^{p\text{-parcelas}}} = a^{p \cdot \left(\frac{1}{q}\right)} = a^{\frac{p}{q}} = a^r.$$

Portanto, $a^r = (\sqrt[q]{a})^p > 1$, como queríamos.

(\Rightarrow) Agora mostraremos que $a^r > 1 \Rightarrow r > 0$.

Seja $r = \frac{p}{q}$ com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, então: $a^r = a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$.

Como $q > 0$ pois é natural, mostramos na primeira parte da demonstração que $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a} > 1$, temos, pelo Lema 2.8 temos que $a^{\frac{1}{q}} > 1$, e $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p > 1$ então $p > 0$, e assim, $q > 0$ e $p > 0$ nos dá $r = \frac{p}{q} > 0$.

Portanto, $a^r > 1 \Leftrightarrow r > 0$. ■

Propriedade 2.10. *Se $a > 1$ real e r e s racionais, tem-se: $a^r > a^s \Leftrightarrow r > s$.*

Demonstração: Esta demonstração é bem simples e decorre do Lema 2.9.

$$a^r > a^s \Leftrightarrow a^r \cdot a^{-s} > a^s \cdot a^{-s} \Leftrightarrow a^{r-s} > a^0 \Leftrightarrow a^{r-s} > 1 \stackrel{\text{Lema 2.9}}{\Leftrightarrow} r-s > 0 \Leftrightarrow r > s$$
■

2.2 EXPOENTES IRRACIONAIS

Cabe ressaltar que até este momento só podemos tratar de potências com expoente racional, uma vez que ainda não as definimos para expoentes irracionais. Vejamos a seguir um exemplo de como podemos trabalhar com expoentes irracionais. Faremos isso utilizando uma sequência de números racionais que se aproximam de um irracional dado, essa sequência está de acordo com a Definição 2.1. Lembremos ainda alguns pontos importantes sobre sequências:

- Dizemos que (x_n) é *limitada*, se existirem valores reais $a < b$ tais que todos os termos da sequência pertencem ao intervalo $[a, b]$, ou seja, $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- A sequência (x_n) pode ser limitada apenas superiormente, isto ocorre quando existe um real b tal que $x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Analogamente, (x_n) é limitada inferiormente quando existe um real a tal que $x_n \geq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Uma sequência (x_n) é dita *não decrescente*, quando $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Da mesma forma, (x_n) é *não crescente* se $x_n \geq x_{n+1}$ para todo natural n . Uma sequência (x_n) não decrescente (não crescente) é dita também **monótona**.

Definição 2.11 (Limite de Sequências). *Dizemos que o número real L é limite de uma sequência (x_n) , quando para todo real $\varepsilon > 0$ dado, existe um natural n_0 tal que se $n > n_0$ temos $|x_n - L| < \varepsilon$. Denotamos por:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L.$$

*Para indicar que o limite de uma sequência (x_n) é L podemos usar simplesmente $(x_n) \rightarrow L$. Quando o limite de uma sequência (x_n) existe, dizemos que (x_n) é **convergente**.*

Para compreender o que faremos adiante, vamos introduzir o processo com um exemplo. Lembremos que sempre que precisamos realizar cálculos com números irracionais, como estes números não possuem representação decimal finita e nem podem ser expressos na forma de fração, é comum que aproximemos os números irracionais por números racionais (por falta ou excesso) com uma precisão de n casas decimais exatas, conforme a necessidade.

Exemplo 2.12. *Sabemos que $\sqrt{2}$ é um número irracional. Pensemos no que significaria calcular $10^{\sqrt{2}}$. Intuitivamente, aproximando, por falta¹, $\sqrt{2}$ por números racionais com erros cada*

¹Isto significa que a aproximação de $\sqrt{2}$ aqui será feita por números racionais **menores** que $\sqrt{2}$. Caso fizéssemos a aproximação por números racionais maiores que $\sqrt{2}$, diríamos que a aproximação é por excesso.

vez menores, utilizando uma planilha eletrônica², da seguinte maneira:

Aproximação de $\sqrt{2}$	Potência	Resultado Aproximado
1,4	$10^{1,4}$	25,11886432
1,41	$10^{1,41}$	25,70395783
1,414	$10^{1,414}$	25,94179362
1,4142	$10^{1,4142}$	25,95374301
1,41421	$10^{1,41421}$	25,95434062
1,414213	$10^{1,414213}$	25,95451991
1,4142135	$10^{1,4142135}$	25,95454979
1,41421356	$10^{1,41421356}$	25,95455338
1,414213562	$10^{1,414213562}$	25,95455350
1,4142135623	$10^{1,4142135623}$	25,95455352
1,41421356237	$10^{1,41421356237}$	25,95455352
⋮	⋮	⋮

Vejamos que conforme aumentamos o número de casas decimais exatas na aproximação de $\sqrt{2}$ e calculamos a potência os valores obtidos parecem se aproximar de um mesmo valor, tendo nas 4 últimas aproximações realizadas, praticamente se estabilizado em torno de 25,95455352. Poderíamos dizer então que este é o valor aproximado da potência $10^{\sqrt{2}}$, caso esta potência exista?

Para ficar mais claro o que queremos fazer, vamos considerar uma sequência infinita (s_n) , em que cada termo s_n é uma aproximação, por falta, do número irracional $\sqrt{2}$, com n casas decimais exatas³, sendo que:

- O primeiro termo da sequência, $s_1 = 1,4$, é a aproximação de $\sqrt{2}$ com uma casa decimal exata;
- O segundo termo, $s_2 = 1,41$ é a aproximação de $\sqrt{2}$ com duas casas decimais exatas;
- O terceiro termo, $s_3 = 1,414$ é a aproximação de $\sqrt{2}$ com três casas decimais exatas;
- O quarto termo, $s_4 = 1,4142$ é a aproximação de $\sqrt{2}$ com quatro casas decimais exatas;
- O quinto termo, $s_5 = 1,41421$ é a aproximação de $\sqrt{2}$ com cinco casas decimais exatas;

²Para estes cálculos usamos uma planilha do Microsoft Excel 2010, apresentando o resultado com 8 casas decimais com aproximação.

³Dizer que s_n é uma aproximação de $\sqrt{2}$ com n casas decimais **exatas** significa dizer que o erro de aproximação é menor que $\frac{1}{10^n}$, ou seja, que $\sqrt{2} - s_n < \frac{1}{10^n}$.

- O sexto termo, $s_6 = 1,414213$ é a aproximação de $\sqrt{2}$ com seis casas decimais exatas;

E assim sucessivamente, ou seja, os números da primeira coluna da tabela acima. Deste modo, a sequência (s_n) será:

$$(s_n) = (1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; 1,414213; 1,4142135; 1,41421356; \dots).$$

Vejamos que a medida que n cresce, o número de casas decimais de s_n também aumenta, e o valor de s_n fica cada vez mais próximo de $\sqrt{2}$.

Lembrando a definição de limites de sequências, podemos então dizer que no nosso exemplo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sqrt{2}.$$

Considerando agora, como exemplo, $a = 10$, definimos uma nova sequência (r_n) em que cada termo r_n é dado por $r_n = 10^{s_n}$, e obtemos as potências da segunda coluna da tabela acima:

$$(r_n) = (10^{1,4}; 10^{1,41}; 10^{1,414}; 10^{1,4142}; 10^{1,41421}; 10^{1,414213}; 10^{1,4142135}; \dots).$$

Como já resolvemos essas potências acima, temos:

$$(r_n) = (25,11886432; 25,70395783; 25,94179362; 25,95374301; 25,95434062; \dots),$$

e, intuitivamente, se continuamos a escrever os termos dessa sequência, podemos dizer que ela é convergente, pois como vimos no início do exemplo, se estabiliza em torno de um valor real. Formalmente, mostraremos a convergência de (r_n) no Lema 2.13 adiante.

No exemplo, poderíamos ter escolhido qualquer número irracional no lugar de $\sqrt{2}$, optamos por este número por ser um dos mais conhecidos, mas com o auxílio de um computador, podemos facilmente construir a sequência para qualquer irracional. A base 10 também poderia ser substituída por qualquer número real positivo.

Lembremos ainda que todo número real x possui uma representação decimal

$$x = a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \dots a_k \dots$$

em que $a_0 \in \mathbb{Z}$ e a_0 representa a parte inteira do número e $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots$ são números no conjunto $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ tais que a_1 é a primeira casa decimal de x , a_2 é a segunda casa decimal e continuando o processo, a_k será a k -ésima casa decimal do número x , e assim sucessivamente (veja Apêndice A).

Por exemplo, no caso de $\sqrt{2} \cong 1,4142135623731\dots$, temos $a_0 = 1$, $a_1 = 4$, $a_2 = 1$, $a_3 = 4$, $a_4 = 2$, $a_5 = 1$, $a_6 = 3$, etc. Essa compreensão de que podemos representar qualquer número real desta forma, em especial os irracionais, será importante mais adiante no texto.

Generalizando o Exemplo 2.12, se c for um irracional positivo (no caso em que c é um irracional negativo basta observar que $-c > 0$), sabemos que c não possui representação decimal finita e nem pode ser escrito na forma de fração, porém costumamos, quando da necessidade de realização de cálculos, aproximar os números irracionais por números racionais com um número de casas decimais exatas pré estabelecidas conforme a necessidade, como fizemos no Exemplo 2.12.

Seja c um número irracional, consideremos a sequência (s_n) em que cada termo s_n é uma aproximação, por falta, do número irracional c com n casas decimais exatas.

Veja que, (s_n) é **não decrescente**, pois, para todo natural n , o termo s_{n+1} da sequência terá uma casa decimal exata a mais que o termo s_n . A medida que n aumenta, o número de casas decimais de s_n aumenta, e o valor de s_n fica cada vez mais próximo de c .

Para provar que (s_n) é crescente, veja que se $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \cdots a_k \cdots$ é a representação decimal de x , então:

$$s_{n+1} = a_0, a_1 a_2 a_3 \cdots a_n a_{s_{n+1}},$$

e também

$$s_n = a_0, a_1 a_2 a_3 \cdots a_{s_n}.$$

E disto segue que:

$$s_{n+1} - s_n = a_0, a_1 a_2 a_3 \cdots a_n a_{s_{n+1}} - a_0, a_1 a_2 a_3 \cdots a_{s_n} = 0, \underbrace{00 \cdots 0}_{n\text{-zeros}} a_{s_{n+1}} \stackrel{(***)}{\geq} 0.$$

A desigualdade (***) é justificada pelo fato que $a_{s_{n+1}}$ é um inteiro do conjunto $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

E assim,

$$s_{n+1} - s_n \geq 0 \Rightarrow s_{n+1} \geq s_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Podemos então concluir que, para a sequência (s_n) que definimos acima, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = c,$$

onde c é um número irracional qualquer.

Note que cada termo de (s_n) é um número racional, logo, dado um número real positivo a , podemos construir uma nova sequência (r_n) em que cada termo é dado por $r_n = a^{s_n}$, ou seja,

$$(r_n) = (a^{s_1}; a^{s_2}; a^{s_3}; \dots).$$

Como (s_n) é uma sequência convergente, intuitivamente acreditamos que (r_n) também será convergente, pois como $s_n \rightarrow c$, os valores de a^{s_n} tendem a estabilizar-se depois de um dado valor de n e se aproximarem mais de um determinado número real que denotaremos por a^c , ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = a^c$$

Provemos agora que o limite dado acima realmente existe.

Lema 2.13. *Seja um número real positivo $a \neq 1$ e (s_n) uma sequência de números racionais tal que cada termo s_n é uma aproximação, por falta, do número real x com n casas decimais exatas, com $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x$. Então o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n}$ existe.*

Demonstração: Se x for um número racional o lema é imediato, pois já definimos a^x para x racional. Para mostrar este lema quando x não é racional, basta que mostremos que a sequência (r_n) em que $r_n = a^{s_n}$ é monótona e limitada, pois, “toda sequência monótona limitada é convergente” (LIMA, 2008, p.111).

Se x é um irracional, então a sequência (s_n) é não decrescente como já mostramos.

Suponhamos agora $a > 1$ (o caso em que $0 < a < 1$ é análogo, basta tomar $a = 1/b$ com $b > 1$).

Como $s_{n+1} \geq s_n$ são racionais temos, pela Propriedade 2.10, $a^{s_{n+1}} \geq a^{s_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo a sequência (r_n) com $r_n = a^{s_n}$ é não decrescente, e portanto, monótona.

Resta-nos mostrar que (r_n) é limitada.

Veja que para todo n natural temos $r_n = a^{s_n} \geq a^{s_1}$, logo (r_n) é limitada inferiormente.

Seja $z \in \mathbb{Q}$ tal que $x < z$. Como (s_n) é não decrescente e $s_n \rightarrow x$ temos que $s_n < x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Disto temos que $s_n < x < z \Rightarrow s_n < z$ para todo n natural. Sabemos que s_n e z são racionais, e $a > 1$, logo, pela Propriedade 2.10 temos que $r_n = a^{s_n} < a^z$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e assim (r_n) é limitada superiormente.

Logo (r_n) é limitada e portanto, é convergente, ou seja, existe o

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n}.$$



Denotaremos este limite por:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n} = a^x.$$

A demonstração dada acima não é a única forma de provar que tal limite existe, apresentamos a seguir uma prova alternativa para o Lema 2.13, porém esta é uma demonstração mais delicada e pode ser omitida da leitura. Para a demonstração alternativa, lembremos que:

Definição 2.14 (Sequência de Cauchy). *Seja (x_n) uma sequência de números reais. Ela se chama uma sequência de Cauchy quando cumpre a seguinte condição: dado arbitrariamente um número real $\varepsilon > 0$, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m > n_0$ e $n > n_0$ implica $|x_m - x_n| < \varepsilon$. (LIMA, 2008, p.126)*

Para mostrar o lema, basta que mostremos que $(r_n) = (a^{s_n})$ é uma sequência de Cauchy, pois nos reais, uma sequência é convergente se, e somente se, é uma sequência de Cauchy.

A equivalência entre a convergência de uma sequência e esta sequência ser de Cauchy, em \mathbb{R} , é garantida por dois teoremas da Análise Real, sendo o primeiro “Toda sequência convergente é de Cauchy” (LIMA, 2008, p.126) e “Toda sequência de Cauchy de números reais é convergente” (LIMA, 2008, p.127).

Na demonstração do Lema faremos uso também da Desigualdade de Bernoulli⁴.

Para provar o Lema 2.13 mostraremos que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n > n_0$ então

$$|r_m - r_n| = |a^{s_m} - a^{s_n}| < \varepsilon.$$

Demonstração Alternativa do Lema 2.13: Seja x um número real positivo (no caso em que x é negativo basta observar que $-x$ é positivo) e (s_n) um sequência de números racionais tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x$, e s_n é uma aproximação, por falta, de x com n casas decimais exatas e como já mostramos (s_n) é crescente.

Suponha $a = 1 + y$, com $y > 0$, $x > 0$.

Seja M inteiro fixo maior que x , logo $s_n < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto $a^{s_n} < a^M$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

⁴**Desigualdade de Bernoulli:** Dado $x > -1$ real, e $n \in \mathbb{N}$ tem-se sempre $(1+x)^n > 1+nx$. A demonstração dessa desigualdade se dá aplicando indução finita sobre n

Dado $\varepsilon > 0$, se $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{a^M}$ e $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $j_0 > \frac{a-1}{\varepsilon_1}$, então,

$$a - 1 < j_0 \cdot \varepsilon_1,$$

logo,

$$a < 1 + j_0 \cdot \varepsilon_1.$$

Utilizando a desigualdade de Bernoulli obtemos:

$$a < 1 + j_0 \cdot \varepsilon_1 < (\varepsilon_1 + 1)^{j_0}$$

e disto, extraindo a raiz j_0 -ésima na desigualdade $a < (\varepsilon_1 + 1)^{j_0}$, temos:

$$a^{\frac{1}{j_0}} < \varepsilon_1 + 1$$

Em especial para todo $k \in \mathbb{Q}$, com $k < \frac{1}{j_0}$ temos $a^k < \varepsilon_1 + 1$, ou seja, $a^k - 1 < \varepsilon_1$.

Como $s_n \rightarrow x$, tem-se que (s_n) é uma sequência de Cauchy (pois é convergente), e portanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |s_m - s_n| < \frac{1}{j_0}$.

Assim, dados $m, n > n_0$, suponha $m > n$ e seja $k = s_m - s_n$, então

$$s_m > s_n \Rightarrow |a^{s_m} - a^{s_n}| = a^{s_m} - a^{s_n} = a^{s_n}(a^{s_m - s_n} - 1)$$

mas, temos que $k = s_m - s_n$, logo:

$$|a^{s_m} - a^{s_n}| = a^{s_n}(a^k - 1),$$

e como $a^k - 1 < \varepsilon_1$, agora:

$$|r_m - r_n| = |a^{s_m} - a^{s_n}| = a^{s_n}(a^k - 1) < a^{s_n} \cdot \varepsilon_1 < a^M \cdot \varepsilon_1 = a^M \cdot \frac{\varepsilon}{a^M} = \varepsilon.$$

Mostramos, portanto, que dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 natural, de modo que se $m, n > n_0$, então $|r_m - r_n| = |a^{s_m} - a^{s_n}| < \varepsilon$, isto mostra que $(r_m) = (a^{s_n})$ é uma sequência de Cauchy (para $a > 1$ e $x > 0$) e portanto convergente em \mathbb{R} , ou seja, o $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n}$ existe e podemos denotar este limite por a^x .

Se tivermos $0 < a < 1$, então $a = 1 + y$, com $-1 < y < 0$ real, e neste caso a desigualdade de Bernoulli ainda é válida, pois $y > -1$, e a demonstração segue como anteriormente. Bastaria então supormos no início da demonstração que $a \neq 1$ é positivo, e $x > 0$.

O caso em que $a > 1$ e $x < 0$ é equivalente ao caso em que $0 < a < 1$ e $x > 0$, enquanto que o caso em que $0 < a < 1$ e $x < 0$ é equivalente ao caso $a > 1$ e $x > 0$. Em ambos basta

observar que se $x < 0$, temos $-x > 0$

■

Podemos agora falar da potência a^x para qualquer base real positiva $a \neq 1$ e qualquer expoente x real.

2.3 FUNÇÃO EXPONENCIAL

Definição 2.15 (Função Exponencial). *Seja um número real positivo $a \neq 1$. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, chamada de Função Exponencial de Base a , é definida por:*

1) *Se x é racional, então $f(x) = a^x$*

2) *Se x é irracional, então*

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n} = a^x,$$

onde (s_n) é uma sequência de números racionais em que cada termo s_n é uma aproximação, por falta, do número x com n casas decimais, e $x = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n)$.

A segunda parte da Definição 2.15 aplica-se também ao caso em que x é racional, ou seja, se $x \in \mathbb{Q}$, podemos construir também uma sequência de números racionais (s_n) em que cada termo s_n é uma aproximação de x com n casas decimais exatas.

O que mudaria neste caso, com x racional, é que (s_n) será crescente até certo ponto para os racionais com representação decimal finita, tornando-se constante após um determinado número n_0 de casas decimais exatas (pois após n_0 casas decimais as demais serão iguais a 0).

Para os racionais x com representação decimal em dízima periódica a sequência (s_n) comporta-se de maneira semelhante aos casos em que o número é irracional.

Deste modo, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, poderíamos definir $a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n}$, com $(s_n) \subset \mathbb{Q}$, e s_n é uma aproximação, por falta, de x com n casas decimais exatas.

Exemplo 2.16. *Calculemos agora 8^π . Como π é irracional, consideremos a sequência $(s_n) = (3, 1; 3, 14; 3, 141; 3, 1415; 3, 14159; 3, 141592; \dots)$ das aproximações por falta de π . Utilizando*

uma planilha eletrônica, temos:

$$\begin{aligned} 8^{3,1} &= 630,3459396325970; \\ 8^{3,14} &= 685,0189080504890; \\ 8^{3,141} &= 686,4448468891310; \\ 8^{3,1415} &= 687,1589290131580; \\ 8^{3,14159} &= 687,2875426618330; \\ 8^{3,141292} &= 687,2904010163120; \end{aligned}$$

que são valores aproximados de 8^π . Quanto mais próximo de π está s_n , mais próximo de 8^π estará o valor de 8^{s_n} , ou seja,

$$8^\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 8^{s_n}.$$

Lema 2.17. Sendo $a > 1$ real, temos que $a^x > 1$ se, e somente se, $x > 0$.

Demonstração: Já provamos este lema x é um número inteiro, veja a demonstração do Lema 2.8. E também já provamos este lema para x racional, veja Lema 2.9.

Resta-nos assim mostrar o caso em que x é irracional.

(\Leftarrow) Inicialmente mostremos que se $a > 1$ real e $x > 0$, então $a^x > 1$.

Como consequência imediata do Lema 2.9 temos que se $a > 0$, e $r_1 < r_2$ são racionais, então $a^{r_1} < a^{r_2}$.

Da Definição 2.15, se x é irracional, então $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n}$, onde (s_n) é uma sequência de números racionais em que cada termo s_n é uma aproximação, por falta, do número x com n casas decimais, e $x = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n)$.

Se $x > 0$, então $s_n > 0$ para todo natural n , como s_n é racional, temos, pelo Lema 2.9, que $a^{s_n} > 1, \forall n \in \mathbb{N}$, de onde segue que $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n} > 1$.

(\Rightarrow) Agora, resta-nos mostrar que se $a > 1$ e $a^x > 1$ então $x > 0$.

Suponha, por absurdo, que $x \leq 0$, logo $-x > 0$, e pelo que mostramos em (\Rightarrow), $a^{-x} > 1$ multiplicando ambos os lados dessa desigualdade por a^x que é positivo, e portanto não altera o sinal da desigualdade, temos:

$$a^{-x} > 1 \Rightarrow a^x \cdot a^{-x} > a^x \cdot 1 \Rightarrow a^0 > a^x \Rightarrow 1 > a^x,$$

o que é um absurdo, pois contradiz a hipótese. Portanto, $x > 0$. Para $x = 0$, temos $a^x = 1$, por definição.



Propriedade 2.18. *A função exponencial é monótona:*

- 1) *crecente, se $a > 1$;*
- 2) *decrecente, se $0 < a < 1$.*

Demonstração: Seja $a > 1$ e $x < y$ reais, suponha, por absurdo, $a^x > a^y$, como $x < y$ temos que $y = x + k$, $k > 0$ real, e daí $a^x > a^{x+k}$ o que nos dá $a^x > a^x \cdot a^k$, de onde segue que $1 > a^k$, o que é um absurdo, pois mostramos no lema anterior que se $a > 1$ e $k > 0$, então $a^k > 1$.

Para mostrar o caso em que $0 < a < 1$, basta tomar $a = \frac{1}{b}$, onde $b > 1$, e seguir os passos acima.



A monotonicidade da Função Exponencial fica bem clara quando traçamos um esboço de seu gráfico, conforme as Figuras 1 e 2 abaixo:

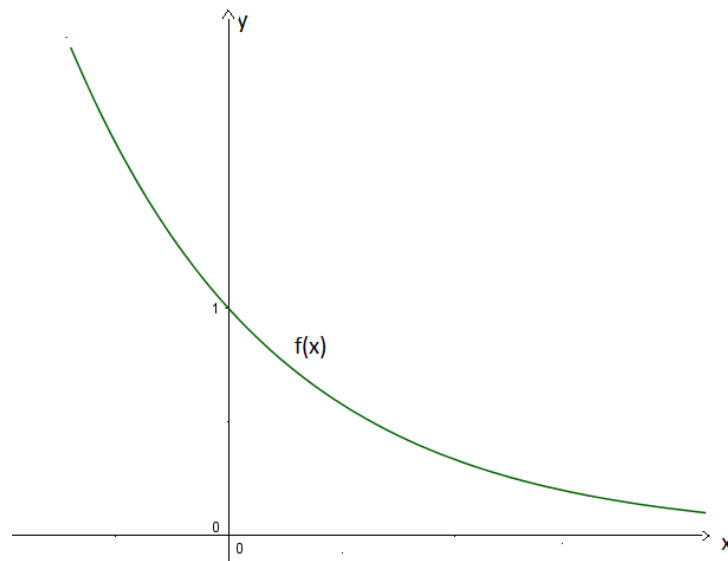


Figura 1: Gráfico da Função Exponencial $f(x) = a^x$ com $0 < a < 1$

Vejamos agora mais algumas propriedades da Função Exponencial de Base a .

Propriedade 2.19. *A Função Exponencial de Base a é sempre positiva.*

Demonstração: Basta mostrar que $f(x) > 0$ para qualquer x real. Para $x = 0$, temos $a^x = a^0 = 1 > 0$. Para $x > 0$ é imediato, uma vez que já mostramos que $a^x > 1 > 0$ (Lema 2.17).

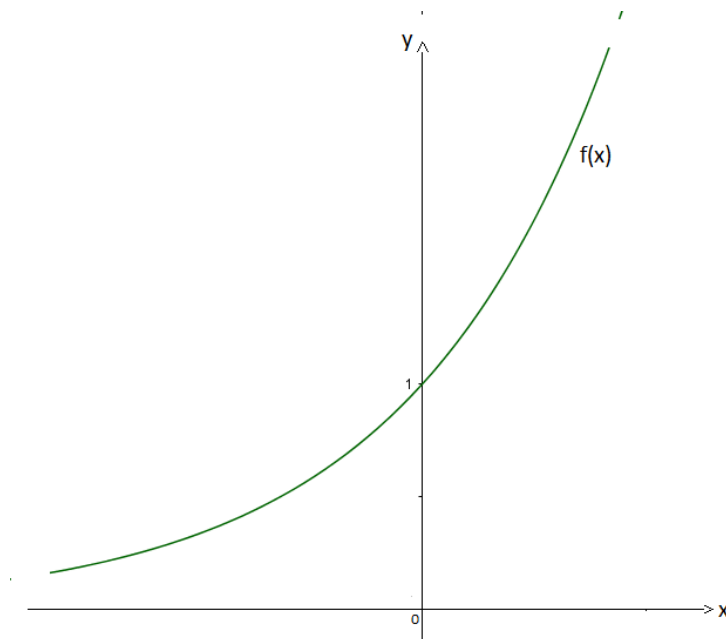


Figura 2: Gráfico da Função Exponencial $f(x) = a^x$ com $a > 1$

Resta mostrar que se $x < 0$ então $f(x) > 0$. Para efeitos de cálculo seja $a > 1$ (o caso em que $0 < a < 1$ é análogo).

Suponhamos, por absurdo, que $f(x) < 0$, isto é $a^x < 0$.

Como $x < 0$ e $a > 1$, temos que $-x > 0$ e assim, $a^{-x} > 1$ (Lema 2.17), multiplicando ambos os lados dessa desigualdade por $a^x < 0$:

$$a^{-x} > 1 \Rightarrow a^{-x} \cdot a^x < 1 \cdot a^x \Rightarrow a^0 < a^x \Rightarrow 1 < a^x$$

o que é um absurdo, pois supomos $a^x < 0$. Portanto, $a^x > 0$ para todo x real. ■

Propriedade 2.20. A Função Exponencial é injetiva.

Demonstração: Sejam x, y reais, e suponhamos $x < y$, já mostramos que $f(x) < f(y)$, se $a > 1$, e $f(x) > f(y)$ se $0 < a < 1$. Logo, $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ ■

A próxima propriedade que vamos enunciar e demonstrar diz que a Função Exponencial é ilimitada superiormente. Antes de prosseguirmos, abrimos aqui um espaço para relembrar o que significa uma função ser ilimitada.

Considere as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas pelas leis $f(x) = \text{sen}(x)$, $g(x) = x^2$ e $h(x) = x^3$.

Como $-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, vemos que $f(x) = \text{sen}(x)$ é uma função limitada superiormente e inferiormente, pois seu gráfico encontra-se “preso” entre as retas $y = 1$ e $y = -1$, como mostrado na Figura 3.

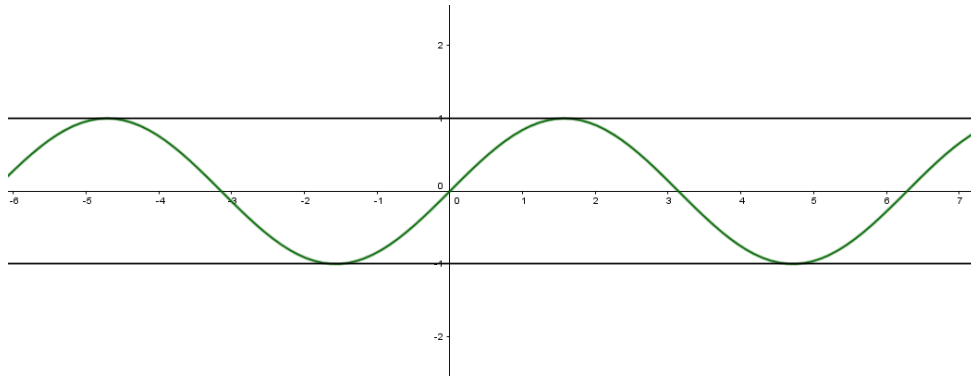


Figura 3: Gráfico Função Seno

Já a função $g(x) = x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, logo concluímos que $g(x) = x^2$ é uma função limitada inferiormente, pois não haverá nenhum $y = g(x)$ que seja menor do que zero.

Porém esta função não é limitada superiormente, como podemos ter uma ideia na Figura 4, pois para qualquer número real β fixado é sempre possível encontrar um número real x tal que $g(x) > \beta$. De fato, se $\beta < 0$ basta tomarmos qualquer $x \in \mathbb{R}$ que teremos $g(x) > \beta$. Se $\beta \geq 0$, basta que tomemos $x = \sqrt{\beta + 1}$ e assim teremos $g(x) = x^2 = (\sqrt{\beta + 1})^2 = \beta + 1$, como $\beta + 1 > \beta$ temos que $g(x) > \beta$.

Por fim, a função $h(x) = x^3$ é ilimitada superiormente, pois, para qualquer $\beta > 0$ dado, podemos encontrar x real tal que $h(x) > \beta$, basta que se tome $x = \sqrt[3]{\beta + 1}$, deste modo teremos $h(x) = (\sqrt[3]{\beta + 1})^3 = \beta + 1$, logo, $h(x) > \beta$.

De maneira semelhante, podemos mostrar que a função $h(x) = x^3$ é ilimitada inferiormente, pois se nos for dado $\alpha < 0$ sempre é possível encontrar um real x tal que $h(x) < \alpha$, basta que tomemos $x = \sqrt[3]{\alpha - 1}$ e assim teremos $h(x) = x^3 = (\sqrt[3]{\alpha - 1})^3 = \alpha - 1 < \alpha$, e portanto temos $h(x) < \alpha$, e assim a função $h(x) = x^3$ é ilimitada inferiormente. Veja a Figura 5.

Mostremos agora que a Função Exponencial é ilimitada.

Propriedade 2.21. *A Função Exponencial é ilimitada superiormente.*

Demonstração: Basta que mostremos que dado $k > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n > k$.

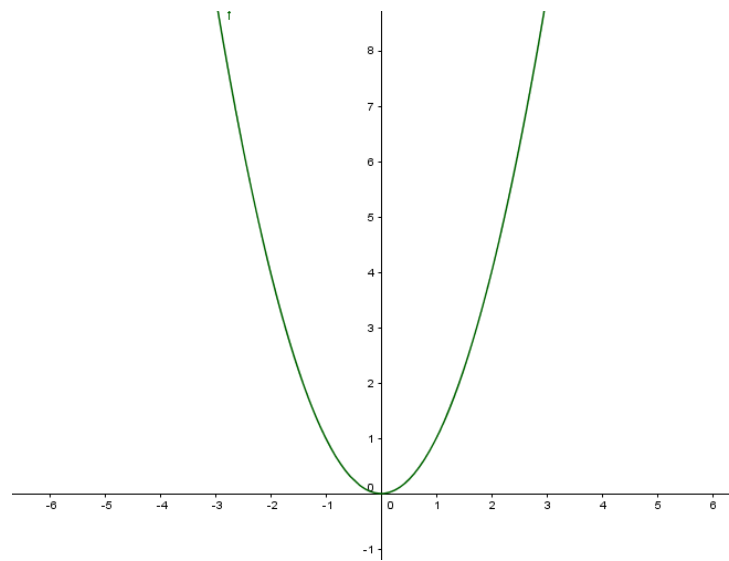


Figura 4: Gráfico Função Quadrática $g(x) = x^2$

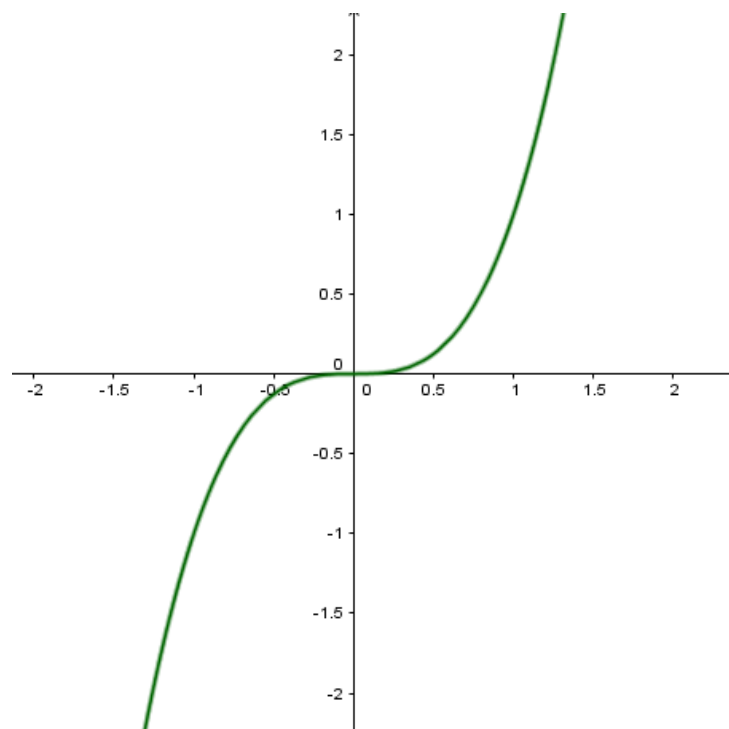


Figura 5: Gráfico Função $h(x) = x^3$

Da Desigualdade de Bernoulli temos que, se $n \in \mathbb{N}$, $x > -1$ real, então

$$(1+x)^n > 1+nx.$$

Seja $a > 1$ real, logo podemos escrever $a = 1+x$, com $x > 0$.

Disto temos $a^n = (1+x)^n > 1+nx$ pela Desigualdade de Bernoulli.

Dado $k > 0$, seja $n \geq \frac{k}{x}$, logo $nx \geq k$. Portanto, $a^n = (1+x)^n > (1+nx) \geq 1+k > k$

■

A próxima propriedade que demonstraremos é a da continuidade da Função Exponencial. Queremos primeiramente que o leitor compreenda o que significa a Função Exponencial ser contínua e quais as consequências que podemos extrair deste fato.

Intuitivamente, dizer que uma função é contínua em um intervalo $]a, b[$, pela própria palavra continuidade, nos leva a lembrar de ausência de saltos e furos, com “passagens” suaves de um valor ao outro do contradomínio. Bons exemplos de funções contínuas são as polinomiais, que mesmo com muitas voltas em seus gráficos, estão definidas para qualquer valor real e permitem uma passagem sutil entre as imagens de valores extremamente próximos de seus domínios. Veja um exemplo de função contínua na Figura 6.

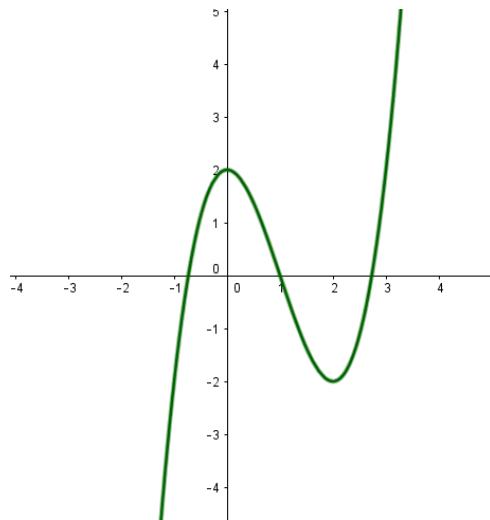


Figura 6: Gráfico de uma função polinomial. Exemplo de gráfico de uma função contínua

Nem todas as funções são contínuas. Um exemplo de função descontínua em qualquer ponto de seu domínio é a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = 0$ se x é racional e $g(x) = 1$ se x é irracional. Fica aqui o desafio ao leitor para que tente esboçar o gráfico desta função.

Podem acontecer também de uma função não ser contínua para todos os números reais, mas, existir intervalos em que essa função seja contínua, nesse caso, dizemos que essa

função é contínua naquele intervalo. Como por exemplo a função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & \text{se } x > 2 \\ 0 & \text{se } x = 2 \\ \frac{-1}{x-2} & \text{se } x < 2 \end{cases},$$

cujo gráfico apresentamos na Figura 7. Veja que apesar de a função estar definida em todos os números reais, para desenhar seu gráfico devemos dar alguns “saltos”. Porém, nos intervalos $] -\infty, 2[$ e $]2, +\infty[$, a função é contínua.

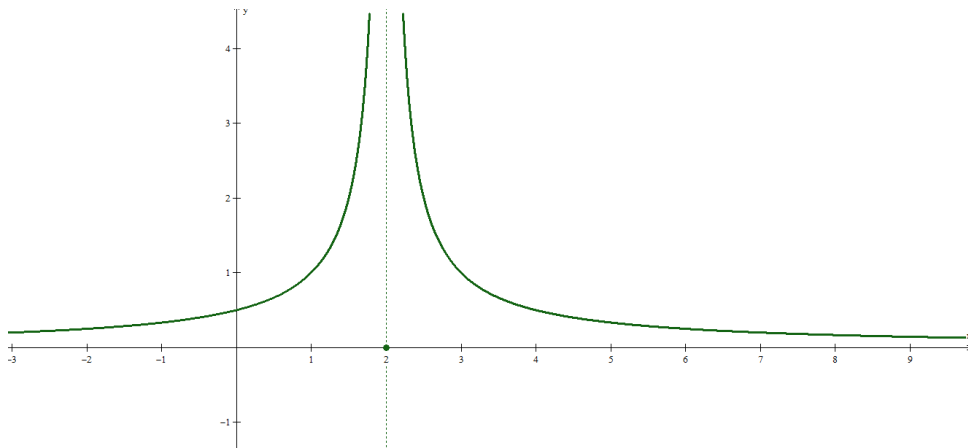


Figura 7: Gráfico da função $h(x)$. Exemplo de gráfico de uma função contínua em intervalos

Matematicamente, dizemos que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua no ponto $x_0 \in X$, quando, para qualquer $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pudermos achar $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - x_0| < \delta$ impliquem $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, neste caso escrevemos,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Isto significa dizer que para ser contínua em x_0 , a função precisa estar definida em x_0 e o limite da função, quando $x \rightarrow x_0$ deve coincidir com o valor da função no ponto.

Propriedade 2.22. *A Função Exponencial é contínua.*

Demonstração: Para mostrar esse fato, basta que usemos a definição de limite de uma função real do Cálculo Diferencial e Integral para mostrar inicialmente que $\lim_{x \rightarrow 0}(a^x) = 1$, ou seja, devemos mostrar que podemos tomar a^x tão próximo de 1 quanto queiramos, bastando para isso tomarmos x muito próximo de 0. Suponhamos $a > 1$ e $x > 0$, dado um $\varepsilon > 0$ qualquer, queremos mostrar que, para x suficientemente pequeno, teremos $a^x - 1 < \varepsilon$ ou seja, $a^x < 1 + \varepsilon$.

Como ε é um número real positivo, da desigualdade de Bernoulli, temos que $(1 +$

$\varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon$. Deste modo, tomando n natural de modo que $n > \frac{a-1}{\varepsilon}$ teremos $n\varepsilon > a - 1$, logo $a < 1 + n\varepsilon$, e daí, por Bernoulli, $a < 1 + n\varepsilon < (1 + \varepsilon)^n$ de onde segue $a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$.

Em resumo, dado $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon \Rightarrow 1 < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$.

Para qualquer x real, tal que $0 < x < \frac{1}{n}$, pela monotonicidade da Função Exponencial, teremos $1 < a^x < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$, o que faz a^x tão próximo de 1 quanto queiramos, ou seja, $\lim_{x \rightarrow 0^+} a^x = 1$.

Tomando agora um real x_0 fixo, colocamos $h = x - x_0$ temos $x = x_0 + h$, e deste modo, $a^x - a^{x_0} = a^{x_0+h} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^h - 1)$.

Quando fizermos x se aproximar de x_0 , h se aproximará de zero, e assim a^h se aproxima de 1, e $a^h - 1$ se aproximando de zero, o que nos leva a concluir que, uma vez que x_0 é fixo, $\lim_{x \rightarrow x_0} (a^x - a^{x_0}) = 0$ ou seja, $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$, como queríamos, pois este fato confirma a continuidade da função exponencial.

■

Observação 2.23. *Se lembrarmos que podemos definir $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$, se f é uma função contínua em seu domínio, e onde (x_n) é qualquer sequência, no domínio de f , que converge para a , e seguirmos as ideias da demonstração do Lema 2.13 também conseguimos mostrar que $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$, que também mostra que a função é contínua.*

Propriedade 2.24. *A Função Exponencial é sobrejetiva.*

Demonstração: Da Análise Real temos: “Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em um intervalo I . Então $f(I)$ é um intervalo”(LIMA, 2008, p.235). Tomando $I = \mathbb{R}$, como a Função Exponencial é contínua temos que $f(\mathbb{R})$ é um intervalo. Precisamos agora mostrar que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$, já sabemos que a Função Exponencial é sempre positiva, e é ilimitada superiormente, resta-nos mostrar que podemos aproximar $f(x)$ de 0 (zero) tanto quanto se queira.

Dado $\varepsilon > 0$, seja $k = \frac{1}{\varepsilon}$. Como f é ilimitada superiormente, existe n tal que $a^n > k = \frac{1}{\varepsilon}$, logo

$$a^n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{1}{a^n} = a^{-n}.$$

■

Propriedade 2.25. *A Função Exponencial é bijetiva.*

Demonstração: Basta observar que a função é injetiva e sobrejetiva.



Propriedade 2.26. *A Função Exponencial leva somas em produtos.*

Demonstração: Devemos mostrar que $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$. Para o caso em que x, y são racionais é imediato, pois reduz-se à propriedade fundamental da potenciação já demonstrada.

Se x, y são reais, podemos construir duas seqüências de números racionais (r_n) e (s_n) , tais que cada termo r_n é uma aproximação, por falta, de x com n casas decimais exatas e assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x.$$

E cada termo s_n é uma aproximação, por falta, de y com n casas decimais exatas. Então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = y,$$

deste modo temos que:

$$x + y = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n + \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (r_n + s_n).$$

E também:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$$

e

$$f(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n}.$$

Agora, veja que, como f é contínua⁵, e usando as propriedades de limites de seqüências⁶:

$$f(x) \cdot f(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{r_n} \cdot a^{s_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{(r_n + s_n)} = a^{\lim_{n \rightarrow \infty} r_n + s_n} = a^{x+y} = f(x+y).$$



2.4 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Vamos agora definir a Função Logarítmica como a função inversa da Função Exponencial. Mas antes disso, lembremos alguns conceitos importantes de funções inversas.

⁵**Teorema:** Para que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ seja contínua no ponto $a \in X$ é necessário e suficiente que se tenha $\lim f(x_n) = f(a)$ para toda seqüência de pontos $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$. **Corolário 1:** Para que f seja contínua no ponto a é necessário que exista $\lim f(x_n)$ e independa da seqüência de números $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$. **Corolário 2:** A fim de que f seja contínua no ponto a , é suficiente que, para toda seqüência de pontos $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$ exista $\lim f(x_n)$. (LIMA, 2008, p.226)

⁶**Teorema:** Se $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$, então: (1) $\lim(x_n + y_n) = a + b$; (2) $\lim(x_n - y_n) = a - b$; (3) $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$; (4) $\lim(\frac{x_n}{y_n}) = \frac{a}{b}$, se $b \neq 0$. (LIMA, 2008, p.115)

Definição 2.27 (Função Inversa). *Dadas duas funções $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$, dizemos que a função g é a inversa da função f quando temos $g(f(x)) = x$ para qualquer $x \in X$, e $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$.*

Decorre imediatamente da definição de função inversa que g é inversa de f , se, e somente se, f é inversa de g .

De fato, quando g é a inversa de f , tem-se $g(y) = x$ apenas se $y = f(x)$. Se $g(f(x)) = x$, para todo $x \in X$, então f é uma função injetiva, pois, dados $x_1 \neq x_2$ em X , se tivermos $f(x_1) = f(x_2)$, então $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ o que nos dá $x_1 = x_2$, contradição. De maneira análoga mostramos que também g é injetiva.

Por outro lado, como $f(g(y)) = y$ para qualquer y em Y , temos que f é também sobrejetiva, pois dado $y \in Y$ qualquer, tomamos $x = g(y) \in X$ e teremos $f(x) = y$. Analogamente, provamos que g também é sobrejetiva.

Deste modo, concluímos que se uma função f possui inversa, então esta função e sua inversa são funções bijetivas. É comum que se denote a função g , inversa de f , por f^{-1} .

De acordo com Lima (2013a), definidas as potências de base real positiva e expoente **racional**, os livros tradicionais, e isto inclui muitos dos livros utilizados como livros texto/apoio nas escolas de educação básica, definem logaritmos como abaixo, em boa parte dos livros didáticos, a definição de logaritmo é feita sem o cuidado de definir a Função Exponencial para os irracionais.

Definição 2.28 (Logaritmos). *Dado um número real positivo $a \neq 1$, o logaritmo de um número $x > 0$ na base a é o expoente y a que se deve elevar a de tal modo que $a^y = x$. Escrevemos $y = \log_a x$ e lê-se y é o logaritmo de x na base a , ou seja:*

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x.$$

Da Definição 2.28, decorre diretamente a propriedade fundamental dos logaritmos, que é semelhante à propriedade fundamental das potências. Nela, mostramos que a Função Logarítmica leva produtos em somas.

Propriedade 2.29 (Fundamental dos Logaritmos). *Dado um número real positivo $a \neq 1$ e os números reais x e u , também positivos, temos que:*

$$\log_a x \cdot u = \log_a x + \log_a u$$

Demonstração: Para provar a propriedade, sejam $\log_a x = y$ e $\log_a u = v$. Assim temos $a^y = x$ e $a^v = u$, e $x \cdot v = a^y \cdot a^v$. Segue da Propriedade 2.6 que $a^y \cdot a^v = a^{y+v}$ e assim $u \cdot x = a^{y+v}$. Desta última igualdade e da Definição 2.28 temos $v + y = \log_a(x \cdot u)$ e assim, $\log_a(x \cdot u) = \log_a x + \log_a u$. ■

Propriedade 2.30. A função logarítmica é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

Demonstração: A demonstração decorre imediatamente da definição.

Sejam $x_1 < x_2$ reais positivos e $a > 1$. Queremos mostrar que $y_1 = \log_a x_1 < y_2 = \log_a x_2$. Da definição de logaritmo temos que $x_1 = a^{y_1}$ e $x_2 = a^{y_2}$, como supomos $x_1 < x_2$, temos que $a^{y_1} < a^{y_2}$, e como a Função Exponencial é crescente, temos imediatamente que $y_1 < y_2$, ou seja, $\log_a x_1 < \log_a x_2$. O caso em que $0 < a < 1$ é análogo. ■

O esboço do gráfico da Função Logarítmica de base maior que 1 é dado na Figura 8.

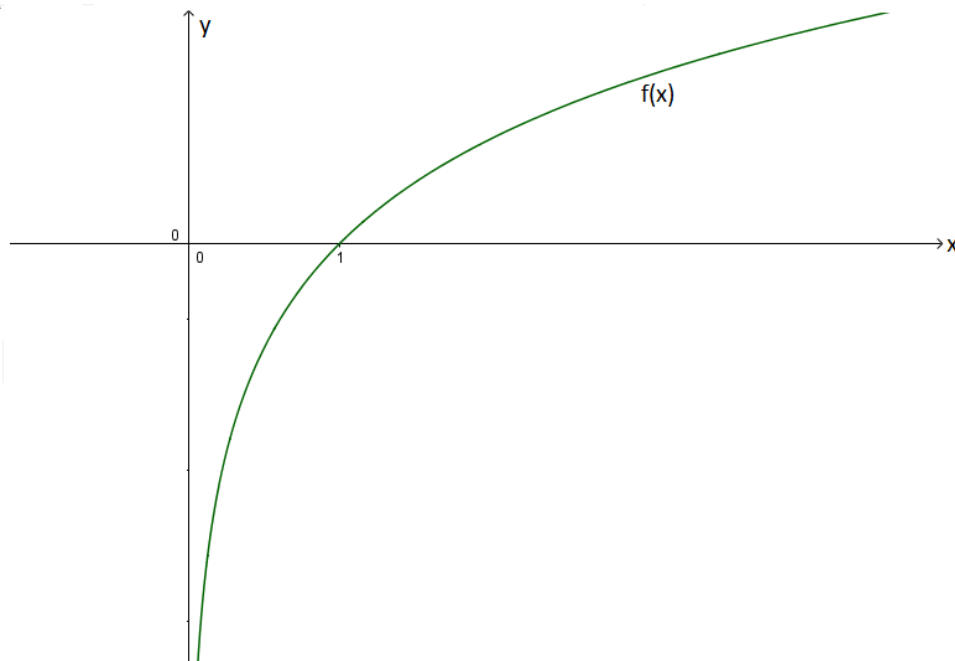


Figura 8: Gráfico de uma Função Logarítmica com $a > 1$

A definição de Logaritmo nos permite justificar de outra forma a existência de potências em que o expoente é um número irracional, veja o exemplo.

Exemplo 2.31. Consideremos o número 10 como base do nosso sistema de logaritmos. Qual seria o logaritmo de 7 na base 10? Pela Definição 2.28 temos que $\log_{10} 7$ é o número y tal que $10^y = 7$.

É óbvio que y não é um número inteiro, pois as potências de 10 com expoente inteiro resultam em números formados apenas pelos algarismos⁷ 0 e 1.

Suponhamos então que y é um número racional, ou seja $y = \frac{p}{q}$, p, q inteiros e $q > 0$, assim teríamos:

$$\log_{10} 7 = y \Leftrightarrow 10^y = 7 \Leftrightarrow 10^{\frac{p}{q}} = 7 \Leftrightarrow (10^{\frac{p}{q}})^q = 7^q \Leftrightarrow 10^p = 7^q$$

A igualdade $10^p = 7^q$ é um absurdo, pois se fosse verdadeira, seria uma contradição ao Teorema Fundamental da Aritmética⁸, uma vez que, usando a decomposição em fatores primos, temos $10^p = 2^p \cdot 5^p$, ou seja, p fatores iguais a 2 e p fatores iguais a 5, enquanto que a decomposição em fatores primos de 7^q é formada exclusivamente por q fatores iguais a 7. Como 2, 5 e 7 são primos entre si concluímos que y não pode ser um número racional. E então resta apenas que y seja um número irracional.

⁷Pois a decomposição em fatores primos de qualquer potência de 10 é formada por potências de 2 e 5 (para clarear as ideias, veja o exemplo da potência 10^{15} tem como resultado 1.000.000.000.000.000 e sua decomposição em fatores primos é $10^{15} = 2^{15} \cdot 5^{15}$). E uma potência de 7, tem sua decomposição em fatores primos formada apenas pela potência do número 7, pois 7 é um número primo

⁸TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA: Todo número natural maior que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos (HEFEZ, 2013)

3 DEFINIÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL ATRAVÉS DE PROPRIEDADES CARACTERIZADORAS

Neste capítulo definiremos as funções exponenciais através de duas propriedades, veremos que quando essas funções são assim definidas elas possuem as mesmas propriedades que demonstramos no capítulo anterior. Para isto, seguiremos o livro “Números e Funções Reais”, do autor Elon Lages de Lima, que foi base da disciplina de mesmo nome, cursada no primeiro semestre do PROFMAT.

3.1 FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Trazemos aqui uma definição de Função Exponencial adaptada do livro Números e Funções Reais de Elon Lages de Lima

Definição 3.1 (Função Exponencial). *Seja um número real positivo $a \neq 1$. A função $F_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, definida de modo a ter as seguintes propriedades:*

1. $F_a(x+y) = F_a(x) \cdot F_a(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$;
2. $F_a(1) = a$;
3. Se $x < y$ e $a > 1$ então $F_a(x) < F_a(y)$ (a função é crescente para $a > 1$). Por outro lado, se $x < y$ e $0 < a < 1$ então $F_a(x) > F_a(y)$ (a função é decrescente para $0 < a < 1$).

É chamada de **Função Exponencial de Base a** .

Analisemos algumas propriedades que decorrem imediatamente da Definição 3.1.

Propriedade 3.2. *Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, temos $F_a(x) \neq 0$.*

Demonstração: Como a função $F_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tem a propriedade 1 pela Definição 3.1, então F_a não pode assumir o valor 0, ou seja, $F_a(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pois se não fosse assim,

teríamos uma função identicamente nula. Suponha, por absurdo, que exista algum valor $b \in \mathbb{R}$ tal que $F_a(b) = 0$, disto, para qualquer $x \in \mathbb{R}$:

$$x = b + (x - b),$$

o que nos daria:

$$F_a(x) = F_a(b + (x - b)) = F_a(b) \cdot F_a(x - b) = 0 \cdot F_a(x - b) = 0,$$

o que levaria a:

$$F_a(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

o que é uma contradição, pois do item 3 da Definição 3.1, F_a é uma função crescente (decrescente). Portanto, não existe x real tal que $F_a(x) = 0$.

■

Propriedade 3.3. Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, temos $F_a(x) > 0$.

Demonstração: Como, pela Definição 3.1, F_a tem a propriedade 1 e não é identicamente nula (pela propriedade anterior), para qualquer valor de x real, temos:

$$x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2},$$

e assim temos:

$$F_a(x) = F_a\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = F_a\left(\frac{x}{2}\right) \cdot F_a\left(\frac{x}{2}\right) = \left[F_a\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0.$$

Portanto, $F_a(x) > 0$ para todo x real.

■

Propriedade 3.4. $F_a(0) = 1$.

Demonstração: Basta observar que $1 = 1 + 0$, e da Definição 3.1 temos $F_a(1) = a$, o que nos dá:

$$F_a(1) = F_a(1 + 0) = F_a(1) \cdot F_a(0) = a \cdot F_a(0) \Rightarrow a = a \cdot F_a(0) \Rightarrow F_a(0) = 1.$$

■

Propriedade 3.5. Para todo inteiro n , temos $F_a(n) = a^n$.

Demonstração: Se n for um inteiro positivo temos:

$$n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n\text{-parcelas}},$$

Do item 1 da Definição 3.1:

$$F_a(n) = F_a(\underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{n\text{-parcelas}}) = \underbrace{F_a(1) \cdot F_a(1) \cdot F_a(1) \cdots F_a(1)}_{n\text{-fatores}},$$

mas, do item 2 da Definição 3.1, temos $F_a(1) = a$, logo:

$$F_a(n) = \underbrace{F_a(1) \cdot F_a(1) \cdot F_a(1) \cdots F_a(1)}_{n\text{-fatores}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n\text{-fatores}} \stackrel{(\bullet)}{=} a^n.$$

A igualdade (\bullet) decorre da Definição 2.5 do capítulo anterior.

Observe que caso n seja um inteiro qualquer, $0 = n + (-n)$, e assim, da Propriedade 3.4 e pelo que acabamos de mostrar, obtemos:

$$0 = n + (-n) \Rightarrow F_a(0) = F_a(n + (-n)) \Rightarrow 1 = F_a(n) \cdot F_a(-n) \Rightarrow 1 = a^n \cdot F_a(-n) \Rightarrow F_a(-n) = \frac{1}{a^n},$$

mas no capítulo anterior, definimos $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$, logo:

$$F_a(-n) = a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Portanto, se n é um inteiro, então $F_a(n) = a^n$

■

Propriedade 3.6. *Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$, então $F_a(m - n) = \frac{F_a(m)}{F_a(n)}$.*

Demonstração: Como m e n são números inteiros, pela Propriedade 3.5 temos $F_a(m) = a^m$, $F_a(n) = a^n$ e $F_a(-n) = a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, logo:

$$F_a(m - n) = F_a(m + (-n)) = F_a(m) \cdot F_a(-n) = (a^m) \cdot (a^{-n}) = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = \frac{F_a(m)}{F_a(n)}$$

■

Propriedade 3.7. *Dado n natural, $F_a\left(\frac{1}{n}\right) = a^{\frac{1}{n}}$.*

Demonstração: Ao mostrarmos que $F_a\left(\frac{1}{n}\right) = a^{\frac{1}{n}}$ mostraremos também que $F_a\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{a}$, pois, do capítulo anterior, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

De fato,

$$1 = \frac{n}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n\text{-parcelas}},$$

deste modo:

$$F_a(1) = F_a\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = F_a\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n\text{-parcelas}}\right),$$

logo,

$$F_a(1) = \underbrace{F_a\left(\frac{1}{n}\right) \cdot F_a\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \dots \cdot F_a\left(\frac{1}{n}\right)}_{n\text{-fatores}} = \left[F_a\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n.$$

Como, $F_a(1) = a$, extraindo a raiz n -ésima em ambos os lados da igualdade $a = \left[F_a\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n$, obtemos:

$$a = \left[F_a\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n \Rightarrow \sqrt[n]{a} = F_a\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} = F_a\left(\frac{1}{n}\right).$$

Portanto, mostramos que $F_a\left(\frac{1}{n}\right) = a^{\frac{1}{n}}$.

■

Propriedade 3.8. Se $r \neq 0$ é um racional, então $F_a(r) = a^r$.

Demonstração: Demonstraremos inicialmente o caso em que $r > 0$.

Como r é um racional positivo temos $r = \frac{m}{n}$ com $m, n \in \mathbb{N}$. E deste modo:

$$r = \frac{m}{n} = m \cdot \frac{1}{n} = \underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{m\text{-parcelas}},$$

disto segue:

$$F_a(r) = F_a\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{m\text{-parcelas}}\right) = \underbrace{F_a\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \dots \cdot F_a\left(\frac{1}{n}\right)}_{m\text{-fatores}} = \left[F_a\left(\frac{1}{n}\right)\right]^m,$$

e assim:

$$F_a(r) = \left[F_a\left(\frac{1}{n}\right)\right]^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = a^r.$$

Para o caso em que $r < 0$ basta notar que

$$r = -\frac{m}{n} = m \cdot \left(-\frac{1}{n}\right) = \underbrace{\left(-\frac{1}{n}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{n}\right)}_{m\text{-parcelas}},$$

e seguir as ideias como fizemos acima.

■

Afirmamos ainda que $F_a(x) = a^x$ para todo x real.

De fato, veja que para x racional isto já está garantido pelas propriedades que acabamos de demonstrar.

O item 3 da Definição 3.1 garante que há uma única maneira de definir a potência a^x quando x é um número irracional. Veja que este item da definição diz que a função F_a deve ser crescente para $a > 1$ e decrescente para $0 < a < 1$.

Suponhamos $a > 1$, então a função F_a é crescente.

Se $r, s \in \mathbb{Q}$ com $r < s$ e x for um irracional tal que $r < x < s$ então

$$F_a(r) < F_a(x) < F_a(s) \Rightarrow a^r < F_a(x) < a^s.$$

Não poderíamos ter $F_a(x) \neq a^x$ para x irracional, pois neste caso, se supormos

$$F_a(x) < x,$$

teríamos

$$a^r < F_a(x) < x < a^s,$$

mas este fato nos leva a concluir que não existe no intervalo $[F_a(x), x]$ nenhum número racional que seja potência de a , e isso é um absurdo, pois contradiz o seguinte lema.

Lema 3.9. *Dado um real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^+$ existe alguma potência a^r com $r \in \mathbb{Q}$.*

Demonstração Para provar, basta que mostremos que em todo intervalo de \mathbb{R}^+ , em especial no intervalo $]\alpha, \beta[$, fixado $a \neq 1$ existe um racional r tal que a potência a^r pertença ao intervalo, ou seja, $\alpha < a^r < \beta$.

Com efeito, para simplificar, vamos supor que a, α, β e r são maiores do que 1, os demais casos são semelhantes.

Como, para $a > 1$, as potências a^n , com n natural crescem acima de qualquer valor real prefixado (Veja Propriedade 2.21), podemos encontrar naturais n e M tais que

$$\alpha < \beta < a^M,$$

e

$$1 < a < \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}\right)^n. \quad (1)$$

Agora, extraindo a raiz n -ésima de todos os termos da Desigualdade (1) acima teremos:

$$\sqrt[n]{1} < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{\left(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}\right)^n},$$

então,

$$1 < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}. \quad (2)$$

Subtraindo 1 em todos os termos da Desigualdade (2) obtemos:

$$0 < a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{\beta - \alpha}{a^M}. \quad (3)$$

Como a^M é um número real positivo, multiplicando todos os termos da Desigualdade (3) acima por a^M , temos:

$$0 < a^M \cdot (a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha$$

Seja m um inteiro não negativo tal que $\frac{m}{n} \leq M$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} &\leq M \\ \Rightarrow 0 < a^{\frac{m}{n}} &\leq a^M \\ \stackrel{(\bullet\bullet)}{\Rightarrow} 0 < a^{\frac{m}{n}}(a^{\frac{1}{n}} - 1) &\leq a^M(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha \\ \Rightarrow 0 < a^{\frac{m}{n}}(a^{\frac{1}{n}} - 1) &< \beta - \alpha \\ \Rightarrow 0 < a^{\frac{m}{n} + \frac{1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} &< \beta - \alpha \\ \Rightarrow 0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} &< \beta - \alpha, \end{aligned}$$

e assim as potências $a^0; a^{1/n}; a^{2/n}, \dots, a^{m/n}, \dots, a^M$ são extremos de intervalos consecutivos (veja Figura 9) com comprimentos menores que $\beta - \alpha$ que é o comprimento do intervalos $[\alpha; \beta]$.

Como $[\alpha; \beta] \subset [1, a^M]$, pelo menos uma das potências, digamos $a^{\frac{m}{n}}$ cairá dentro do intervalo $[\alpha; \beta]$, como queríamos mostrar.

O passo $(\bullet\bullet)$ justifica-se por: $a > 1 \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} > 1 \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$.

■

Agora, baseados no Lema 3.9, podemos concluir que quando x é irracional, a potência a^x é o único número real cujas aproximações por falta são as potências a^r com $r < x$, e as únicas

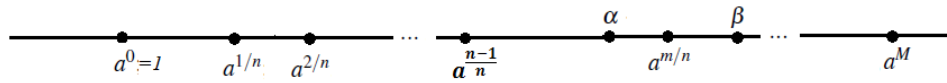


Figura 9: Intervalos Consecutivos de extremos $a^0; a^{1/n}; a^{2/n}, \dots, a^{m/n}, \dots, a^M$

aproximações por excesso são as potências a^s com $x < s$, pois, como vimos:

$$a^r < a^x < a^s,$$

E deste modo, $F_a(x) = a^x$.

Portanto, concluímos que, se $F_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função que cumpre as condições da Definição 3.1 para ser função exponencial, então o valor $F_a(x)$ para x irracional é dado por pelo limite da sequência (r_n) :

$$F_a(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_a(r_n)$$

onde (r_n) é uma sequência de números racionais, tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} (r_n) = x$, onde $r_n = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n$, ou em outras palavras, r_n é a uma aproximação, por falta, de x com n casas decimais exatas.

Veja que com esta última conclusão, acabamos por mostrar que:

Afirmção 3.10. *As Definições (2.15) e (3.1) são equivalentes.*

Para provar esta propriedade, basta observar que as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida em 2.15 e $F_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida em 3.1, são monótonas, levam produtos em somas e em ambas temos $f(1) = a^1 = a = F_a(1)$.

Propriedade 3.11. *A função $F_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $F_a(x) = a^x$, é ilimitada superiormente.*

Demonstração: Ampliando o domínio de \mathbb{Q} para \mathbb{R}^+ , a demonstração desta propriedade decorre imediatamente do lema que mostramos a pouco, uma vez que todo intervalos de \mathbb{R}^+ contém valores de $F_a(r) = a^r$.

■

Outro fato interessante a ser observado, é o da propriedade abaixo.

Propriedade 3.12. *A Função Exponencial é contínua.*

Uma demonstração desta propriedade foi dada quando demonstramos a Propriedade 2.22 e pode ser retomada caso o leitor esteja interessado.

Propriedade 3.13. *A Função Exponencial é bijetiva.*

Não demonstraremos detalhadamente essa propriedade, pois já o fizemos no capítulo anterior. Dizer que a Função Exponencial é bijetiva significa dizer que a Função Exponencial é injetiva e sobrejetiva.

Mostrar que a Função Exponencial é injetiva é relativamente simples pois, para mostrar a injetividade, basta mostrar que dados $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x \neq y$ então temos $F_a(x) \neq F_a(y)$, mas isso é consequência imediata do item 3 da Definição 3.1.

O mesmo item 3 da definição também nos dá a monotonicidade da Função Exponencial.

A garantia da sobrejetividade nos é dada por um Corolário¹ do Teorema do Valor Intermediário², pois dado $y \in \mathbb{R}^+$, supondo $y > 1$, existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $a^r > y$ (pois a Função Exponencial é ilimitada superiormente), logo temos que $1 < y < a^r$, então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $x \in]0, r[$ tal que $a^x = y$.

Esta última propriedade é importante, pois sendo a Função Exponencial bijetiva, ela pode ser invertida, e assim, poderemos mais adiante definir a função inversa da Função Exponencial.

As funções exponenciais são, juntamente com as funções afins e as quadráticas, os modelos matemáticos mais utilizados para resolver problemas elementares. As funções afins ocorrem em praticamente todos os problemas durante os oito primeiros anos de escola e, com menos exclusividade, porém ainda com grande destaque, nos três anos finais. Por sua vez, as funções quadráticas e exponenciais aparecem nesses três últimos anos, embora tenham, principalmente as últimas, importância considerável na universidade, bem como nas aplicações de Matemática em atividades científicas profissionais. (LIMA, 2013b, p.184)

Na escolha das ferramentas adequadas para a resolução de um problema, é importante que conheçamos as propriedades que caracterizam cada uma das funções matemáticas clássicas. Por este motivo, apresentamos agora o seguinte resultado:

Teorema 3.14 (Caracterização da Função Exponencial). *Seja $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva. As propriedades a seguir são equivalentes:*

- 1) $F(nx) = F(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;
- 2) $F(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = F(1)$

¹ **Corolário:** Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no intervalo I (fechado ou não, limitado ou ilimitado). Se $a < b$ pertencem a I e $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in I$ tal que $f(c) = d$. (LIMA, 2008)

² **Teorema do Valor Intermediário:** Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = d$. (LIMA, 2008), p.235

3) $F(x+y) = F(x) \cdot F(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$

Para demonstrar este teorema, basta que mostremos as seguintes implicações

$$1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1).$$

Demonstração: Mostraremos inicialmente a primeira implicação $1) \Rightarrow 2)$.

Neste caso tomamos 1) como hipótese e 2) como tese, em outras palavras, queremos mostrar que sendo $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva tal que $F(nx) = F(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$; então $F(x) = a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = F(1)$, e suponhamos $a > 1$.

Da hipótese $F(nx) = F(x)^n$ temos que, para todo racional $r = \frac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ temos que $nr = m \in \mathbb{Z}$ e assim:

$$F(rx)^n = F(n \cdot rx) = F(mx) = F(x)^m.$$

Extraindo a raiz n -ésima de $F(rx)^n = F(x)^m$, temos que:

$$F(rx) = F(x)^{\frac{m}{n}} = F(x)^r.$$

Pondo $F(1) = a$, teremos $F(r) = F(r \cdot 1) = F(1)^r = a^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Resta mostrar que $F(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Para isto, admitamos F crescente, com $F(0) = 1 < F(1) = a$ e suponhamos, por absurdo, que exista algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) \neq a^x$, podemos por $F(x) < a^x$ (o caso em que $F(x) > a^x$ é análogo), então pelo Lema 3.9, existe um racional r tal que $F(x) < F(r) = a^r < a^x$, ou seja, $F(x) < F(r) \Rightarrow x < r$ pois F é crescente. Temos ainda que $a^r < a^x \Rightarrow r < x$, o que é uma contradição. Logo, $F(x) = a^x$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Portanto, está provado que $1) \Rightarrow 2)$.

Mostraremos agora a segunda implicação, $2) \Rightarrow 3)$.

Neste caso temos que mostrar que, sendo $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva tal que $F(x) = a^x$ para qualquer x real, e $a = F(1)$ então, para quaisquer x, y reais, F leva soma em produtos, ou seja, $F(x+y) = F(x) \cdot F(y)$.

Mas veja que, F monótona injetiva, tal que $F(x) = a^x$ está de acordo com a Definição 2.15, e portanto, já está provado na Propriedade 2.26 que $F(x+y) = F(x) \cdot F(y)$.

Assim está provado que $2) \Rightarrow 3)$.

Para concluir a demonstração, mostraremos agora a última implicação, 3) \Rightarrow 1).

Agora, devemos mostrar que se $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva tal que para quaisquer x, y reais tem-se $F(x+y) = F(x) \cdot F(y)$ então, $F(nx) = F(x)^n$ para todo n inteiro e x real.

Se $n = 0$ é imediato, pois $0 \cdot x = 0 \Rightarrow F(0 \cdot x) = F(0) = 1 = F(x)^0$.

Suponhamos n positivo (o caso $n < 0$ é análogo). Temos $nx = \underbrace{x + x + \dots + x}_{n\text{-parcelas}}$, e assim:

$$F(nx) = F(\underbrace{x + x + \dots + x}_{n\text{-parcelas}}) \stackrel{(\circ)}{=} \underbrace{F(x) \cdot F(x) \cdot \dots \cdot F(x)}_{n\text{-fatores}} = F(x)^n.$$

Veja que a igualdade (\circ) é obtida usando-se a hipótese $F(x+y) = F(x) \cdot F(y)$.

Portanto, 3) \Rightarrow 1). E assim concluímos nossa demonstração. ■

Este teorema mostra que o item 1 da Definição 3.1 pode ser substituído por qualquer uma das propriedades 1) e 2) do Teorema 3.14.

Além disso, a Definição 3.1 pode ser enunciada substituindo-se a hipótese da monotonicidade pela hipótese de continuidade de F . A única diferença que teríamos na demonstração do Teorema 3.14 seria na primeira implicação, 1) \Rightarrow 2), para x irracional. Teríamos então, $x = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$, com $r_n \in \mathbb{Q}$, e pela continuidade de F :

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = a^x.$$

3.2 LOGARITMOS

Acabamos de ver que para todo real positivo $a \neq 1$, a Função Exponencial de base a $F_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, dada por $F_a(x) = a^x$ é uma correspondência biunívoca, ou seja, é uma função bijetiva, e portanto possui função inversa, sendo:

Definição 3.15 (Logaritmo). *A função inversa da Função Exponencial de base a , é a função $\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número real positivo x o número real $\log_a(x)$, chamado de **logaritmo de x na base a** .*

Como mostramos que as definições de Função Exponencial que apresentamos nos Capítulos 2 e neste capítulo são equivalentes, é óbvio que a Função Logarítmica aqui defi-

nida é a mesma que definimos no Capítulo 2, e portanto, goza das mesmas propriedades que já trabalhamos anteriormente.

As Funções Exponencial e Logarítmica tem grande importância para a Matemática, como Lima(2013b) diz:

Esta propriedade de transformar produtos em somas foi a motivação original para a introdução dos logaritmos, no início do século 17, e de sua popularidade, até bem recentemente, como um eficiente instrumento de cálculo.

O uso generalizado das calculadoras, cada vez mais desenvolvidas, fez com que essa utilidade inicial dos logaritmos perdesse o sentido. Entretanto, a função logaritmo continua extremamente importante na Matemática e em suas aplicações.

Essa importância é permanente: jamais desaparecerá porque, sendo a inversa da função exponencial (portanto equivalente à ela), a função logaritmo está ligada a um grande número de fenômenos e situações naturais [...]. (LIMA, 2013b, p.192)

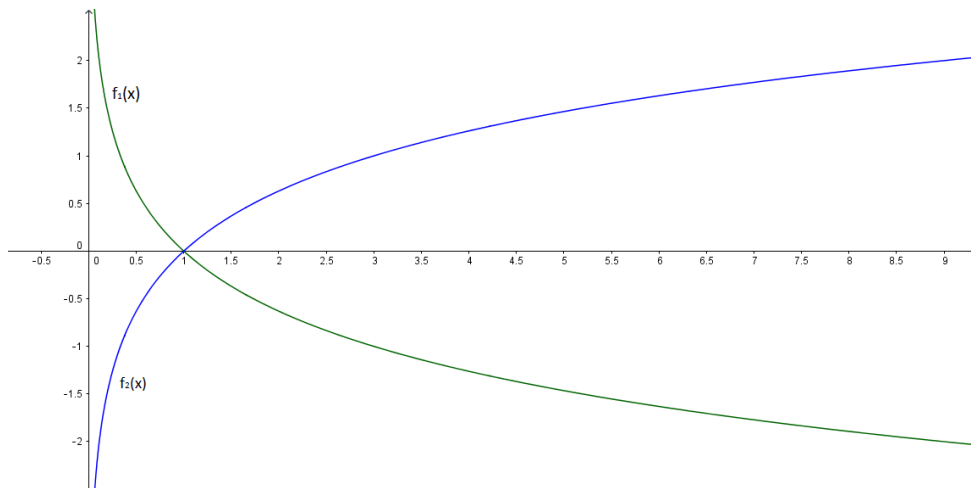


Figura 10: Gráfico das funções $f_1(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x)$ e $f_2(x) = \log_3(x)$

Por ser a inversa da Função Exponencial, ressaltamos que apenas números reais positivos possuem logaritmo real, pois a Função Exponencial $F_a(x) = a^x$ assume apenas valores positivos.

A Função Logarítmica $\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$. Como $a^0 = 1$ temos que $\log_a 1 = 0$.

Para exemplificar, consideremos a Função Logarítmica $f_1(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x)$, de base $\frac{1}{3}$, decrescente, e a Função Logarítmica $f_2(x) = \log_3(x)$, de base 3, crescente, cujos gráficos apresentamos na Figura 10.

Vejam que, as Funções Logarítmicas são crescentes quando a base $a > 1$ e $\log_a 1 = 0$,

tem-se que $\log_a(x) > 0$ para $x > 1$ e ainda $\log_a(x) < 0$ para $0 < x < 1$, como é o caso da função $f_2(x) = \log_3(x)$.

Por outro lado, quando $0 < a < 1$ as Funções Logarítmicas são decrescentes e temos $\log_a(x) < 0$ para $x > 1$ e $\log_a(x) > 0$ para $0 < x < 1$, como a função $f_1(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x)$.

Poderíamos escolher, para exemplificar, quaisquer outras bases no lugar de 3 e $\frac{1}{3}$, desde que os valores escolhidos sejam positivos e diferentes de 1. A opção por estes valores para exemplo e desenho dos gráficos é uma escolha pessoal e não um padrão a ser adotado.

Os gráficos das funções logarítmicas de bases diferentes das que traçamos tem as mesmas características dessas que desenhamos.

Podemos afirmar que, considerando as funções logarítmicas $y_1(x) = \log_{a_1}(x)$ com $0 < a_1 < 1$ e $y_2(x) = \log_{a_2}(x)$ com $a_2 > 0$, existiriam duas constantes reais k_1 e k_2 , tais que, para todo $x > 0$,

$$y_1 = k_1 \cdot f_1(x), \text{ isto é, } \log_{a_1}(x) = k_1 \cdot \log_{\frac{1}{3}}(x), \quad (5)$$

e

$$y_2 = k_2 \cdot f_2(x), \text{ isto é, } \log_{a_2}(x) = k_2 \cdot \log_3(x). \quad (6)$$

Mostraremos a validade de (5), a outra pode ser verificada de forma semelhante.

Seja $u = \log_{a_1}(x)$, assim, $a_1^u = x$. Seja ainda $v = \log_{\frac{1}{3}}(x)$, logo $(\frac{1}{3})^v = x$. Disto temos que $a_1^u = (\frac{1}{3})^v$. Tome $k_1 = \log_{a_1} \frac{1}{3}$, e assim teremos $a_1^{k_1} = \frac{1}{3}$, e daí:

$$x = a_1^u = (\frac{1}{3})^v = (a_1^{k_1})^v = a_1^{k_1 \cdot v} \Rightarrow u = k_1 \cdot v \Rightarrow \log_{a_1}(x) = k_1 \cdot \log_{\frac{1}{3}}(x).$$

■

De maneira geral, é verdade que

$$\log_a(x) = \log_a(b) \cdot \log_b(x),$$

e esta igualdade é a chamada **fórmula de mudança** de base para logaritmos.

Como $\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função bijetiva (pois é uma função inversa), e portanto sobrejetiva, a função logarítmica assume todos os valores de seu contradomínio, ou seja, todas os números reais, e por isso $f(x) = \log_a(x)$ é uma função ilimitada tanto inferiormente quanto superiormente. Enquanto a função exponencial cresce muito rapidamente, a função logarítmica, por sua vez, cresce lentamente. Por serem funções inversas, os gráficos dessas funções, quando desenhadas em um mesmo plano, são simétricos em relação à reta identidade $y = x$, como

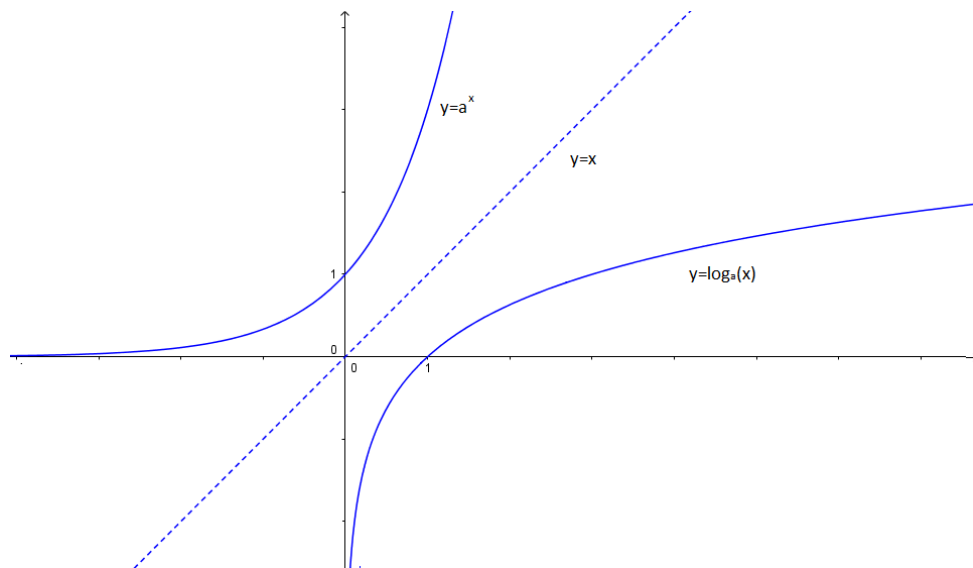


Figura 11: Gráfico de $y = a^x$, $y = x$ e $y = \log_a(x)$

podemos ver na Figura 11.

A seguir trazemos o teorema de caracterização das Funções Logarítmicas, que prova que essas funções são as únicas, entre as monótonas injetivas com domínio \mathbb{R}^+ e contradomínio \mathbb{R} , que levam produtos em somas.

Teorema 3.16 (Caracterização das Funções Logarítmicas). *Seja $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$. Então existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a(x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$.*

Demonstração Parte 1: Sem perda de generalidade, vamos supor que a função f é crescente, a demonstração para o caso em que f é decrescente é semelhante. Veja inicialmente que $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$ e assim temos $f(1) = 2 \cdot f(1)$ o que só é possível se $f(1) = 0$.

Suponhamos que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = 1$ (na segunda parte da demonstração mostraremos como obter a , logo esta não é uma hipótese adicional). Como supomos f crescente, e $f(a) = 1 > 0 = f(1)$, temos que $a > 1$.

Para qualquer número natural n temos:

$$f(a^n) = f(a \cdot a \cdot a \cdots a) = f(a) + f(a) + \cdots + f(a) = 1 + 1 + \cdots + 1 = n.$$

E deste modo, como $0 = f(1)$ e $1 = a^0 = a^{n-n} = a^n \cdot a^{-n}$ temos que $0 = f(a^n \cdot a^{-n}) = f(a^n) + f(a^{-n}) = n + f(a^{-n})$, e daí tem-se que $0 - n = f(a^{-n})$, ou seja, $f(a^{-n}) = -n$. Logo podemos tomar $n \in \mathbb{Z}$.

Dado agora um número racional $r = \frac{p}{q}$ com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$ temos então que $r \cdot q = p$, e portanto, pelo que foi mostrado anteriormente $p = f(a^p) = f(a^{r \cdot q}) = f((a^r)^q) = q \cdot f(a^r)$ e assim temos $f(a^r) = \frac{p}{q} = r$.

Agora, se x é um número irracional, e r e s são racionais tais que $r < x < s$, teremos que $a^r < a^x < a^s \Rightarrow f(a^r) < f(a^x) < f(a^s)$ pois f é crescente, e assim, $r < f(a^x) < s$. Assim, se r é um racional menor que um x irracional, r será também menor que $f(a^x)$. Do mesmo modo, se s é um racional maior que um irracional x , então s é também maior que $f(a^x)$. Segue-se então que $f(a^x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Como $f(a^x) = x$, acabamos de mostrar que a função f deste teorema é a função inversa da Função Exponencial, como existe uma única função inversa para uma função bijetiva, temos que f é a Função Logarítmica definida em 3.15.

Deste modo, $f(x) = \log_a x$ para todo $x > 0$.

Parte 2: Generalizando, considere, sem nem mais nenhuma hipótese ser necessária, uma função crescente $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$g(xy) = g(x) + g(y).$$

Por este motivo $g(1) = 0$, basta fazer $x = y = 1$, tomando agora $x = 2$ (ou qualquer outro número inteiro maior que 1), como $1 < 2$ devemos ter que $g(2) = b > 0$, pois g é crescente e $g(1) = 0$.

Definimos uma nova função $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = \frac{g(x)}{b}$, esta função é crescente, transforma somas em produtos e cumpre $f(2) = 1$. Logo, pelo que demonstramos acima, temos $f(x) = \log_2 x$ para todo $x > 0$, ou seja, é verdade que:

$$x = 2^{f(x)} = 2^{\frac{g(x)}{b}} = (2^{\frac{1}{b}})^{g(x)} = a^{g(x)},$$

com $a = 2^{\frac{1}{b}}$. Aplicando logaritmo em ambos os lados da igualdade $a^{g(x)} = x$ temos $g(x) = \log_a(x)$.



4 DEFINIÇÃO DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA ATRAVÉS DE PROPRIEDADES CARACTERIZADORAS

Uma das definições que exibimos anteriormente é a definição clássica de Logaritmos, que trás com ela algumas dificuldades conceituais. Para Lima(2013), “o desenvolvimento sistemático da teoria das potências com expoente real (racional e irracional), para servir de base para o estudo dos logaritmos, é um processo longo e tedioso” (LIMA, 2013a, p.13).

É normal que trabalhemos inicialmente com as Funções Exponenciais, mas não há impedimentos para que comecemos o estudo pelas Funções Logarítmicas, e é isto que faremos aqui.

Neste capítulo, vamos definir a Função Logarítmica através de duas propriedades que a caracterizam, sendo a primeira que a função é crescente, e a segunda propriedade é que ela leva produtos em somas.

Na definição que traremos aqui, poderíamos ter substituído a condição de a função ser crescente, pela condição de que ela seja decrescente, ou de maneira mais geral de de ela seja uma função monótona. Deixamos ao leitor o exercício de analisar o que acontecem com as propriedades que enunciaremos e demonstraremos aqui quando fazemos esta substituição.

Definida a Função Logarítmica, definimos a Função Exponencial como a sua função inversa.

4.1 FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Para iniciar o estudo geométrico dos Logaritmos, que faremos no Capítulo 5, é necessário mostrar que os Logaritmos se deixam caracterizar por duas propriedades extremamente simples e naturais, o que, segundo Lima (2013a), faz com que a escolha no modo de apresentá-los seja apenas uma questão de preferência, pois valendo essas duas propriedades, só há uma maneira de alterar um sistema de logaritmos: multiplicando por uma mesma constante todos os logaritmos desse sistema.

Definição 4.1 (Função Logarítmica). *Uma função real $L: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, cujo domínio é o conjunto*

\mathbb{R}^+ dos números reais positivos, chama-se *Função Logarítmica* ou um sistema de Logaritmos quando tem as seguintes propriedades:

a) L é uma função crescente, isto é, $x < y \implies L(x) < L(y)$;

b) $L(xy) = L(x) + L(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Para todo $x \in \mathbb{R}^+$, o número $L(x)$ chama-se o logaritmo de x .

Faremos agora a apresentação das propriedades das Funções Logarítmicas que são consequências da definição acima enunciada.

Propriedade 4.2. *Uma função logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é sempre injetiva, isto é, números diferentes tem logaritmos diferentes.*

Demonstração: Se $x, y \in \mathbb{R}^+$, com $x \neq y$, então obviamente $x < y$ ou $y < x$. Sem perda de generalidade, podemos supor aqui $x < y$, da parte a) da Definição 4.1, temos que $L(x) < L(y)$. O que nos leva a concluir que $L(x) \neq L(y)$. Portanto, a função L é injetiva.

■

Propriedade 4.3. *O logaritmo de 1 é 0, ou seja, $L(1) = 0$.*

Demonstração: De b) temos que $L(1) = L(1 \cdot 1) = L(1) + L(1) = 2 \cdot L(1)$, ou seja, $L(1) = 2 \cdot L(1)$ o que só é possível se $L(1) = 0$.

■

Propriedade 4.4. *Se $x \in \mathbb{R}^+$ e $x > 1$, então $L(x) > 0$. Se $x \in \mathbb{R}^+$ e $x < 1$, então $L(x) < 0$.*

Em outras palavras, a propriedade acima pode ser descrita como: *Os números reais positivos maiores que 1 tem logaritmo positivo, e os números reais positivos menores do que 1 tem logaritmo negativo.*

Demonstração: Para provar a Propriedade 4.4, basta observar que sendo L crescente, de $0 < x < 1 < y$ resulta $L(x) < L(1) < L(y)$ e assim temos $L(x) < 0 < L(y)$.

■

Propriedade 4.5. *Para todo $x > 0$, tem-se $L(\frac{1}{x}) = -L(x)$.*

Demonstração: Observemos que $x \cdot \frac{1}{x} = 1$, e da Propriedade 4.3 temos $L(1) = 0$, destes dois fatos:

$$0 = L(1) = L\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = L(x) + L\left(\frac{1}{x}\right),$$

ou seja, $L(x) + L\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, o que significa $L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x)$

■

Propriedade 4.6. Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$ é verdade que $L\left(\frac{x}{y}\right) = L(x) - L(y)$.

Demonstração: Lembremos que $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$, da propriedade anterior temos que $L\left(\frac{1}{y}\right) = -L(y)$, o que nos leva à:

$$L\left(\frac{x}{y}\right) = L\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = L(x) + L\left(\frac{1}{y}\right) = L(x) + (-L(y)) = L(x) - L(y).$$

■

Propriedade 4.7. Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo número racional $r = \frac{p}{q}$ tem-se que $L(x^r) = rL(x)$.

Demonstração: Para provar esta propriedade, inicialmente observemos que o item b) da Definição 4.1 pode ser estendido para um número qualquer de fatores, por exemplo,

$$L(x \cdot y \cdot z) = L(x \cdot (yz)) = L(x) + L(y \cdot z) = L(x) + [L(y) + L(z)] = L(x) + L(y) + L(z).$$

Repetindo este processo, podemos mostrar que:

$$L(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n) = L(x_1) + L(x_2) + \dots + L(x_n).$$

De maneira particular, se fizermos $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$ teremos que

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = \overbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}^{n\text{-vezes}} = x^n,$$

com $n \in \mathbb{N}$, e desta forma:

$$\begin{aligned} L(x^n) &= L(\overbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}^{n\text{-vezes}}) \\ &= \overbrace{L(x) + L(x) + \dots + L(x)}^{n\text{-vezes}} \\ &= n \cdot L(x). \end{aligned}$$

Com isso mostramos que esta propriedade vale quando $r = n$ for um número natural. É claro que ela vale também quando $r = 0$ pois para qualquer número $x \in \mathbb{R}^+$ temos que $x^0 = 1$ e assim $L(x^0) = L(1) = 0 = 0 \cdot L(x)$.

Consideremos agora o caso em que r é um inteiro negativo, ou seja, $r = -n, n \in \mathbb{N}$. Então, para todo $x > 0$ tem-se que $x^n \cdot x^{-n} = x^{n+(-n)} = x^{n-n} = x^0 = 1$. Logo,

$$L(1) = L(x^n \cdot x^{-n}) = L(x^n) + L(x^{-n}) = 0.$$

E desta forma temos que:

$$L(x^n) + L(x^{-n}) = 0 \implies L(x^{-n}) = -L(x^n) = -n \cdot L(x).$$

Resta mostrar agora o caso em que r é um número racional, ou seja, $r = \frac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. Já sabemos que para todo $x \in \mathbb{R}^+$ é válido:

$$(x^r)^q = (x^{\frac{p}{q}})^q = x^p.$$

Do que já provamos anteriormente temos:

$$q \cdot L(x^r) = L[(x^r)^q] = L(x^p) = p \cdot L(x).$$

Da igualdade $q \cdot L(x^r) = p \cdot L(x)$ temos $L(x^r) = \frac{p}{q} \cdot L(x)$, ou seja, temos $L(x^r) = r \cdot L(x)$ quando r é um número racional. Assim terminamos a demonstração desta propriedade. ■

Observe que as propriedades até aqui apresentadas valem para todas as Funções Logarítmicas, pois decorrem unicamente da Definição 4.1 apresentada no início desta seção, não importando portanto, a forma com que venhamos a definir logaritmo. A mesma observação é válida para as propriedades que ainda vamos apresentar.

Propriedade 4.8. *Uma função logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é ilimitada superiormente e inferiormente.*

Para provar esta propriedade, devemos mostrar que para quaisquer números reais α e β , podemos sempre encontrar números reais positivos x e y tais que $L(x) < \alpha$ e $L(y) > \beta$. Vamos agora demonstrar a propriedade.

Demonstração: Seja β um número real dado. Queremos encontrar $x > 0$ tal que $L(x) > \beta$. Para tanto, tome um número natural n tal que $n > \frac{\beta}{L(2)}$, como $L(2)$ é positivo (pois já mostramos anteriormente que o logaritmo de um número real positivo maior que 1 é positivo) temos que $n \cdot L(2) > \beta$.

Dos resultado já mostrados, temos ainda que $n \cdot L(2) = L(2^n)$, o que nos leva a concluir que $L(2^n) > \beta$, deste modo, basta tomar $x = 2^n$ que teremos $L(x) > \beta$, isto mostra que a Função Logarítmica é ilimitada superiormente, como queríamos.

Para provar que L é ilimitada inferiormente, basta lembrarmos que $L(\frac{1}{x}) = -L(x)$.

Dado qualquer número real α , como L é ilimitada superiormente, podemos encontrar um número real positivo x tal que $L(x) > -\alpha$.

Tome $y = \frac{1}{x}$ e teremos $L(y) = L(\frac{1}{x}) = -L(x) < \alpha$, ou seja, $L(y) < \alpha$, o que prova que a Função Logarítmica é ilimitada inferiormente.

■

É importante observar ainda que uma Função Logarítmica L não poderia estar definida para $x = 0$, pois se isto acontecesse, para qualquer $x \geq 0$ teríamos sempre $L(0) = L(x \cdot 0) = L(x) + L(0)$ o que nos daria $L(x) = 0$, e assim L seria identicamente nula (constante) que contraria o item *a*) da definição de Função Logarítmica, que diz que a função L deve ser crescente.

Seja $c \in \mathbb{R}$ uma constante positiva e seja $L: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ uma Função Logarítmica, então, pela Definição 4.1, a função $M: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $M(x) = c \cdot L(x)$ será também uma Função Logarítmica.

De fato, observe que M satisfaz as condições da Definição 4.1: a) M é crescente, pois, dados $x, y \in \mathbb{R}$, com $x < y$ e $c > 0$, como L é logarítmica, temos que $L(x) < L(y) \Rightarrow c \cdot L(x) < c \cdot L(y) \Rightarrow M(x) < M(y)$. b) $M(x \cdot y) = c \cdot L(x \cdot y) = c \cdot (L(x) + L(y))$, pois L é logarítmica, logo $M(x \cdot y) = c \cdot L(x) + c \cdot L(y) = M(x) + M(y)$. Portanto, M é uma Função Logarítmica.

Esta é a única forma de obter uma Função Logarítmica a partir de outra Função Logarítmica conhecida, conforme veremos no teorema a seguir.

Teorema 4.9. *Dadas as funções logarítmicas $L, M: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, existe uma constante $c > 0$ tal que $M(x) = c \cdot L(x)$ para todo $x > 0$.*

Demonstração: Primeiramente, suponhamos que existe um número real $a > 0$ tal que $L(a) = M(a)$, neste caso, mostraremos que $L(x) = M(x)$ para todo $x > 0$. De fato, como

$L(a) = M(a)$ concluímos que para todo r racional $L(a^r) = M(a^r)$.

$$L(a^r) = r \cdot L(a) = r \cdot M(a) = M(a^r).$$

Suponha, por absurdo, que exista algum real positivo b tal que $L(b) \neq M(b)$, sem perda de generalidade, vamos supor que $L(b) < M(b)$. Seja $n \in \mathbb{N}$ suficientemente tal que:

$$n \cdot [M(b) - L(b)] > L(a),$$

em outras palavras, n deve ser suficientemente grande para que:

$$M(b) - L(b) > \frac{1}{n} \cdot L(a),$$

ou seja:

$$L(a^{\frac{1}{n}}) = \frac{L(a)}{n} < M(b) - L(b).$$

Tomemos $c = L(a^{\frac{1}{n}})$. Os números $c, 2c, 3c, \dots$ dividem a semireta positiva em intervalos justapostos de mesmo comprimento c , como $c < M(b) - L(b)$ temos que pelo menos um desses números, digamos $m \cdot c$, pertence ao interior do intervalo aberto $]L(b), M(b)[$, ou seja, $L(b) < m \cdot c < M(b)$. Tem-se ainda que:

$$m \cdot c = m \cdot L(a^{\frac{1}{n}}) = L(a^{\frac{m}{n}}) = M(a^{\frac{m}{n}}),$$

e desta forma obtemos:

$$L(b) < L(a^{\frac{m}{n}}) = M(a^{\frac{m}{n}}) < M(b).$$

Como L é crescente, da primeira desigualdade acima temos $b < a^{\frac{m}{n}}$. Do mesmo modo, M também é crescente, e a segunda desigualdade nos dá $a^{\frac{m}{n}} < b$, o que é uma contradição, logo não existe b tal que $L(b) \neq M(b)$. Portanto devemos ter $M(x) = L(x)$ para todo $x > 0$ real. O caso geral pode ser reduzido ao caso particular provado. Dadas L e M , funções logarítmicas quaisquer, Seja $k \in \mathbb{R}$ tal que $k > 1$ temos então que $L(k) > 0$ e $M(k) > 0$.

Consideremos $c = \frac{M(k)}{L(k)}$ e a Função Logarítmica $P : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $P(x) = c \cdot L(x)$.

Afirmamos que $P = M$.

De fato, como $P(k) = c \cdot L(k) = \left[\frac{M(k)}{L(k)}\right] \cdot L(k) = M(k)$, segue do que já provamos acima que $P(x) = M(x)$ para qualquer $x > 0$ real, ou seja, é verdade que $M(x) = c \cdot L(x)$ para todo $x > 0$, como queríamos demonstrar.



Anteriormente já provamos que toda Função Logarítmica é injetiva. Mas será que dado um número real qualquer c é possível encontrar um número real positivo b tal que $L(b) = c$? Em outras palavras, as Funções Logarítmicas são sobrejetivas? A resposta para esta pergunta é sim.

Teorema 4.10. *Toda Função Logarítmica L é sobrejetiva, isto é, dado qualquer real b , existe sempre um número real positivo x tal que $L(x) = b$.*

A demonstração deste teorema, que pode ser ocultada numa primeira leitura, faz uso de um Lema que diz que todo intervalo aberto $I =]u, v[$ contém pelo menos um valor $L(x)$ da função L . Este lema pode ser considerado um resultado preliminar, uma vez que depois de provado o teorema, garantiremos que todo o intervalo I é formado por imagens de L .

Lema 4.11. *Seja $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ uma função logarítmica. Dados arbitrariamente dois números $u, v \in \mathbb{R}$ com $u < v$, existe $x > 0$ tal que $u < L(x) < v$.*

Demonstração (Lema): Fixe um número natural n de tal modo que $n > \frac{L(2)}{u-v}$. Logo temos que $\frac{L(2)}{n} < u - v$. Coloquemos $c = \frac{L(2)}{n}$. Os múltiplos inteiros $m \cdot c = \frac{m}{n} \cdot L(2) = L(2^{m/n})$, $m \in \mathbb{Z}$ decompõe a reta real em intervalos justapostos, cujo comprimento c é menor que o comprimento $v - u$ do intervalo real $I =]u, v[$. Deste modo, mostramos que pelo menos um desses múltiplos $m \cdot c = L(2^{m/n})$ cai no interior do intervalo $I =]u, v[$. Tomando $x = 2^{m/n}$ temos que $u < L(x) < v$.

■

Para entender o processo da demonstração do Teorema 4.10 enunciado acima que será descrito na demonstração do teorema, acompanhemos o exemplo.

Exemplo 4.12. *Vamos encontrar o número real x tal que $L(x) = 3,4593$ onde L é uma Função Logarítmica tal que $L(10) = 1$.*

O número x tem representação decimal $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \cdots$ ¹.

Como a $L(10) = 1$ e L é uma Função Logarítmica, sabemos que

$$L(1000) = L(10 \cdot 10 \cdot 10) = L(10) + L(10) + L(10) = 1 + 1 + 1 = 3,$$

e do mesmo modo,

$$L(10000) = L(10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10) = L(10) + L(10) + L(10) + L(10) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4,$$

¹Para compreender melhor, veja Apêndice A ao final deste trabalho.

assim, o valor x que procuramos deve estar, inicialmente, entre 1000 e 10000, pois $3 < L(x) = 3,4593 < 4$, o que é um intervalo consideravelmente grande.

Nosso objetivo inicial é encontrar, neste intervalo, o menor inteiro c tal que $L(c) > 3,4593$, com o auxílio de uma planilha eletrônica, encontramos o inteiro $c = 2880$ pois $L(2880) \cong 3,459392488$, desta forma concluímos que $2879 < x < 2880$ e assim, já encontramos a parte inteira de nosso número x , ou seja, $a_0 = 2879$.

Agora, para encontrar a primeira casa decimal de x , devemos encontrar entre os números da sequência:

$$(x_n) = (2879; 2879,1; 2879,2; 2879,3; 2879,4; 2879,5; 2879,6; 2879,7; 2879,8; 2879,9; 2880)$$

dois termos c_1 e c_2 , consecutivos, tais que $L(c_1) < 3,4593 < L(c_2)$.

Novamente com o auxílio de uma planilha eletrônica, testamos os 11 termos da sequência e encontramos $c_1 = 2879,3$, com $L(2879,3) \cong 3,459286917$, e $c_2 = 2879,4$ com $L(2879,4) \cong 3,459302$. Ou seja, temos:

$$L(2879,3) < 3,4593 < L(2879,4).$$

Assim, a primeira casa decimal exata do nosso número x procurado é $a_1 = 3$, e assim $x = 2879,3a_2a_3 \cdots a_n \cdots$.

Vamos agora determinar a segunda casa decimal, a_2 , encontrando na sequência abaixo, dois termos consecutivos d_1 e d_2 tais que $L(d_1) < 3,4593 < L(d_2)$.

$$(y_n) = (2879,3; 2879,31; 2879,32; 2879,33; 2879,34; 2879,35; 2879,36; 2879,37; 2879,38; 2879,39).$$

Recorrendo mais uma vez a uma planilha eletrônica, encontramos $d_1 = 2879,38$ e $d_2 = 2879,39$ com

$$L(2879,38) \cong 3,459298984 \text{ e } L(2879,39) \cong 3,459300492.$$

E assim, concluímos que a segunda casa decimal do número x é $a_2 = 8$, e daí

$$x = 2879,38a_3a_4 \dots a_n \dots$$

Seguindo este processo, seremos capazes de encontrar as demais casas decimais, sendo:

$$a_0 = 2879; a_1 = 3; a_2 = 8; a_3 = 6; a_4 = 7; a_5 = 3; a_6 = 7; a_7 = 8; a_8 = 0; a_9 = 7; a_{10} = 9; a_{11} = 8;$$

e continuando o processo, poderíamos obter mais casas decimais exatas.

Desta forma, temos então que $x = 2879,38673780798\dots$

Lembrando que as planilhas eletrônicas tem um limite de cálculo de casas decimais precisas, mesmo que este seja maior que das calculadoras comuns, e por isso, não podemos afirmar com quais são todas as casas decimais do número a partir do número de casas decimais programados na máquina, no caso da máquina utilizada para o exemplo, a programação é de no máximo 12 casas decimais com precisão.

Seguimos agora com a demonstração do teorema da sobrejetividade das funções logarítmicas.

Demonstração Teorema (4.10): Dado um número real b qualquer, devemos obter um número real positivo α de modo que $L(\alpha) = b$. Para encontrar esse número α determinaremos um a um os números $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ que compõe o número real $\alpha = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$ e depois provaremos que de fato temos $L(\alpha) = b$.

Lembremos que L é uma função crescente ilimitada, logo devem existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $L(c) > b$. Seja $\beta_{a_0} + 1$ o menor inteiro² que satisfaz essa condição, ou seja, $\beta_{a_0} + 1$ é o menor inteiro tal que $L(\beta_{a_0} + 1) > b$. Disto temos que $L(\beta_{a_0}) \leq b < L(\beta_{a_0} + 1)$. Deste modo já encontramos o primeiro número $\beta_{a_0} = a_0$ que compõe o número real α que procuramos.

Consideremos os números:

$$\begin{aligned} & \beta_{a_0}; \\ & \beta_{a_0} + \frac{1}{10} = \beta_{a_0}, 1; \\ & \beta_{a_0} + \frac{2}{10} = \beta_{a_0}, 2; \\ & \dots; \\ & \beta_{a_0} + \frac{9}{10} = \beta_{a_0}, 9; \\ & \beta_{a_0} + 1. \end{aligned}$$

De forma análoga ao que foi feito no Exemplo 4.12, devem existir nessa sequência de números, dois números consecutivos, que chamaremos de $\beta_{a_1} = a_0 + \frac{a_1}{10}$ e $\beta_{a_1} + \frac{1}{10}$, tais que

$$L(\beta_{a_1}) \leq b < L(\beta_{a_1} + \frac{1}{10}).$$

²A existência de tal número inteiro é garantida pelo Princípio da Boa Ordenação, ou seja, todo subconjunto não vazio $X \subset \mathbb{Z}$ possui um menor elemento, ou seja, existe um elemento $x_0 \in X$ que é menor que todos os outros elementos de X

Deste modo, $\beta_{a_1} = a_0 + \frac{a_1}{10} = a_0, a_1$, com $0 \leq a_1 \leq 9$, e assim, encontramos a primeira casa decimal a_1 de α .

Agora, para encontrarmos a segunda casa decimal, consideremos os números:

$$\begin{aligned} &\beta_{a_1}; \\ &\beta_{a_1} + \frac{1}{10^2}; \\ &\beta_{a_1} + \frac{2}{10^2}; \\ &\dots; \\ &\beta_{a_1} + \frac{9}{10^2}; \\ &\beta_{a_1} + \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Dentre estes números da sequência acima, devem existir dois consecutivos, chamados agora de β_{a_2} e $\beta_{a_2} + 1$, tais que

$$L(\beta_{a_2}) \leq b < L(\beta_{a_2} + \frac{1}{10^2}).$$

E assim, encontramos a segunda casa decimal a_2 de α , sendo $\beta_{a_2} = a_0, a_1 + \frac{a_2}{10^2} = a_0, a_1 a_2$, onde $0 \leq a_2 \leq 9$.

Seguindo com essa ideia, encontramos a representação decimal do número real α , com

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots$$

Logo, pondo $\alpha_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}$, tem-se:

$$L(\alpha_n) \leq b < L(\alpha_n + \frac{1}{10^n}), \text{ para todo } n \geq 0.$$

Afirmamos que $L(\alpha) = b$.

De fato, suponha, por absurdo, que temos $L(\alpha) < b$. Logo, usando o Lema 4.11, obtemos um $x > 0$ tal que $L(\alpha) < x < b$. Como L é crescente isto implica $\alpha < x$. Então, tomando n tão grande que $x - \alpha > \frac{1}{10^n}$ teríamos $\alpha + \frac{1}{10^n} < x$, logo

$$\alpha_n + \frac{1}{10^n} \leq \alpha + \frac{1}{10^n} < x.$$

Como L é crescente, do fato de que $x > \alpha_n + \frac{1}{10^n}$ resultaria

$$L(x) > L(\alpha_n + \frac{1}{10^n}) > b.$$

O que é um absurdo, uma vez que x foi obtido de modo que $L(x) < b$.

De maneira análoga, não se pode ter $L(\alpha) > b$, pois usando novamente o Lema 4.11, concluiríamos que $x < \alpha$. Isto implicaria, entretanto, que $x < \alpha_n$ para algum n . Então $L(x) < L(\alpha_n) \leq b$, contrariando o fato de que x foi obtido de modo a satisfazer $b < L(x)$.

■

Corolário 4.13. *Toda função logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma correspondência biunívoca (bijeção) de \mathbb{R}^+ em \mathbb{R} .*

A demonstração deste corolário é imediata, uma vez que já mostramos que as funções logarítmicas são injetivas (Propriedade 4.2) e sobrejetivas (Teorema 4.10).

Com qualquer função real podemos obter uma tábua de valores, montando uma tabela que relaciona em uma coluna os valores x e na outra coluna os valores de $f(x)$, se f for uma função arbitrária, pode acontecer de alguns (ou muitos) valores $f(x)$ se repetirem, ou seja, diferentes valores de x estão associados a um mesmo número na imagem da função.

O corolário acima mostra que toda tábua de uma função logarítmica (ou tábua de logaritmos) pode ser lida tanto da esquerda para a direita, como da direita para a esquerda. Dado um número real qualquer y , podemos buscar na tábua de logaritmos o número $x > 0$ do qual y é o logaritmo, ou seja, dado $y \in \mathbb{R}$ podemos encontrar $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $y = L(x)$, onde L é uma função logarítmica. A tabela inversa dos logaritmos, ou seja, quando lemos a tabela no sentido contrário, da direita para a esquerda, estamos lendo, na verdade, a tabela de uma função exponencial.

Outras duas consequências importantes do Teorema 4.10 estão descritas abaixo:

Corolário 4.14. *Para toda função logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ existe um único valor $a > 0$ tal que $L(a) = 1$. Para este número damos o nome de **base** do sistema de logaritmos L . Para explicitar a base é comum que se escreva $L_a(x)$ ao invés de $L(x)$.*

Corolário 4.15 (Mudança de Base). *Se $L_a(x)$ e $L_b(x)$ são duas funções logarítmicas, com $L_a(a) = L_b(b) = 1$, então existe uma constante c tal que $L_b(x) = c \cdot L_a(x)$, para todo número real x positivo. Se fizermos $x = a$ temos $L_b(a) = c$. Disso concluímos que*

$$L_b(x) = L_b(a) \cdot L_a(x).$$

para todo $x > 0$. Esta é a conhecida **Fórmula de Mudança de Base de logaritmos**.

Propriedade 4.16. *A função logarítmica é contínua.*

Para provar esta propriedade, basta observar que a função logarítmica é monótona e sua imagem é um intervalo, logo é contínua.

4.2 FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Como as funções logarítmicas $L: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ são bijetivas podemos falar da inversa dessas funções.

Definição 4.17 (Função Exponencial). *Seja $L: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ uma função logarítmica. Chamaremos “Função Exponencial de base a ” a função $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, inversa de L , ou seja, $E(x) = L^{-1}(x)$, onde a é tal que $L(a) = 1$.*

Afirmamos que a função que definimos na Definição 4.17 é a mesma função que definimos na Definição 3.1, ou seja, as definições são equivalentes.

Vamos verificar isso mostrando que E possui as três propriedades da Definição 3.1:

1) Basta mostrar que $E(x_1) \cdot E(x_2) = E(x_1 + x_2)$ para quaisquer x_1 e x_2 reais.

De fato, como L e E são funções inversas temos: $L(E(x_1)) = x_1$ e $L(E(x_2)) = x_2$, o que nos dá

$$x_1 + x_2 = L(E(x_1)) + L(E(x_2)).$$

Calculando $E(x_1 + x_2)$:

$$E(x_1 + x_2) = E(L(E(x_1)) + L(E(x_2))) = E(L(E(x_1) \cdot E(x_2))) = E(x_1) \cdot E(x_2),$$

como queríamos.

2) Como $E(x)$ e $L(x)$ são funções inversas, temos que $E(L(x)) = x$ e $L(E(x)) = x$ e disto, $a = E(L(a)) = E(1)$, ou seja, $E(1) = a$, o que mostra a segunda propriedade.

3) Devemos mostrar agora, se que $x_1 < x_2$ então $E(x_1) < E(x_2)$ (como definimos L apenas crescente, mostraremos apenas o caso crescente, o caso decrescente quando definimos L decrescente fica como exercício).

Suponhamos por absurdo que $E(x_1) \geq E(x_2)$, como a função L é crescente por definição, teremos:

$$E(x_1) \geq E(x_2) \Rightarrow L(E(x_1)) \geq L(E(x_2)) \Rightarrow x_1 \geq x_2,$$

o que é uma contradição, pois supomos $x_1 < x_2$. Portanto, E é crescente.

Mostramos assim que as Definições 4.17 e 3.1 são equivalentes. E deste modo a função E aqui definida possui todas as propriedades da Função Exponencial que demonstramos nos capítulos anteriores.

5 DEFINIÇÃO DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA ATRAVÉS DO CONCEITO DE ÁREA DE UMA FAIXA DE HIPÉRBOLE

Neste capítulo trataremos em especial dos Logaritmos Naturais, visto que a partir deles e com a fórmula de mudança de base dos logaritmos, podemos construir todos os outros sistemas de logaritmos. Definiremos estes importantes logaritmos geometricamente. Para tal, iniciaremos com um breve estudo da Área de uma Faixa de Hipérbole, que é a área compreendida entre o gráfico da hipérbole, o eixo x e as retas $x = a$ e $x = b$, compreender esta área é importante pois há uma relação geométrica entre os conceitos que apresentaremos para os logaritmos.

Buscando, de maneira simplificada, conceitos que trazemos do Cálculo Diferencial e Integral, lembremos que, grosseiramente, a integral de uma função contínua e positiva f é a área abaixo da curva do gráfico da função e acima do eixo x e do Cálculo Diferencial e Integral sabemos também que

$$\int_1^x \frac{1}{y} dy = \ln(x)$$

que é exatamente o que definiremos aqui, mas sem usar especificamente os conceitos do Cálculo propriamente dito.

Os primeiros a reconhecerem uma relação estreita entre área de uma faixa de hipérbole e os logaritmos foram o padre jesuíta Gregory Saint Vicent, em 1647, e Isaac Newton, em 1660. As ideias de ambos mostram a concepção geométrica de uma função logarítmica é muito antiga, mesmo que nenhum deles tenha identificado o número e ou realmente identificado a relação das faixas de hipérbole com os logaritmos naturais. (LIMA, 2013a)

5.1 HIPÉRBOLE

Nesta seção não entramos em detalhes sobre as Hipérboles, apenas recordaremos alguns conceitos básicos. Ao leitor que desejar um aprofundamento recomendamos consultar um livro de Geometria Analítica.

Vamos supor fixado um sistema de eixos cartesianos, isto é, duas retas orientadas,

perpendiculares entre si, sendo cada ponto do plano representado por suas coordenadas x e y , isto é, (x,y) . Ou seja, consideraremos o plano cartesiano tradicional, como na Figura 12.

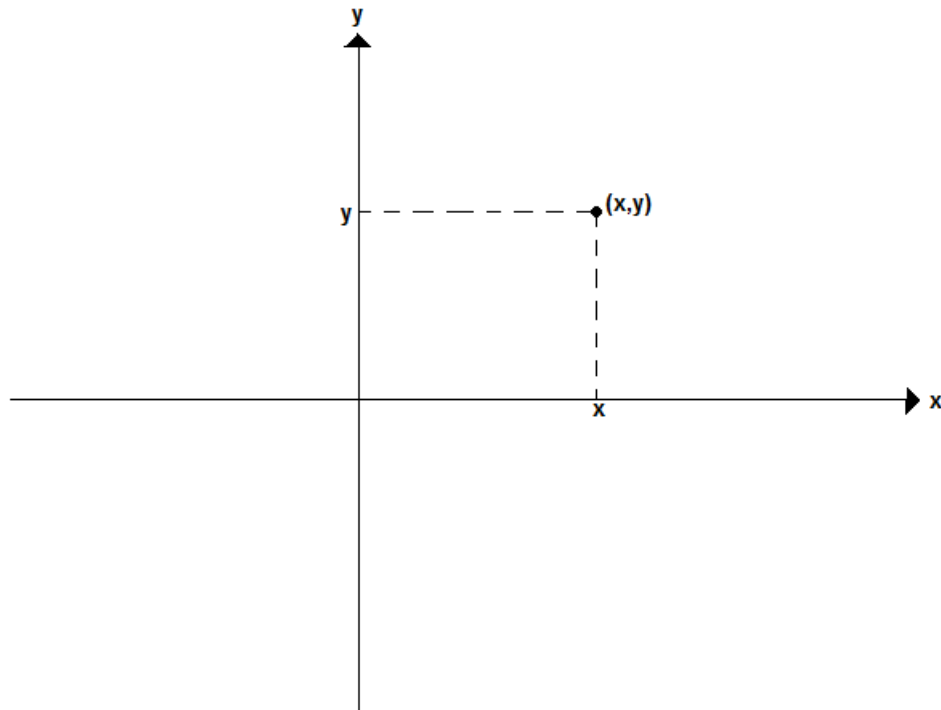


Figura 12: Plano Cartesiano

Lembre-se que dados dois pontos do plano $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, a distância entre os pontos P_1 e P_2 , denotada por $d(P_1, P_2)$ é dada por:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Como trabalharemos com faixas de Hipérbole, inicialmente recordemos a definição de Hipérbole.

Definição 5.1 (Hipérbole). Uma **Hipérbole** H , de focos F_1 e F_2 é o conjunto do plano que consiste de todos os pontos $P(x, y)$ tais que o módulo da diferença das distâncias de P a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, menor do que a distância entre os focos $2c \geq 0$. Simbolicamente,

$$H = \{P(x, y) : |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\};$$

$$0 \leq a \leq c;$$

$$d(F_1, F_2) = 2c.$$

Na Figura 13, temos a representação de uma Hipérbole com seus principais elementos.

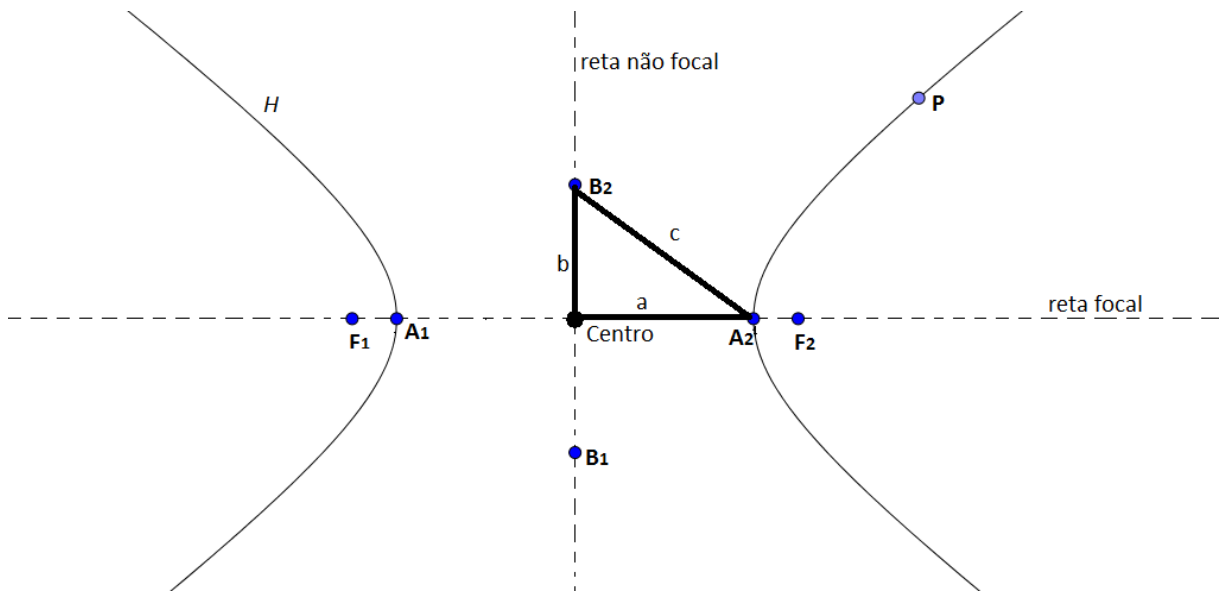


Figura 13: Hipérbole

Veja que a Hipérbole é simétrica em relação ao seu centro, em relação à reta focal (reta que passa pelos pontos F_1 e F_2) e em relação à reta não focal (reta perpendicular à reta focal, que passa pelo centro da Hipérbole). Além disso, temos que $c^2 = a^2 + b^2$, sendo c a metade da distância entre os focos F_1 e F_2 e a a metade da distância entre os vértices A_1 e A_2 .

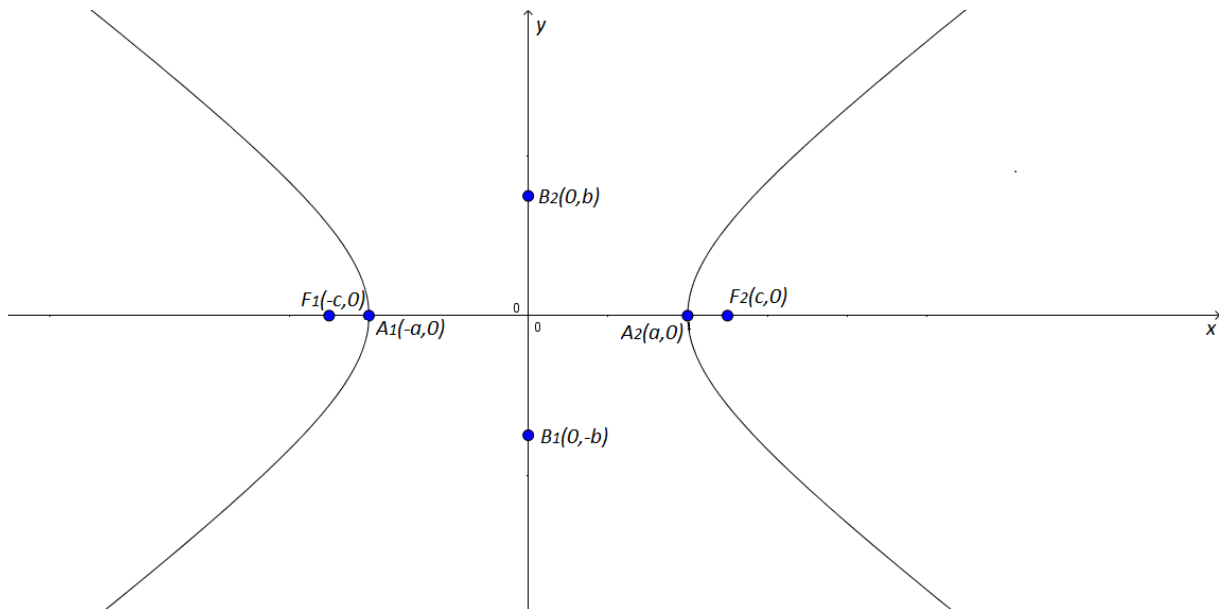


Figura 14: Hipérbole com centro na origem e focos sobre o eixo x .

Quando o centro C de uma Hipérbole é a origem do plano cartesiano, e seus focos

estão sobre o eixo x , a equação cartesiana da Hipérbole é

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

Seus focos são $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ e a reta focal é o próprio eixo x .

Seus vértices são $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$.

E ainda $B_1(0, -b)$ e $B_2(0, b)$ e a reta não focal será o eixo y , e

$$\left[\frac{d(F_1, F_2)}{2} \right]^2 = \left[\frac{d(A_1, A_2)}{2} \right]^2 + \left[\frac{d(B_1, B_2)}{2} \right]^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2.$$

A Hipérbole estará posicionada horizontalmente, como na Figura 14.

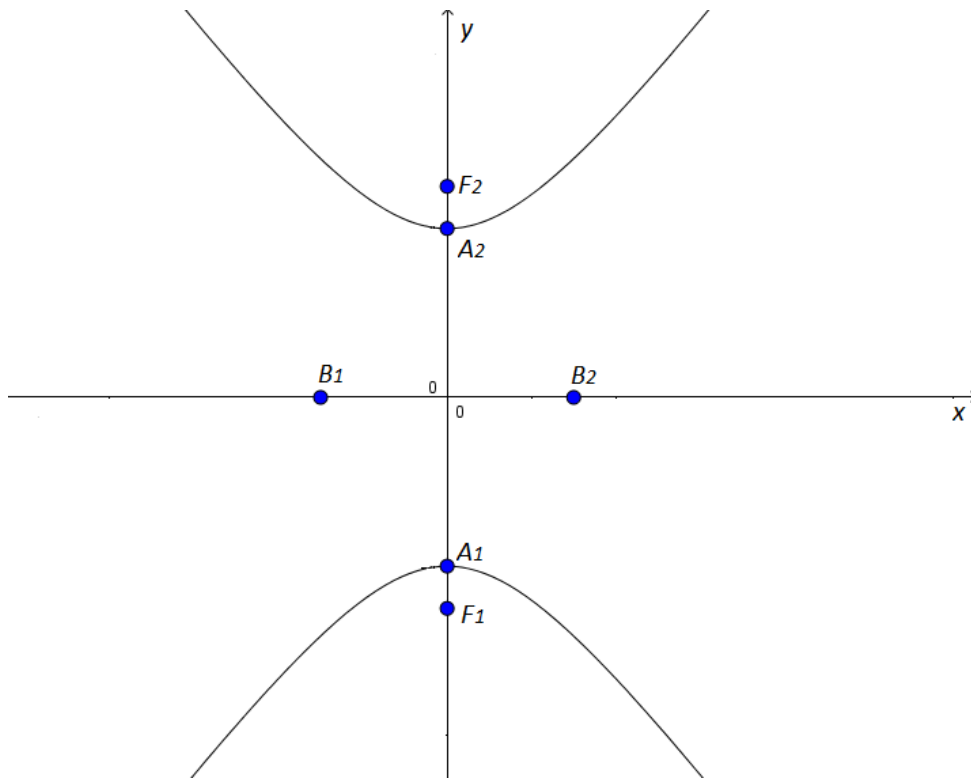


Figura 15: Hipérbole com centro na origem e focos sobre o eixo y

Quando o centro C de uma Hipérbole é a origem do plano cartesiano, e seus focos estão sobre o eixo y , a equação cartesiana da Hipérbole é

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

Seus focos são $F_1(0, -c)$ e $F_2(0, c)$ e a reta focal é o eixo y .

Seus vértices são $A_1(0, -a)$ e $A_2(0, a)$.

E ainda $B_1(-b,0)$ e $B_2(b,0)$ e a reta não focal será o eixo x , e

$$\left[\frac{d(F_1, F_2)}{2} \right]^2 = \left[\frac{d(A_1, A_2)}{2} \right]^2 + \left[\frac{d(B_1, B_2)}{2} \right]^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2.$$

A Hipérbole estará posicionada verticalmente, como na Figura 15.

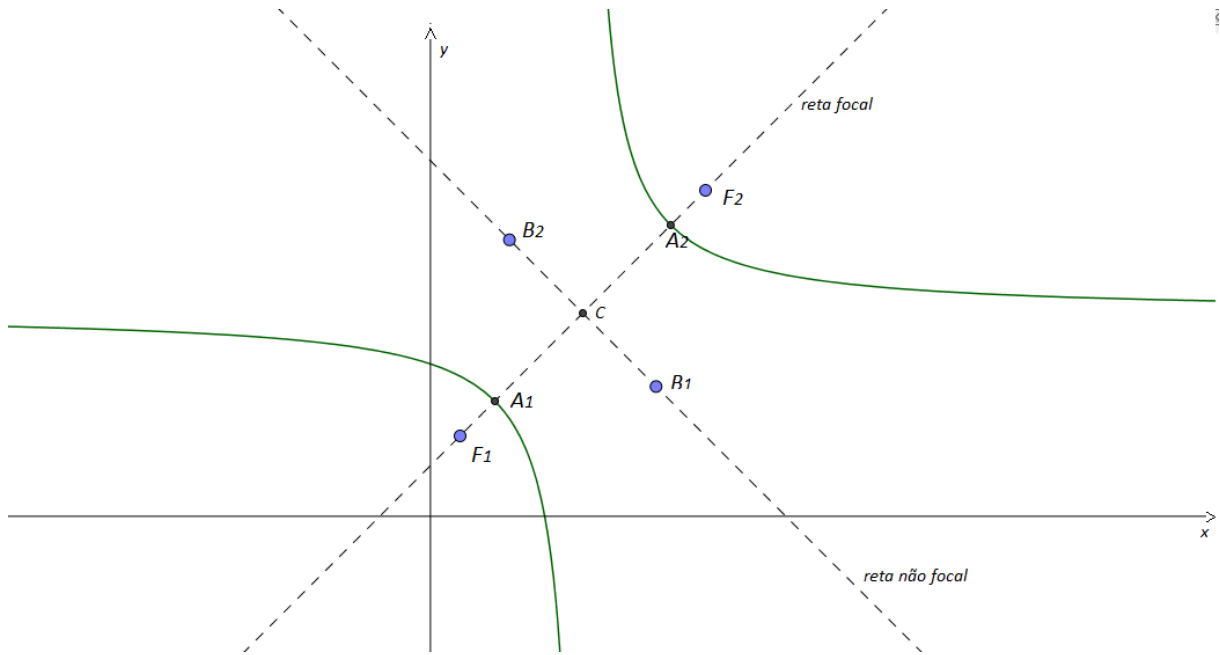


Figura 16: Hipérbole com centro em um ponto C do plano e reta focal não paralela aos eixos

Nem todas as Hipérboles tem como centro a origem do plano cartesiano, o centro de uma Hipérbole pode ser um ponto qualquer do plano. E nestes casos, pode acontecer ainda de que a reta focal não seja nem paralela à um dos eixos do plano cartesiano, como acontece na Figura 16.

5.2 ÁREA DE UMA FAIXA DE HIPÉRBOLE

Consideremos a função real $H : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $H(x) = \frac{1}{x}$ cujo gráfico é uma Hipérbole, onde \mathbb{R}^* é o conjunto dos números reais sem o número zero, ou seja, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$. Representamos o gráfico da função H na Figura 17

Para determinarmos uma faixa de Hipérbole vamos considerar apenas o ramo positivo do gráfico da função H , veja a Figura 18.

$$H = \left\{ (x, y) \mid x > 0, y = \frac{1}{x} \right\}.$$

Geometricamente, podemos dizer que H é um conjunto contido no primeiro quadrante do plano

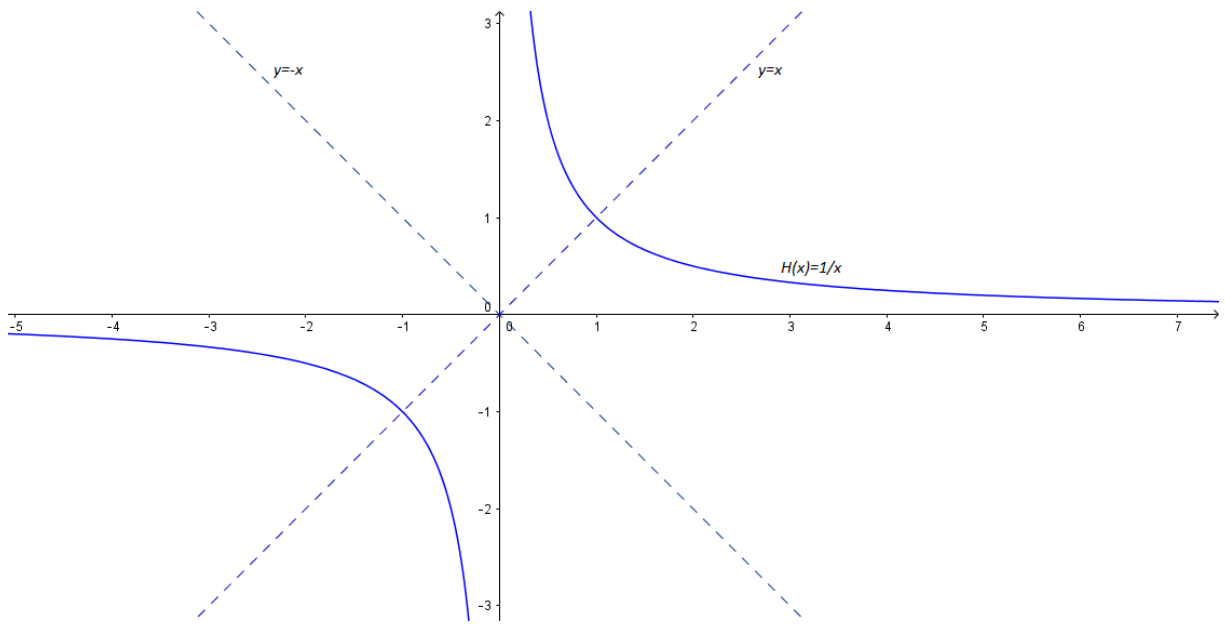


Figura 17: Gráfico da função $H(x) = \frac{1}{x}$: Hipérbole de centro na origem e reta focal $y = x$.

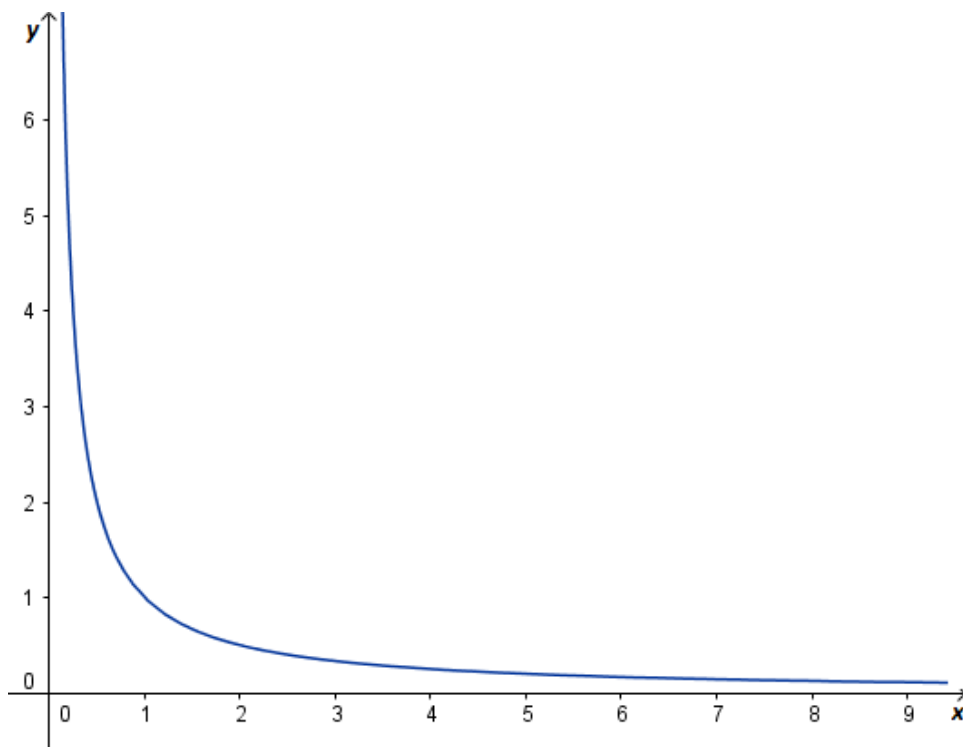


Figura 18: Ramo positivo da Hipérbole $h(x) = \frac{1}{x}$

cartesiano, e ainda $(x, y) \in H \iff x \cdot y = 1$.

Dados dois números reais positivos $a < b$, tomando a região H_a^b do plano limitada pelas duas retas verticais $x = a$, $x = b$, eixo x e pela Hipérbole $xy = 1$, veja a Figura 19 temos o que

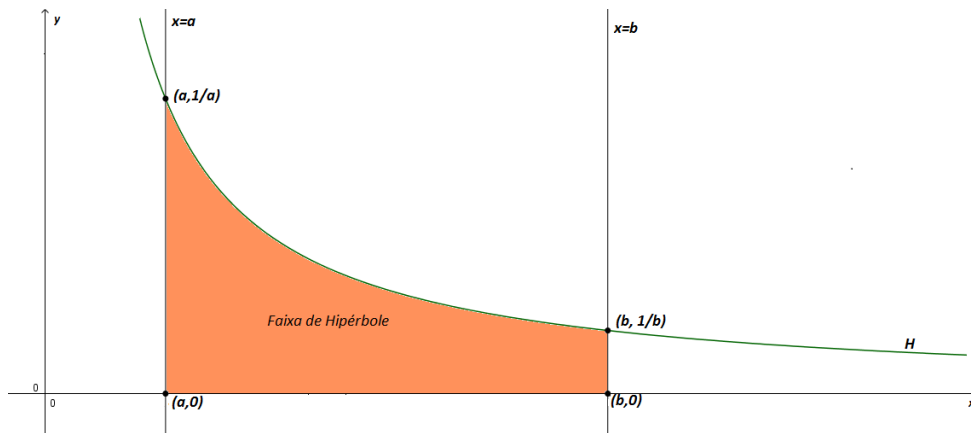


Figura 19: Faixa de Hipérbole

chamamos de **faixa de Hipérbole**.

Definição 5.2. A **faixa de Hipérbole** H_a^b é o conjunto dos pontos (x, y) do plano cartesiano em que $a \leq x \leq b$ e $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$, simbolicamente:

$$H_a^b = \left\{ (x, y) \mid a \leq x \leq b; 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\}.$$

Para calcular a área de uma faixa de Hipérbole, procedemos de maneira semelhante à que usamos no Cálculo Diferencial e Integral para calcular a área abaixo de uma curva, ou seja, inicialmente particionamos o intervalo $[a, b]$ em um número finito de intervalos justapostos (lado a lado), não necessariamente de mesmo comprimento.

Exemplo 5.3. Para clarear as ideias e facilitar a compreensão de como se dá a aproximação que queremos fazer nas faixas de Hipérbole, faremos a aproximação, por retângulos, da área da figura delimitada pelo eixo x , e pelo semi-círculo $(x - 3)^2 + y^2 = 9, y > 0$, representado na Figura 20. Veja que toda a base da figura tem 6u.c. (unidades de comprimento).

Faremos a aproximação por falta¹ do semicírculo.

Na Figura 21) dividimos o intervalo $[0; 6]$ em subintervalos, marcando sobre o eixo x os pontos:

$$G(3 - 2\sqrt{2}, 0); H(1, 0); I(2, 0); J(4, 0); K(5, 0) \text{ e } L(3 + 2\sqrt{2}, 0).$$

Em seguida, sobre a semicircunferência que delimita o semicírculo, marcamos os pontos

$$M(3 - 2\sqrt{2}, 1); N(1, \sqrt{5}); O(2, 2\sqrt{2}); P(4, 2\sqrt{2}); Q(5, \sqrt{5}) \text{ e } R(3 + 2\sqrt{2}, 1),$$

¹Dizemos que a aproximação da área do semicírculo é por falta pois a soma das áreas de todos os retângulos que formarmos será menor que a área real do semicírculo

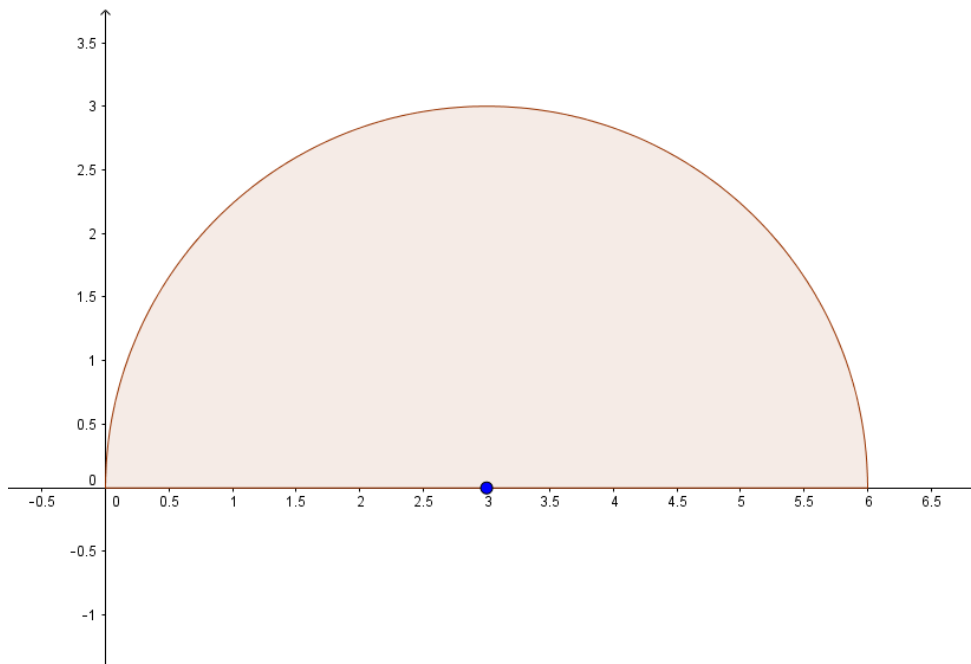


Figura 20: Semicírculo de centro $C(3,0)$ e raio 3.

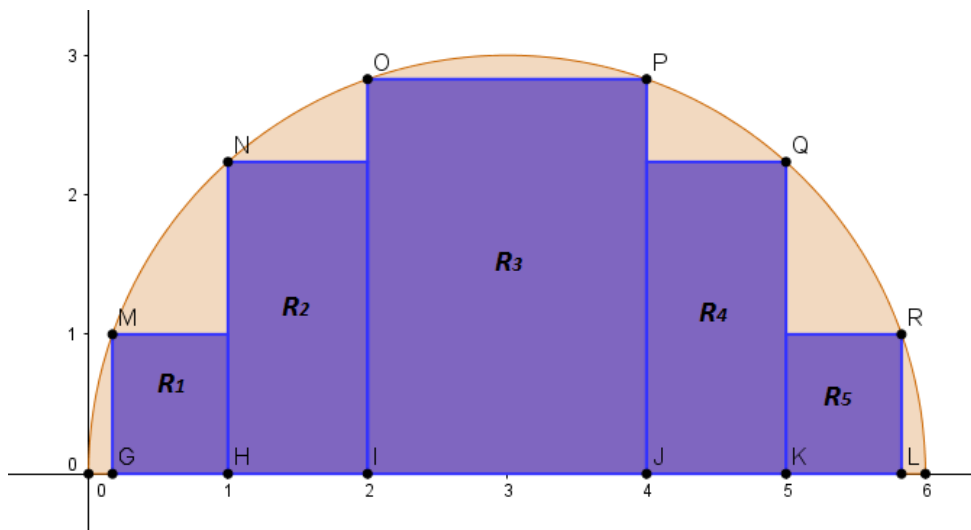


Figura 21: Cálculo da área de um semicírculo por aproximação.

de modo que os segmentos de reta \overline{GM} ; \overline{HN} ; \overline{IO} ; \overline{JP} ; \overline{KQ} e \overline{LR} sejam perpendiculares ao eixo x .

O retângulo R_1 terá como base o segmento de reta \overline{GH} de medida aproximada² $0,83u.c.$.

²Para calcular a medida de um segmento de reta basta calcular a distância entre os pontos que determinam esse segmento. No caso temos que a medida do segmento de reta \overline{GH} é a distância entre os pontos G e H , ou seja,

$$d(G,H) = \sqrt{((3-2\sqrt{2})-1)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(3-2\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{(2-2\sqrt{2})^2} = |2-2\sqrt{2}| \cong 0,83u.c..$$

Como altura escolhemos o segmento \overline{GM} de medida $d(G.M) = 1u.c.$, pois entre os segmentos \overline{GM} e \overline{HN} o segmento \overline{GM} tem menor medida e estamos calculando uma área aproximada por falta (caso estivéssemos calculando a área aproximada por excesso, usaríamos o de maior medida). Deste modo, o retângulo R_1 tem base medindo $0,83u.c.$ e altura medindo $1u.c.$, e assim, a área $A(R_1) = 0,83u.a.$ (unidades de área).

O retângulo R_2 tem como base o segmento de reta \overline{HI} de medida $1u.c.$ e como altura o segmento \overline{HN} de medida $\sqrt{5}u.c.$, e deste modo temos $A(R_2) \cong 2,24u.a..$

Já o retângulo R_3 tem como base o segmento de reta \overline{IJ} de medida $2u.c.$ e como altura o segmento \overline{IO} de medida $2\sqrt{2}u.c.$, e deste modo temos $A(R_3) \cong 5,66u.a..$

No retângulo R_4 temos como base o segmento \overline{JK} de medida $1u.c.$ e como altura o segmento \overline{KQ} de medida $\sqrt{5}u.c.$, e deste modo temos $A(R_4) \cong 2,24u.a..$

Por fim, o retângulo R_5 tem base \overline{KL} de comprimento aproximado $0,83u.c.$ e altura \overline{LR} de comprimento $1u.c.$, o que nos dá $A(R_5) \cong 0,83u.a..$

Deste modo, a área A do semicírculo será:

$$A = A(R_1) + A(R_2) + A(R_3) + A(R_4) + A(R_5) \cong 0,83 + 2,24 + 5,66 + 2,24 + 0,83$$

$$\Rightarrow A \cong 11,80u.a.$$

Da geometria sabemos que a área A de um semicírculo de raio r pode ser calculada usando-se $A = \frac{\pi \cdot r^2}{2}$. No caso do exemplo $r = 3u.c.$, o que nos dá uma área aproximada de $A \cong 14,13$ unidades de área.

Se quiséssemos uma aproximação melhor, bastaria que dividíssemos o intervalo $[0,6]$ da base da figura em mais retângulos. Quanto mais retângulos na subdivisão do intervalo, melhor será a aproximação.

Para ilustrar, agora, a decomposição de uma faixa de Hipérbole em sub-regiões retangulares, considere dois números reais positivos c, d com $c < d$ tais que $a < c < d < b$, e assim dividimos o intervalo $[a, b]$ em 3 subintervalos $[a, c]$, $[c, d]$ e $[d, b]$.

Desta forma podemos formar três retângulos R_1, R_2 e R_3 (veja Figura22).

O retângulo R_1 tem como base o intervalo $[a, c]$, de comprimento $c - a$ e altura $1/c$. O retângulo R_2 tem por base o intervalo $[c, d]$, de comprimento $d - c$ e altura $1/d$. O terceiro retângulo, R_3 tem como base o intervalo $[d, b]$, com comprimento $b - d$ e altura $1/b$.

Veja que a soma das áreas dos retângulos R_1, R_2 e R_3 é uma aproximação, por falta, da

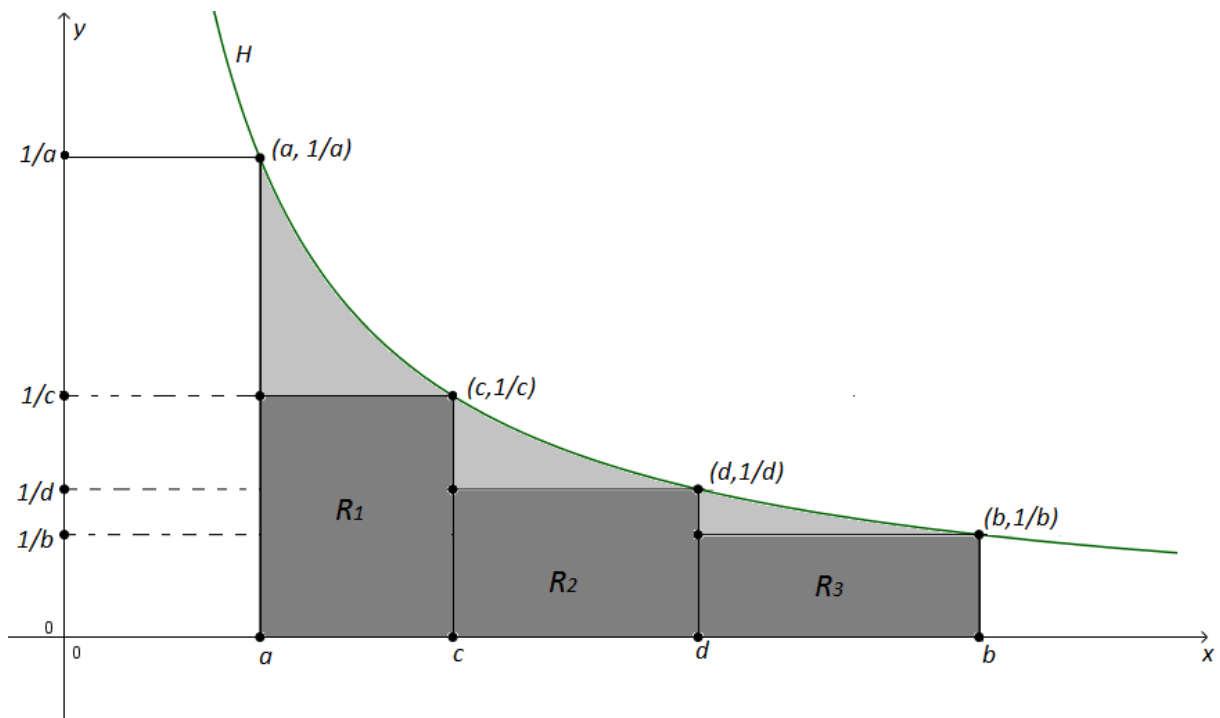


Figura 22: Divisão do intervalo $[a, b]$ em três subintervalos, gerando três retângulos inscritos na faixa de Hipérbole H_a^b .

área da faixa de Hipérbole H_a^b .

É fácil calcular a área de um retângulo. O polígono formado pelos vértices dos retângulos é chamado de Polígono Retangular, que denotaremos por P , inscrito na faixa de Hipérbole H_a^b .

Cada polígono retangular inscrito na faixa de Hipérbole H_a^b nos dá um valor aproximado, por falta, da área de H_a^b .

Para melhorar a aproximação da área da faixa de Hipérbole, é preciso que tomemos cuidado de refinar a subdivisão que já temos, uma vez que podemos tomar uma nova subdivisão que não melhora a aproximação da área como queremos. Quanto mais refinarmos uma subdivisão do intervalo $[a, b]$, melhor será a aproximação da área de H_a^b (veja Figura 23).

Na Figura 23, incluímos entre os pontos a, c, d e b que já tínhamos no eixo x mais pontos, de modo que:

$$a < k_1 < k_2 < c < k_3 < k_4 < k_5 < d < k_6 < k_7 < k_8 < k_9 < b,$$

obtendo assim 12 novos retângulos com bases mais estreitas e alturas maiores, e cujas áreas somadas aproximam-se melhor da área da faixa de Hipérbole H_a^b do que a soma das áreas dos três retângulos da Figura 22.

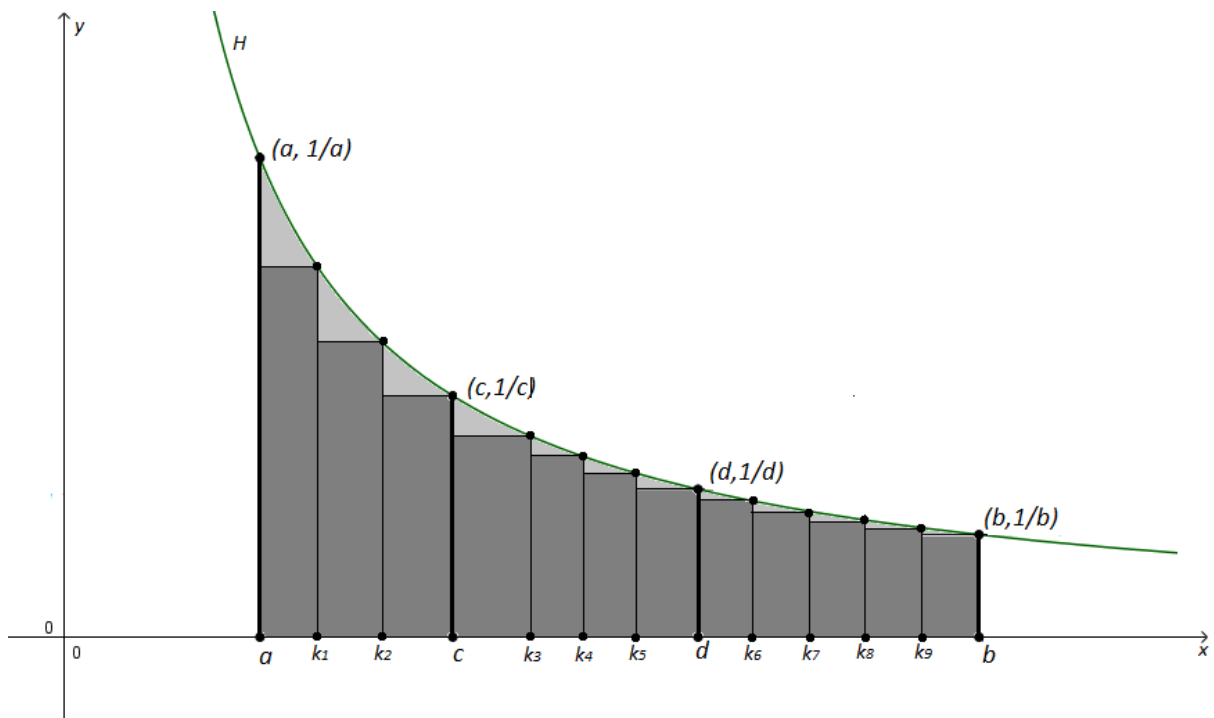


Figura 23: Refinamento da divisão do intervalo $[a, b]$

Se incluirmos entre os pontos $a, k_1, k_2, c, k_3, k_4, k_5, d, k_6, k_7, k_8, k_9$ e b da Figura 23 mais pontos, nossa aproximação da área da faixa de Hipérbole H_a^b será ainda melhor.

Desta forma, Lima (2013a) define:

Definição 5.4. A área de H_a^b , denotada por $A(H_a^b)$, é o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos retangulares inscritos em H_a^b

Note que a área de H_a^b será maior que a área de qualquer polígono retangular inscrito em H_a^b .

Seja n o número natural que indica em quantas partes dividimos o intervalo $[a, b]$. Veja que quanto maior for n , a soma das áreas dos vários retângulos formados se aproximará da área de H_a^b .

Em outras palavras, dado qualquer $\varepsilon < A(H_a^b)$, existe um polígono retangular (polígono formado pelos vários retângulos gerados pelo refinamento da divisão do intervalo $[a, b]$) P inscrito em H_a^b , tal que

$$\varepsilon < A(P),$$

onde $A(P)$ indica a área do polígono retangular P .

Podemos dizer ainda que $A(H_a^b)$ é o menor número real que cumpre $A(P) < A(H_a^b)$,

ou seja, $A(H_a^b)$ é o menor número real maior que todas as possíveis áreas dos polígonos P , para todo P inscrito em H_a^b , ou ainda, que $A(H_a^b)$ é limite superior do conjunto das medidas das áreas dos polígonos retangulares P inscritos em H_a^b .

5.3 CARACTERIZAÇÃO GEOMÉTRICA DOS LOGARITMOS

Voltando agora à caracterização dos Logaritmos Naturais, faremos isso utilizando o Teorema 3.16, da mesma forma que Lima (2013b).

Para isso Lima (2013b) usa uma transformação geométrica.

Para cada número real $k > 0$ vamos definir a transformação (função) $T_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que associa a cada ponto (x, y) o ponto $(kx, \frac{y}{k})$ do plano cartesiano, ou seja, dado um ponto (x, y) do plano, a transformação T_k multiplica a abscissa x pelo fator k , e divide a ordenada y pelo mesmo fator. Simbolicamente:

$$T_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto T_k(x, y) = (kx, \frac{y}{k}).$$

Para compreender melhor analisemos um exemplo.

Exemplo 5.5. Tomemos $k = 2$, temos então $T_2(x, y) = (2x, \frac{y}{2})$.

Consideremos agora o paralelogramo R , no plano cartesiano, de vértices

$$A(1, 2), B(2, 0), C(4, 1) \text{ e } D(3, 3).$$

Pela transformação T_2 , R será levado no paralelogramo R_1 de vértices $E = T_2(1, 2) = (2, 1)$, $F = T_2(2, 0) = (4, 0)$, $G = T_2(4, 1) = (8, \frac{1}{2})$ e $H = T_2(3, 3) = (6, \frac{3}{2})$, como na Figura 24.

É fácil verificar, neste caso, que ambas os paralelogramos tem a mesma área.

De maneira geral, toda transformação T_k , transforma toda figura F do plano cartesiano em uma figura F_1 do plano cartesiano de modo que F e F_1 tem a mesma área, pois as dimensões de F são alteradas pelo fator k na horizontal e $\frac{1}{k}$ na vertical.

Para verificar este fato, basta que verifiquemos que isto realmente acontece para retângulos cujos lados são paralelos aos eixos do plano cartesiano, pois para as demais figuras (que não são retângulos com lados paralelos aos eixos), é imediato que a transformação T_k preserva áreas,

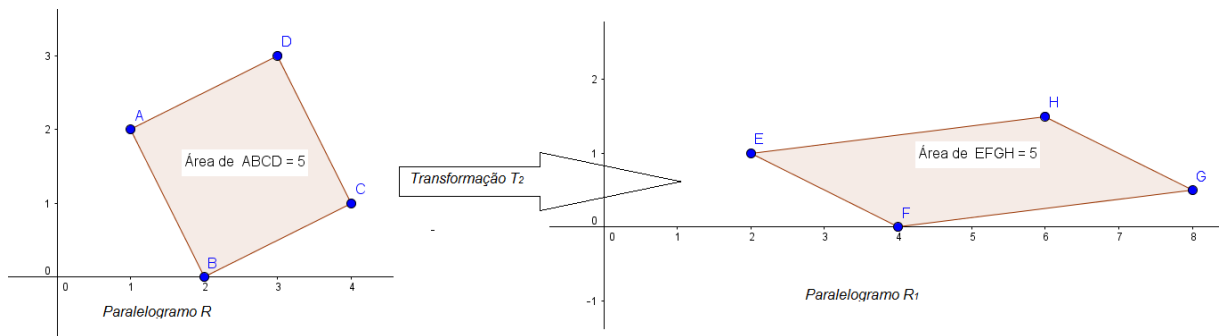


Figura 24: Transformação T_2

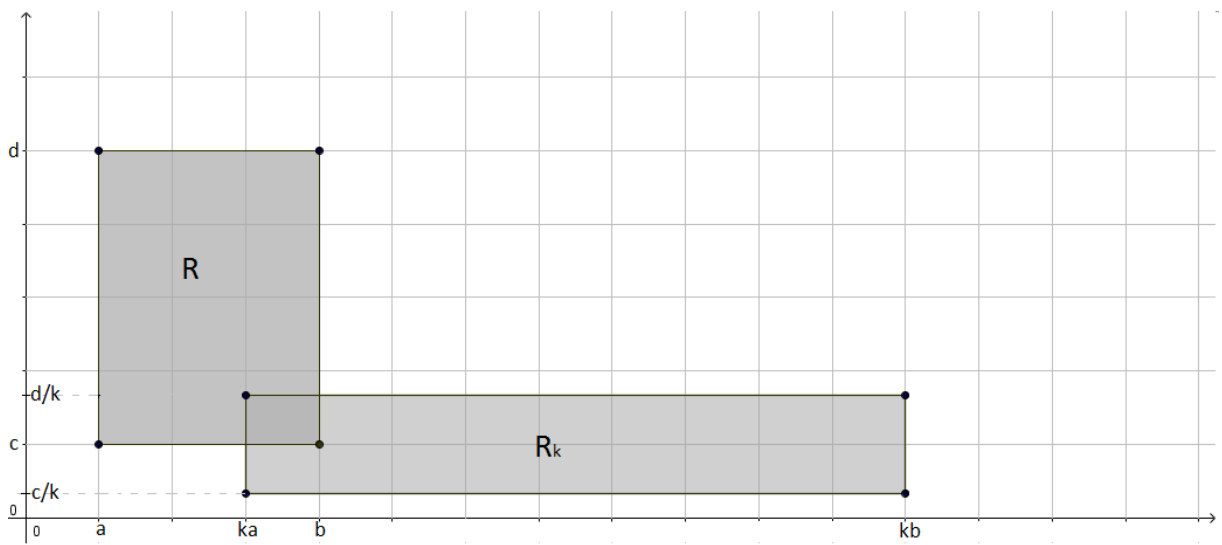


Figura 25: Transformação T_k sobre retângulo R de lados paralelos aos eixos

uma vez que para qualquer figura, podemos aproximar sua área por retângulos, como já fizemos anteriormente.

Considere o retângulo

$$R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Veja que R tem base de medida $b - a$ e altura de medida $d - c$ e área $A(R) = (b - a)(d - c)$.

Mostraremos que o retângulo R_k , obtido ao aplicarmos a transformação T_k sobre R , ainda tem área $A(R_k) = (b - a)(d - c)$, conforme representado na Figura 25.

De fato, como

$$T_k(x, y) = \left(kx, \frac{y}{k}\right),$$

temos que

$$T(R) = R_k = \left\{ (x, y) \mid k \cdot a \leq x \leq k \cdot b, \frac{c}{k} \leq y \leq \frac{d}{k} \right\},$$

ou seja,

$$R_k = \left\{ (x, y) \mid ka \leq x \leq kb, \frac{c}{k} \leq y \leq \frac{d}{k} \right\}.$$

Deste modo, o retângulo R_k tem base medindo $kb - ka = k(b - a)$ e a altura medindo $\frac{d}{k} - \frac{c}{k} = \frac{(d-c)}{k}$, e assim,

$$A(R_k) = k(b - a) \cdot \left(\frac{(d - c)}{k} \right) = (b - a)(d - c)$$

como queríamos.

Analisaremos agora o que acontece quando aplicamos uma transformação T_k à uma faixa de Hipérbole. Seguindo Lima (2013b), seja

$$H = \left\{ \left(x, \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \right\}$$

o ramo positivo da Hipérbole equilátera $xy = 1$, ou seja, H é o gráfico da função $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \frac{1}{x}$.

Como vimos anteriormente, a faixa de Hipérbole H_a^b é a região compreendida entre o eixo x , a reta $x = a$, a reta $x = b$ e o gráfico de h (ver Figura 19).

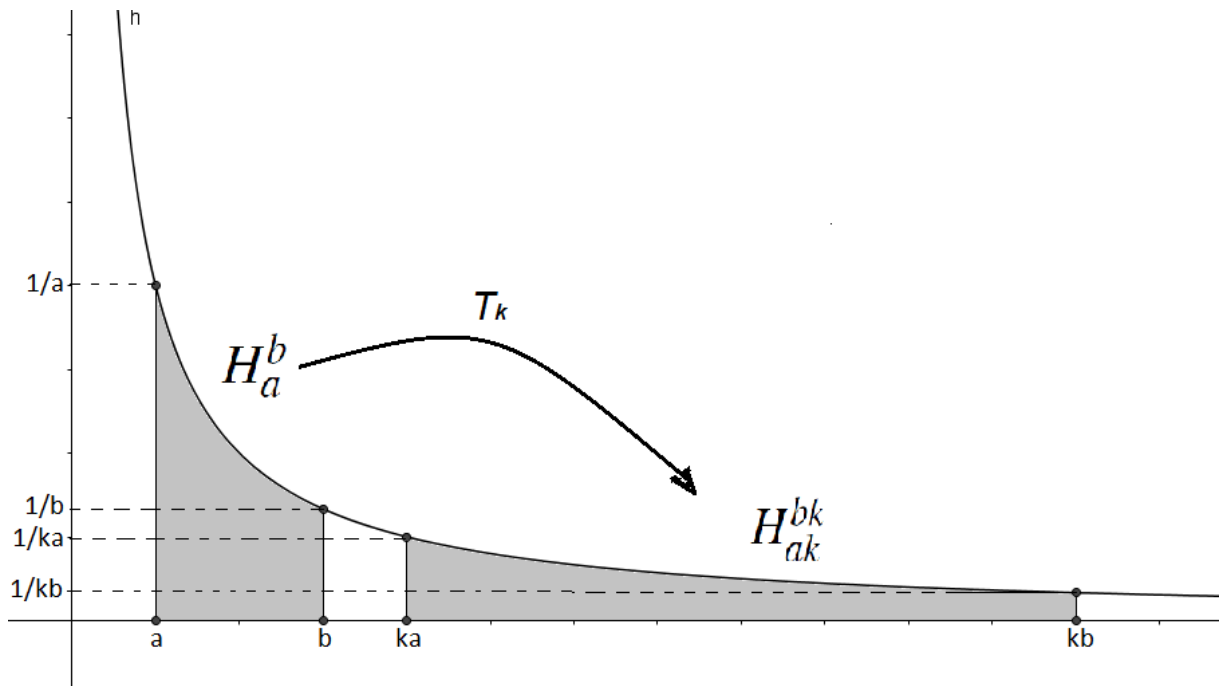


Figura 26: Transformação T_k levando a faixa H_a^b na faixa H_{ak}^{bk}

Submetemos a faixa de Hipérbole H_a^b à uma transformação $T_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, logo a

região do plano H_a^b será transformada por T_k na região do plano H_{ak}^{bk} (ver Figura 26), que também é uma faixa de hipérbole.

Como a transformação T_k preserva áreas, segue-se que para todo real estritamente positivo k , as faixas de Hipérbole H_a^b e H_{ak}^{bk} têm a mesma área, ou seja,

$$A(H_a^b) = A(H_{ak}^{bk}).$$

Disto segue que, tomando $c = \frac{b}{a} > 0$ podemos restringir nossas considerações as faixas de Hipérbole H_1^c , pois, como $ac = a \cdot \frac{b}{a} = b = 1 \cdot b$, temos:

$$A(H_a^b) = A(H_{ac}^{bc}) = A(H_{1 \cdot b}^{cb}) = A(H_1^c).$$

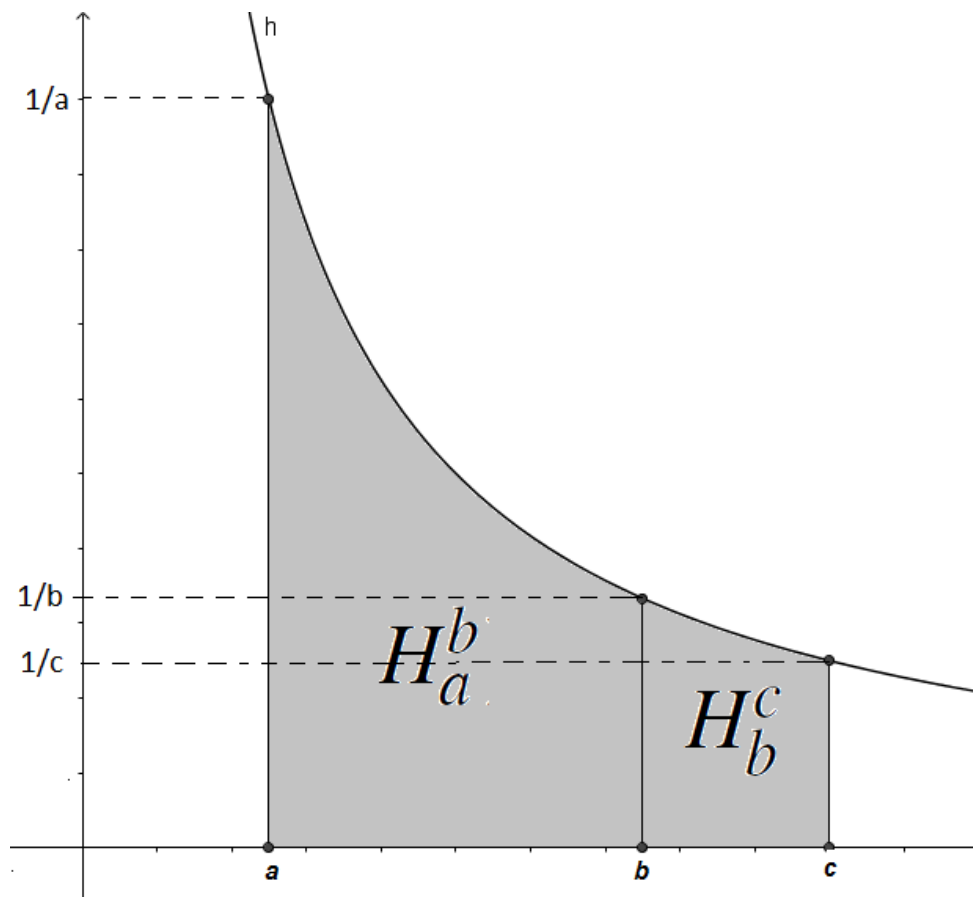


Figura 27: Caso 1 - Soma das áreas das faixas de hipérbole

Se $a < b < c$ são números reais positivos, podemos mostrar que

$$A(H_a^b) + A(H_b^c) = A(H_a^c). \quad (7)$$

De fato, basta lembrar que H_a^b, H_b^c e H_a^c são conjuntos de pontos do plano. Observe,

na Figura 27, que as faixas de Hipérbole H_a^b e H_b^c são justapostas (estão uma ao lado da outra), e que a faixa de Hipérbole H_a^c é o conjunto dos pontos do plano compreendido entre as retas $x = a$, $x = c$, acima do eixo x e abaixo da Hipérbole $xy = 1$, ou seja,

$$H_a^c = H_a^b \cup H_b^c.$$

Para que a Igualdade (7) seja válida para quaisquer reais positivos a, b e c convencionase que:

$$A(H_a^a) = 0 \text{ e } A(H_a^b) = -A(H_b^a).$$

Esta convenção implica considerar “áreas negativas”. De maneira geral, sempre consideramos que a área de uma figura é um número positivo. Porém em alguns casos, como este, pode ser conveniente que usemos áreas orientadas³, ou seja, acompanhadas dos sinais $+$ ou $-$. “Isto contraria a tradição, mas, em compensação, a igualdade $A(H_a^b) + A(H_b^c) = A(H_a^c)$ torna-se válida sem restrições.”(LIMA, 2013a, p.52).

Deste modo, dados três números reais positivos a, b e c , vale sempre a igualdade:

$$A(H_a^b) + A(H_b^c) = A(H_a^c)$$

Para provar a igualdade acima, basta que consideremos, separadamente, seis casos, sendo

1. $a \leq b \leq c$;
2. $a \leq c \leq b$;
3. $b \leq a \leq c$;
4. $b \leq c \leq a$;
5. $c \leq a \leq b$;
6. $c \leq b \leq a$.

Provaremos os dois primeiros e os demais são análogos.

Caso 1: Se $a \leq b \leq c$, é imediato que $A(H_a^b) + A(H_b^c) = A(H_a^c)$, pois as faixas de Hipérbole H_a^b e H_b^c são adjacentes, e juntas formam a faixa de Hipérbole H_a^c (veja a Figura 27).

³Sem nos determos ao rigor matemático, no caso das áreas de faixas de Hipérbole, imagine que calcular $A(H_a^b)$

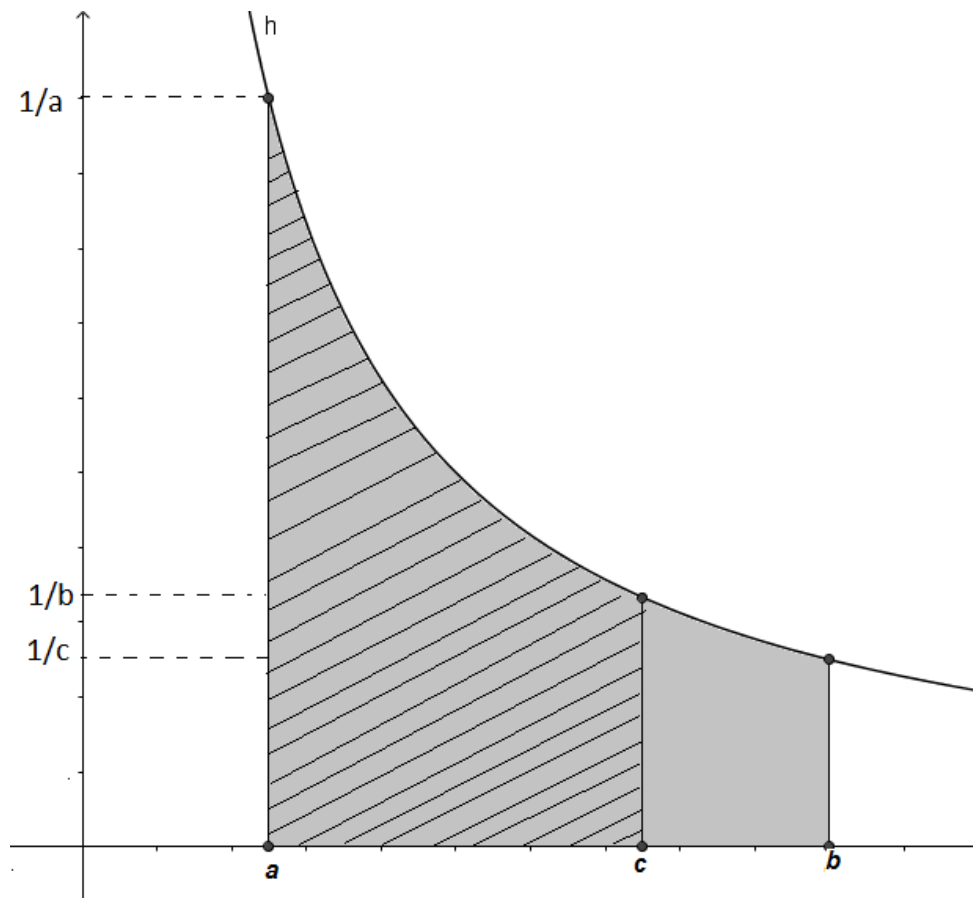


Figura 28: Caso 2 - Soma das áreas de faixas de hipérbole

Caso 2: Se $a \leq c \leq b$, temos que a faixa de Hipérbole H_a^c está contida na faixa de Hipérbole H_a^b , como ilustrado na Figura 28, onde a área rachurada representa a faixa de Hipérbole H_a^c .

Neste caso, teremos $A(H_a^b) = A(H_a^c) + A(H_c^b)$, mas, $A(H_c^b) = -A(H_b^c)$ e assim temos

$$\begin{aligned}
 A(H_a^b) &= A(H_a^c) + A(H_c^b) \\
 \Leftrightarrow A(H_a^b) &= A(H_a^c) + (-A(H_b^c)) \\
 \Leftrightarrow A(H_a^b) &= A(H_a^c) - A(H_b^c) \\
 \Leftrightarrow A(H_a^b) + A(H_b^c) &= A(H_a^c).
 \end{aligned}$$

Os casos em que $b \leq a \leq c$, $b \leq c \leq a$, $c \leq b \leq a$ e $c \leq a \leq b$ são análogos ao caso 2.

seria calcular a área da figura da esquerda para a direita (sentido crescente da reta real) que é o sentido tradicional e neste caso o sinal da área é positivo. Calcular $A(H_b^a)$ implicaria então calcular a área da figura no sentido contrário, da direita para a esquerda (sentido decrescente da reta real), mas como a figura é a mesma, a área encontrada é a mesma, e usamos o sinal negativo para indicar o sentido em que esta área foi calculada.

E assim, provamos que a Igualdade (7) é válida para quaisquer reais positivos a, b e c .

5.3.1 LOGARITMO NATURAL

Agora vamos definir uma função $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que para cada $x > 0$ real associemos a área da faixa de hipérbole determinada por x e 1, ou seja, $f(x) = A(H_1^x)$. Simbolicamente:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto A(H_1^x) \end{aligned}$$

Vejamos que, do modo que definimos f , se $x > 1$ então temos $f(x) > 0$, se $0 < x < 1$ então $f(x) < 0$ e se $x = 1$ temos $f(x) = 0$, e f é crescente.

É importante observar ainda que dados $x, y \in \mathbb{R}^+$ quaisquer, temos que

$$f(x \cdot y) = A(H_1^{x \cdot y}) = A(H_1^x) + A(H_x^{x \cdot y}),$$

Mas, pelo que vimos anteriormente, aplicando a transformação T_x a faixa de Hipérbole H_1^y temos:

$$T_x(H_1^y) = H_x^{xy} \Rightarrow A(H_1^y) = A(H_x^{xy}),$$

pois T_x preserva áreas. Isto nos leva à nos leva à:

$$f(x \cdot y) = A(H_1^{x \cdot y}) = A(H_1^x) + A(H_1^y) = f(x) + f(y).$$

Deste modo, pelo Teorema 3.16, existe um número real positivo, que denotamos por e , de modo que $f(x) = \log_e(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, o número e tem como característica que $f(e) = 1$, ou seja, a área da faixa de hipérbole H_1^e é igual a 1.

Este número e é um número real que, pode-se mostrar, é irracional. O valor aproximado do número e é 2,718281828459....

É normal que se escreva $\ln x$ ao invés de $\log_e(x)$, e é comum que chamemos essa função de **Logaritmo Natural de x** .

Os logaritmos naturais, tem um grande número de aplicações e por este motivo tem grande importância, principalmente no uso do Cálculo Infinitesimal. Os logaritmos naturais também podem ser chamados de “logaritmos neperianos”, essa nomenclatura se deve à uma homenagem a John Napier, que em 1614, foi autor da primeira tábua de logaritmos, porém esta denominação não é apropriada, pois os logaritmos naturais não coincidem com os logaritmos originalmente definidos por Napier. (LIMA, 2013b)

5.3.2 A BASE DOS LOGARITMOS NATURAIS

Como vimos, existe um único número real positivo cujo logaritmo natural é igual a 1 e representamos tal número pelo letra e .

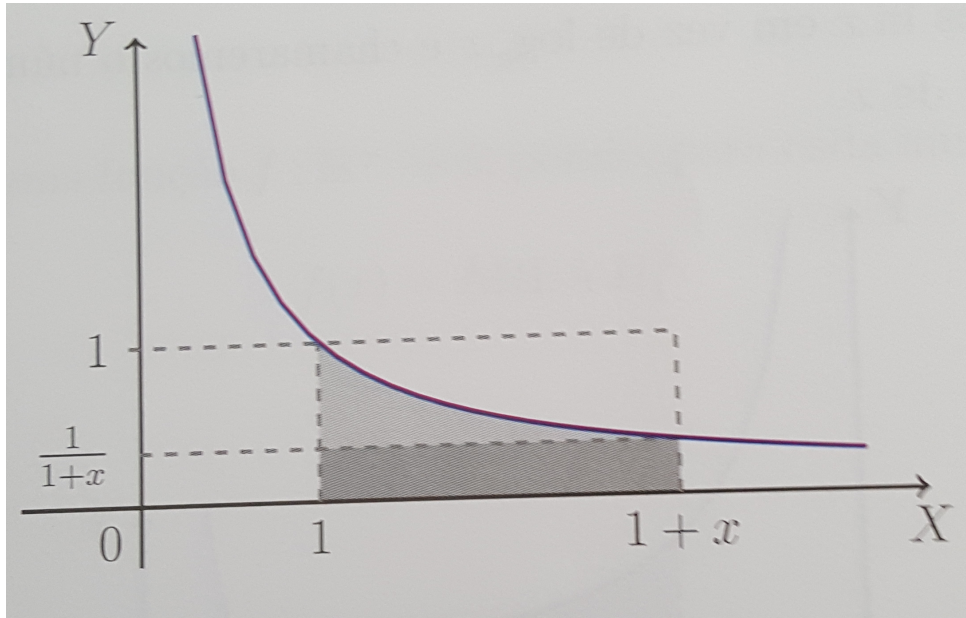


Figura 29: O número e (FONTE: LIMA, 2013b, p.202)

De acordo com Lima (2013b), uma das representações mais usuais para o número e é o limite da expressão $(1 + \frac{1}{n})^n$ quando n fica infinitamente grande, ou seja,

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n,$$

em outras palavras, e é o número real cujas aproximações, por falta, são os números racionais da forma $(1 + \frac{1}{n})^n$ com $n \in \mathbb{N}$. Essas aproximações são melhores a medida que aumentamos o valor de n .

Para provar que o número e caracterizado no final da seção anterior e o número e que é resultado do limite acima são o mesmo número, Lima (2013b) baseia seu argumento na Figura 29.

Vejamos que na Figura 29 temos dois retângulos, um maior, de base igual a x e altura igual a 1, e um menor, dentro do primeiro, de base x e altura $\frac{1}{1+x}$, contido na faixa de hipérbole H_1^{1+x} . Vejamos ainda que a faixa H_1^{1+x} também está contida no retângulo maior.

Comparando as áreas das três regiões, temos, para qualquer $x > 0$

$$x \cdot \frac{1}{1+x} < A(H_1^{1+x}) < x \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x. \quad (8)$$

Dividindo todos os termos da Desigualdade (8) acima por x obtemos:

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1. \quad (9)$$

Fazendo agora $x = \frac{1}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, na desigualdade acima, temos:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}} < \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} < 1.$$

Com a manipulação das frações da última desigualdade, obtemos:

$$\frac{n}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1.$$

Aplicando todos os termos da desigualdade obtida em na função exponencial de base e obtemos:

$$e^{\left(\frac{n}{n+1}\right)} < e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < e^1.$$

Obtendo então:

$$e^{\left(\frac{n}{n+1}\right)} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e^1. \quad (13)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Fazendo com que n tenda ao infinito, ou seja, tornando n muito grande, temos que $\frac{n}{n+1}$ estará cada vez mais próximo de 1, e tomando o limite em todos os termos da Desigualdade (13) teremos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\left(\frac{n}{n+1}\right)} &< \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \lim_{n \rightarrow \infty} e \\ \Leftrightarrow e^{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}\right)} &< \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e \\ \Leftrightarrow e^1 &< \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e \\ \Leftrightarrow e &< \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e. \end{aligned} \quad (14)$$

Usando o Teorema do Confronto ⁴ na Desigualdade (14) obtida acima, concluímos

⁴**Teorema do Confronto:** Seja $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Sendo $f, g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$, se para todo $x \in I$ tem-se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e, além disso, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = L$, com $L \in \mathbb{R}$, então $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L$. (LIMA, 2008)

que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Para Lima (2013b), “este argumento ilustra bem claramente a vantagem que advém de se interpretar o logaritmo natural geometricamente: a noção de área é visualmente intuitiva, permitindo que se obtenham desigualdades como as que foram usadas aqui”. (LIMA, 2013b, p.203)

Lima (2013b) chama atenção ainda ao fato de que, como colocamos $x = \frac{1}{n}$, a igualdade $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ foi obtida da Desigualdade (9), válida para todo $x > 0$. E daí:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &< \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) < 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{1+x} &< \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} < 1 \\ \Leftrightarrow e^{\left(\frac{1}{1+x}\right)} &< e^{\left(\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)} < e^1 \\ \Leftrightarrow e^{\left(\frac{1}{1+x}\right)} &< (1+x)^{\frac{1}{x}} < e \end{aligned} \tag{19}$$

para todo $x > 0$ real.

Ao considerarmos

$$-1 < x < 0,$$

multiplicando essa desigualdade por -1 obtemos

$$1 > -x > 0,$$

e somando x à todos os termos teremos

$$1+x > 0.$$

Deste modo podemos ainda falar de $\ln(1+x)$. Observe que, levando em conta as faixas de hipérbole orientadas sobre as quais já comentamos anteriormente, o retângulo cuja base é $-x$ e cuja altura mede 1, está contido na faixa de hipérbole H_{1+x}^1 e esta por sua vez está contida no retângulo de mesma base e altura igual à $\frac{1}{1+x}$. Comparando as áreas, como fizemos

anteriormente, teremos:

$$-x < -\ln(1+x) < -\frac{x}{1+x}.$$

Dividindo os três membros da desigualdade pelo número $-x$, positivo, teremos:

$$1 < \frac{\ln(1+x)}{x} < \frac{1}{1+x}. \quad (21)$$

Fazendo $x = \frac{1}{n}$, procedemos como no caso anterior.

Da Desigualdade (21), para $-1 < x < 0$, temos:

$$1 < \ln(1+x) \cdot \frac{1}{x} < \frac{1}{1+x}$$

$$1 < \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} < \frac{1}{1+x}$$

$$e^1 < e^{(\ln(1+x)^{\frac{1}{x}})} < e^{(\frac{1}{1+x})}$$

$$e < (1+x)^{\frac{1}{x}} < e^{(\frac{1}{1+x})}. \quad (25)$$

Das Desigualdades (19) e (25), como nos cálculos realizados tínhamos $n \rightarrow \infty$, e como no início colocamos $x = \frac{1}{n}$, temos então que $x \rightarrow 0$, e disso segue que, em ambos os casos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \quad (26)$$

Para o leitor que não esteja familiarizado com a simbologia de limites, o resultado (26) acima significa dizer que podemos tomar o valor da expressão $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ tão próximos de e quanto desejarmos, desde que, para isso, escolhamos um valor de $x \neq 0$ tão próximo de zero quando for necessário.

Finalmente, as afirmações “ $\ln(x) = 1$ ” e “ $x = e$ ” são equivalentes.

Definição 5.6. *O número e é um número real tal que a área da faixa de hipérbole H_1^e é igual a 1, em símbolos, $\ln(x) = \log_e x = 1$, ou seja,*

$$\ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e.$$

De maneira análoga, a equivalência abaixo é a definição de e^x , da qual trataremos na

seção a seguir:

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y.$$

Lembrando o significado geométrico dos logaritmos naturais, vemos que a faixa de hipérbole H_1^e tem área 1. Da definição geométrica de logaritmos, vemos que é imediato que $e > 1$, pois os números reais positivos menores que 1 tem logaritmo negativo.

Definição 5.7 (Função Logaritmo Natural). *Seja a função $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada número real positivo $x > 0$ associa o número real y que é seu logaritmo natural, $y = \ln(x)$ definido anteriormente. Esta função é chamada Função Logaritmo Natural.*

Teorema 5.8. *A função $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função logarítmica.*

Demonstração: Para provar tal teorema basta mostrar que a função $y = \ln(x)$ goza das propriedades estabelecidas na Definição 4.1.

Vimos anteriormente que

$$A(H_1^{x_1 \cdot x_2}) = A(H_1^{x_1}) + A(H_{x_1}^{x_1 \cdot x_2})$$

e vimos ainda que

$$A(H_{x_1}^{x_1 \cdot x_2}) = A(H_1^{x_2}),$$

e sendo assim, temos que

$$A(H_1^{x_1 \cdot x_2}) = A(H_1^{x_1}) + A(H_1^{x_2}).$$

Mas sabemos que $A(H_1^{x_1}) = \ln(x_1)$ e $A(H_1^{x_2}) = \ln(x_2)$, e assim temos que

$$\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2),$$

provando assim que a função $y = \ln x$ satisfaz a primeira propriedade da Definição 4.1.

Resta-nos agora mostrar que $y = \ln(x)$ é uma função crescente, e assim mostraremos que esta função goza também da segunda propriedade da Definição 4.1. Dados $x_1 < x_2$ reais positivos, existe um número real $k > 1$ tal que $x_2 = k \cdot x_1$. Assim

$$\ln(x_2) = \ln(k \cdot x_1) = \ln(k) + \ln(x_1).$$

Como $k > 1$ temos que $\ln(k) > 0$, e assim, da igualdade acima concluimos que $\ln(x_1) < \ln(x_2)$, e portanto, a função Logaritmo Natural é crescente.



Deste modo provamos que a função da Definição 5.8 é uma Função Logarítmica, e portanto, goza de todas as propriedades que já demonstramos para as Funções Logarítmicas, ou seja, dados dois reais positivos $x_1 \neq x_2$, e uma constante real m , vale:

$$1. \ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$$

$$2. \ln\left(\frac{1}{x_1}\right) = -\ln(x_1)$$

$$3. \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln(x_1) - \ln(x_2)$$

$$4. \ln(x_1)^m = m \cdot \ln(x_1)$$

$$5. \ln(\sqrt[m]{x_1}) = \frac{\ln(x_1)}{m}$$

5.4 FUNÇÃO EXPONENCIAL

Na seção anterior caracterizamos geometricamente os Logaritmos Naturais através da associação com áreas de faixas de Hipérbole.

Definimos então a Função Logaritmo Natural que associa a cada número real positivo x o seu logaritmo natural $A(H_1^x)$.

Provamos que esta função leva produtos em somas e é crescente, e portanto satisfaz as condições do Definição 4.1 e portanto é uma Função Logarítmica, possuindo todas as propriedades que demonstramos para essas funções no Capítulo 4.

A propriedade da Função Logaritmo Natural que nos interessa nesta seção é a da bijetividade, pois sendo a função bijetiva, ela possui função inversa, e como já vimos anteriormente, sua função inversa é uma Função Exponencial.

Anteriormente definimos o número e como sendo o único número real para o qual a área da faixa de hipérbole H_1^e tem área igual à 1 ou ainda podemos defini-lo como um limite, sendo $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Usaremos essas informações para, agora, definirmos a função exponencial de base e , e verificar quais as propriedades que esta função possui.

Afirmção 5.9. Para $x \neq 0$ e a real constante, afirmamos que valem as igualdades

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{1/x} = e^a$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a.$$

As duas igualdades acima são equivalentes, para mostrar isto, basta que façamos $y = \frac{1}{x}$ na segunda igualdade e teremos que, como $x \rightarrow \infty$, então $y \rightarrow 0$, e o limite da segunda igualdade acima ficaria

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow 0} (1 + ay)^{\frac{1}{y}}.$$

Deste modo, basta que provemos a veracidade da primeira igualdade.

Seja $z = ax$, como x se aproxima de 0, temos que z também tende a zero, e ainda $\frac{1}{x} = \frac{a}{z}$, e assim obtemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{1/x} = \lim_{z \rightarrow 0} (1 + z)^{\frac{a}{z}} = \lim_{z \rightarrow 0} \left[(1 + z)^{\frac{1}{z}} \right]^a = \left[\lim_{z \rightarrow 0} (1 + z)^{\frac{1}{z}} \right]^a = e^a.$$

■

Definição 5.10 (Função Exponencial de base e). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função definida por $f(x) = e^x$. A esta função damos o nome de Função Exponencial de base e .*

Geometricamente, o número $y = e^x$ é a abscissa que devemos tomar para que a faixa de hipérbole H_1^y tenha área igual a x . É fácil ver que, independente do valor de x , o número e^x é estritamente positivo pois trata-se da área de uma região, vemos também que $e^x > 1$ quando $x > 0$ e $e^x < 1$ quando $x < 0$. (LIMA, 2013a).

Devido às propriedades de potências já revisadas no Capítulo 2, se $x = n$ é um número inteiro positivo, então

$$e^n = \underbrace{e \cdot e \cdot e \cdots e}_{n\text{-fatores}},$$

e

$$e^{-n} = \frac{1}{e^n}.$$

Para exemplificar que agora tem sentido tomarmos e^x com x irracional, Lima (2013a) usa como exemplo calcular $e^{\sqrt{2}}$, para isto devemos encontrar um valor y tal que a área H_1^y vale $\sqrt{2}$, ou seja, $\ln y = \sqrt{2}$. Sabe-se que $\sqrt{2} = 1,414$ aproximadamente. Para encontrar o valor aproximado de $e^{\sqrt{2}}$, devemos encontrar o número cujo logaritmo natural mais se aproxime de 1,414. Usando uma calculadora científica para realizar alguns cálculos com aproximação, concluímos que o valor y que buscamos deve estar, aproximadamente, entre

$$\begin{aligned}
1,414 &< \ln y < 1.415 \\
\Rightarrow e^{1,414} &< e^{\ln y} < e^{1,415} \\
\Rightarrow 4,112 &< y < 4,116 \\
\Rightarrow 4,112 &< e^{\sqrt{2}} < 4,116.
\end{aligned}$$

Vejamos que, portanto, $e^{\sqrt{2}}$ é a área da faixa de hipérbole $H_1^{\sqrt{2}}$ cuja aproximação por falta é 4,112 e por excesso é 4,116. Se usarmos todas as casas decimais que a calculadora nos oferece como aproximação de $\sqrt{2}$, ou uma planilha eletrônica, teríamos uma aproximação mais adequada para $e^{\sqrt{2}}$. Poderíamos também, caso dispuséssemos de tal ferramenta, utilizar uma tábua de logaritmos para fazer esta aproximação ao invés de uma calculadora científica.

Enquanto $\ln x$ tem sentido apenas para $x > 0$, e^x é definido para todo valor real de x . A correspondência $x \mapsto e^x$ define uma função cujo domínio contém todos os números reais. Esta é a função exponencial. A *função exponencial* $y = e^x$ é a função inversa da função logaritmo natural. Isto quer dizer que as igualdades abaixo são válidas para todo x real e todo $y > 0$:

$$\ln(e^x) = x; \quad e^{\ln y} = y$$

Assim, se a função exponencial transforma o número real x no número real positivo e^x , a função logaritmo natural transforma e^x de volta em x . Reciprocamente, a função exponencial leva $\ln y$ em y . (LIMA, 2013a, p.75-76)

A função exponencial de base e goza das propriedades já enunciadas e demonstradas anteriormente para qualquer função exponencial, destacamos algumas:

Propriedade 5.11. *Dados x, y reais, temos $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$*

Propriedade 5.12. *Para todo número real x temos que $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.*

As demonstrações destas duas propriedades ficam para o leitor, mas decorem diretamente do fato de a função exponencial de base e ser a inversa da função logaritmo natural, e das propriedades já demonstradas da função logaritmo natural.

Teorema 5.13. *A função $y = e^x$ é crescente e tem como imagem o conjunto de todos os números reais estritamente positivos, \mathbb{R}^+ .*

Demonstração: Para mostrarmos que a função $y = e^x$ é estritamente crescente devemos mostrar que dados dois números reais $x_1 < x_2$ temos $e^{x_1} < e^{x_2}$.

De fato, como $y = e^x$ é a função inversa da função logaritmo natural temos que $x_1 = \ln(e^{x_1})$ e $x_2 = \ln(e^{x_2})$, logo não podemos ter $e^{x_1} \geq e^{x_2}$ pois isso nos daria que $\ln(e^{x_1}) \geq \ln(e^{x_2})$ (pois já mostramos que a função logarítmica é crescente) e disso concluiríamos que $x_1 \geq x_2$, o que contradiz nossa hipótese de que $x_1 < x_2$, portanto, só podemos ter $e^{x_1} < e^{x_2}$, como queríamos.

Resta-nos mostrar agora que a imagem de $y = e^x$ é o conjunto \mathbb{R}^+ devemos mostrar que todo número real $a > 0$ é imagem de algum $x \in \mathbb{R}$, ou seja, $a = e^x$ para algum x . Vejamos que $a = e^{\ln a}$ basta então que tomemos $x = \ln a$ e teremos $e^x = a$.

■

5.5 MUDANÇA DE BASE

Por terem a capacidade de transformar operações aritméticas em outras operações aritméticas ainda mais simples é que os logaritmos despertam o interesse computacional. Porém nem sempre a base e é a mais adequada para resolver problemas que envolvam logaritmos, as vezes é mais conveniente usarmos a base decimal (base 10), a base binária (base 2), ou outra base adequada ao problema que estamos resolvendo.

Outro motivo para procurarmos um método prático de mudar a base de um sistema de logaritmos é que com o uso de calculadoras e planilhas eletrônicas, podemos nos sentir presos aos cálculos com as bases que estes equipamentos trabalham, e que podem não ser as mais adequadas ao problema que buscamos resolver.

No Corolário 4.15 estabelecemos que, para mudar a base de um sistema de logaritmos, de uma base a para uma base b , podemos usar a fórmula

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

mas também podemos fazer isto geometricamente.

Ao invés de considerar a Hipérbole $H(x) = \frac{1}{x}$, vamos considerar a Hipérbole $H_k(x) = \frac{k}{x}$, onde $k > 0$. “Para cada valor de k escolhido, temos um novo sistema de logaritmos. Evidentemente, a escolha mais natural é $k = 1$, por isso os logaritmos que viemos estudando até agora chamam-se *naturais*.”(LIMA, 2013a)

Sendo a, b dois números reais positivos, vamos indicar por $H(k)_a^b$ a faixa da Hipérbole $y = \frac{k}{x}$ compreendida entre as retas $x = a$ e $x = b$. Para $k = 1$ teremos a faixa de Hipérbole H_a^b

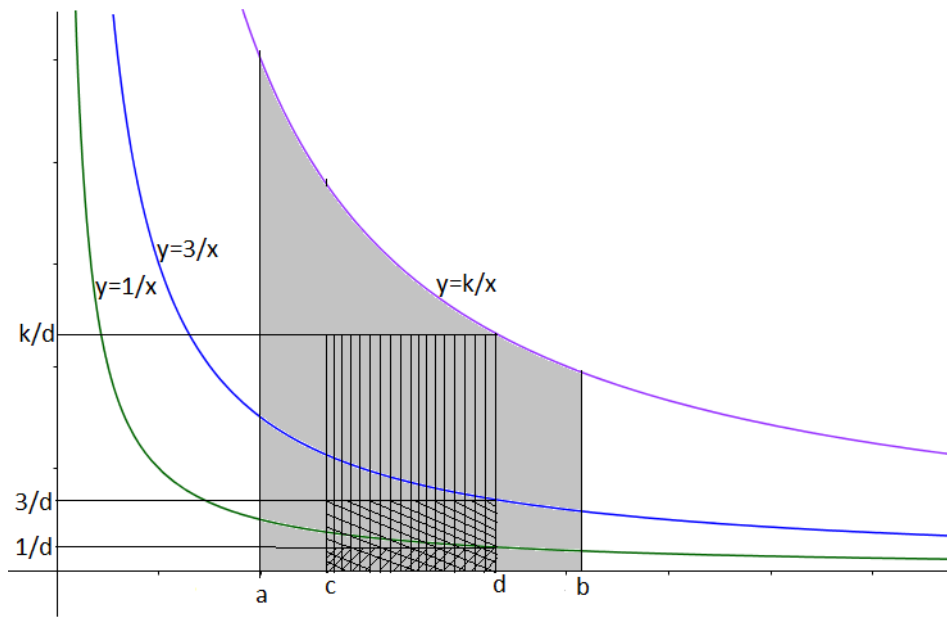


Figura 30: Faixas de Hipérbole: H_a^b , $H(3)_a^b$ e $H(k)_a^b$ com os retângulos de base $[c, d]$ inscritos

que já estudamos. Vamos mostrar que

$$A(H(k)_a^b) = k \cdot A(H_a^b).$$

De fato, observe na Figura 30 que, se $a < c < d < b$, usando aproximações inferiores, temos que o retângulo de base $[c, d]$ inscrito na faixa de hipérbole H_a^b tem altura $1/d$ e área $A(H_a^b) = \frac{d-c}{d}$, enquanto que o retângulo de base $[c, d]$ inscrito na faixa de hipérbole $H(3)_a^b$ tem altura $3/d$ e área $A(H(3)_a^b) = \frac{3(d-c)}{d} = 3 \cdot A(H_a^b)$, de modo semelhante note que o retângulo de base $[c, d]$ inscrito na faixa de hipérbole $H(k)_a^b$ terá altura k/d e área

$$A(H(k)_a^b) = (d-c) \cdot \frac{k}{d} = \frac{k \cdot (d-c)}{d} = k \cdot A(H_a^b).$$

Sempre que subdividimos o intervalo $[a, b]$ determinaremos para cada subdivisão dois polígonos retangulares, um na faixa de hipérbole H_a^b e outro na faixa de hipérbole $H(k)_a^b$, e a área do segundo é k vezes a área do primeiro, pois, para ambos, usamos aproximações inferiores. ■

Quando fixamos esta constante $k > 0$ introduzimos um novo sistema de logaritmos, definindo para todo $x > 0$:

$$\log(x) = A(H(k)_1^x) = k \cdot \ln(x).$$

Sendo que a base deste novo sistema de logaritmos é o número $a > 0$ tal que $\log(a) = 1$, ou

seja, $k \cdot \ln(a) = 1$ e daí temos $k = \frac{1}{\ln(a)}$ e $a = e^{\frac{1}{k}}$ e denotaremos o logaritmo de $x > 0$ na base a por:

$$\log_a(x)$$

e deste modo concluímos que:

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Hoje, depois de concluídas uma graduação e uma especialização, e agora um, quase concluído, mestrado, continuo a olhar para a Matemática com grande admiração. Durante os anos em que fui aluna do ensino básico sempre demonstrei grande facilidade em compreender as regras matemáticas que me eram ensinadas, foram poucas as vezes que questionei os professores sobre a aplicação dos conteúdos que eu estudava, pois em grande parte das vezes eu conseguia e procurava fazer essa associação sozinha, como uma técnica de memorização.

Durante este período de escola, foram poucos os conceitos de matemática que não gostei de estudar ou que apresentei algum tipo de dificuldade. Dominei muito bem as potências e suas propriedades, porém na escola, não compreendi os logaritmos quando me foram apresentados. Aqueles cálculos no final do primeiro ano do ensino médio não faziam sentido para mim. Nem ao menos foi-me dito que estavam relacionados de alguma forma à potenciação ou que existiam também as funções logarítmicas.

Foi na graduação, quando tive que buscar fora da sala de aula os conceitos que deveria ter aprendido no Ensino Médio e que eram necessários para um bom desempenho na disciplina de Cálculo 1, é que fui aprender as regrinhas utilizadas para realizar cálculos com os logaritmos e que pela primeira vez ouvi falar que Funções Exponenciais e Logarítmicas estavam relacionadas e uma é a função inversa da outra. Aprendi a realizar contas com elas, mas não compreendi o que elas significavam. Entendi que com as ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral era possível definir as funções exponenciais, mostrar que são bijeções, e através da função inversa e da continuidade, definir a função logarítmica como inversa da exponencial e suas propriedades através também do Cálculo Diferencial e Integral. Mas esses conceitos não são acessíveis aos alunos do ensino médio.

Ao ir para a sala de aula como professora, muitas vezes deparei-me com a dificuldade dos alunos em compreender as propriedades dos logaritmos e me perguntava como poderia explicar de maneira que compreendessem melhor. Até que compreendi que primeiramente eu precisava conhecer e compreender os logaritmos para depois ser capaz de ensinar aos meus

alunos, principalmente em uma sociedade hoje escrava da tecnologia, dos super computadores, da comunicação em alta velocidade, da era das conexões, despertar o interesse dos estudantes para aprender algo que mesmo eu não dominava direito era um verdadeiro desafio. Sendo que durante a especialização busquei estudar formas de ensinar as funções exponenciais através de jogos, como a Torre de Hanoi, procurando formas mais atrativas de trabalhar com os alunos.

6.1 O QUE LEVO DESTE TRABALHO?

Durante o curso do mestrado, na disciplina MA11 - Números e Funções Reais do PROFMAT, começou a surgir a oportunidade de aprofundar os conhecimentos sobre funções e definitivamente compreender as Funções Exponenciais e Logarítmicas. Até então eu nunca havia parado para pensar na dificuldade de definir potências de expoente irracional.

No desenvolvimento do trabalho não construímos nada novo, mas tive a oportunidade de aprender, compreender e me aprofundar muito sobre as Funções Logarítmicas e Exponenciais, pude ir além do caminho tradicional, e trabalhar com essas funções de formas diferentes e, fora da notação tradicional. Posso dizer que cresci muito com a realização deste trabalho.

Julgo que as duas formas de definir logaritmos que apresentamos aqui são acessíveis e permitem uma compreensão melhor do que a abordagem tradicional. Particularmente, eu escolho hoje, a abordagem geométrica, pois a visualização do que está acontecendo permite que façamos uma ponte entre o abstrato e o visual, facilitando a compreensão, principalmente das demonstrações.

Espero que os colegas professores que tiverem acesso a este trabalho possam aproveitá-lo para também aprofundar seus conhecimentos, e que de alguma forma, mesmo que simples e pequena, eu possa contribuir com colegas que, assim como eu, veem-se diante do desafio de ensinar aquilo que às vezes nem mesmo compreendemos.

6.2 SUGESTÕES DE APLICAÇÕES EM SALA DE AULA

Destacamos que as sugestões que trazemos aqui não foram aplicadas em sala de aula, e por isso tratam-se de sugestões, uma vez que não podemos analisar se realmente funcionam ou se precisam ser melhoradas. São ideias do que pretendemos fazer no futuro.

Os conceitos que abordamos neste trabalho, com exceção dos resultados de Análise Real e do Cálculo, são acessíveis aos alunos de Ensino Médio com as devidas adaptações de linguagem. Em algumas escolas, inclusive, Limites de Funções são trabalhados no Ensino

Básico.

As Funções Exponenciais e Logarítmicas como abordadas no Capítulo 2, como uma generalização das propriedades de potenciação, já estão de certa forma presentes no ensino de funções no Ensino Médio. Julgamos importante que seja observado com os alunos que a passagem dos expoentes racionais para expoentes reais na potenciação não pode ser realizada sem a análise do que acontece com os expoentes irracionais.

Por mais que a abordagem da teoria de sequências no Ensino Médio não seja a mesma que utilizamos neste trabalho, os conceitos são intuitivos, principalmente de limites de sequências, e com o auxílio de softwares educacionais e mesmo aplicativos para celulares, podem ser explicados aos alunos sem a necessidade do rigor matemático através de aproximações com erros cada vez menores. Quando, no Ensino Médio, analisamos o comportamento de uma Progressão Geométrica de infinitos termos e razão entre 0 e 1 (soma de uma PG infinita), de certa forma trabalhamos com limites de sequências.

A abordagem que usamos nos Capítulos 3 e 4, definindo as Funções Exponenciais e Logarítmicas através de propriedades características, mesmo não sendo muito comum, já está presente em alguns livros didáticos, como por exemplo a coleção “Matemática-Contexto e Aplicações” (Editora Ática) do autor Luiz Roberto Dante. Esta abordagem também é acessível aos estudantes de Ensino Médio e pode ser bem aproveitada pelos alunos pois dá destaque às propriedades das funções, não fazendo dessas propriedades apenas regras operatórias para cálculo de potências e logaritmos.

Julgamos ser o Capítulo 5 o mais interessante de nosso trabalho, por apresentar uma abordagem diferenciada para as Funções Logarítmicas, partindo do cálculo de áreas, que é algo presente no ensino de Matemática no Ensino Básico.

Por mais que o cálculo da área das principais figuras planas seja trabalhado durante os anos finais do Ensino Fundamental, acabamos por resgatar esses conceitos em vários momentos do Ensino Médio.

Para realizar o trabalho com os Logaritmos, geometricamente, pensamos em um plano de trabalho que incluía:

- Iniciar com o resgate do cálculo da área de quadrados e retângulos, explicando para os alunos o porque de nesses casos, calcular-se a área como o produto da base pela altura (ou do comprimento pela largura).
- Revisar as fórmulas para o cálculo de áreas das principais figuras planas, buscando “deduzi-

las” a partir da soma das áreas de retângulos inscritos nessas figuras. Pode-se desenhar algumas, como o triângulo, o trapézio, círculo, entre outras, e estimular os estudantes a preenchê-las com retângulos.

- Realizar atividades de cálculos de áreas de figuras que não são tão comuns aos estudantes, como as elipses, e de figuras que não possuem fórmulas para o cálculo de área (pode-se buscar pela escola/vizinhança formas geométricas diferentes para esta atividade).
- Resolver os cálculos com os alunos através da aproximação, por falta, por áreas de retângulos inscritos nas figuras. Pode-se pedir que eles desenhem figuras, inscrevam retângulos e usem a régua para encontrar as medidas aproximadas dos lados dos retângulos desenhados e calcular as áreas.
- Esboçar o gráfico de diferentes funções e principalmente da Hipérbole $y = 1/x$, definir com os estudantes uma Faixa de Hipérbole, e calcular a área abaixo da curva diversas vezes, com aproximações cada vez melhores, estimulando os alunos a notarem e/ou compreenderem que realmente há uma aproximação do valor real da área a ser calculada.
- Se possível, usar softwares para desenho dos gráficos e dos retângulos inscritos na faixa de Hipérbole. Alguns softwares podem inclusive calcular esta área. O uso de planilhas eletrônicas também é interessante pois permite que os cálculos com números muito grandes, muito pequenos ou com muitas casas decimais sejam realizados rapidamente e com precisão.
- Definir o Logaritmo Natural de um número k , denotando por $\ln k$, como sendo o valor da área da região compreendida entre as retas $x = 1$, $x = k$, eixo x e abaixo do gráfico de $y = 1/x$.
- Calcular o Logaritmo Natural de alguns números pela aproximação da área. Neste ponto é interessante propor que grupos diferentes usem diferentes aproximações (um grupo pode inscrever 5 retângulos numa faixa de Hipérbole e outro grupo inscrever 8 retângulos e depois pode-se fazer a comparação dos resultados).
- Explorar as propriedades da Função Logaritmo Natural e aplicações da função. Definir a Função Exponencial de base e como a função inversa.
- Construir novos sistemas de logaritmos através de outras faixas de Hipérbole, do tipo, $y = c/x$, onde $c > 0$ é uma constante diferente de 1 (o caso em que $c=1$ é o Logaritmo Natural). Definir as Funções Exponenciais como as Funções Inversas.

Claro que para realizar este processo adequadamente é necessário um tempo que muitas vezes não dispomos na carga horária semanal da disciplina. Em um primeiro momento pode-se tentar realizar o trabalho com grupos de alunos em contraturno, conforme disponibilidade de tempo do professor e dos estudantes, utilizando os momentos reservados à complementação de carga horária e/ou projetos.

6.3 EXPECTATIVAS PARA TRABALHOS FUTUROS E APROFUNDAMENTO

Quando iniciamos este trabalho, esperava conseguir ir mais longe. Na fase inicial da pesquisa, pretendíamos, antes de finalizá-la, apresentá-la à professores de Matemática que atuem na Educação Básica a fim de que estes nos ajudassem a avaliá-la e aperfeiçoá-la. Infelizmente não foi possível, mas espero poder dar continuidade ao trabalho em um futuro próximo.

Compreendendo a natureza das Funções Logarítmicas, e hoje trabalhando na Educação Básica, dentro dos cursos técnicos integrados do Instituto Federal do Paraná (IFPR), vejo que há uma boa possibilidade para aprofundar e expandir os conhecimentos adquiridos, principalmente no que se refere a trabalhos com aplicações destes conhecimentos.

Desta forma, espero:

- 1) Aprofundar os conhecimentos já adquiridos, buscando explorar ainda outras formas de definir as Funções Exponenciais e Logarítmicas;
- 2) Pesquisar aplicações reais dessas funções, como por exemplo na física, na química, nas ciências econômicas, ciências agrárias, entre outras.

Além disto, pretende-se levar este trabalho adiante, apresentando os resultados aqui obtidos à professores de Matemática da Educação Básica através de cursos/minicursos em semanas pedagógicas, formações continuadas, eventos, entre outros.

REFERÊNCIAS

- ALVES, C. d. S. **As Funções Exponencial e Logarítmica: uma abordagem para o professor do Ensino Médio**. Juazeiro do Norte: Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Ceará, 2014. Disponível em: <<http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/1366>>. Acesso em: 23 de maio de 2015.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Ensino Fundamental - MEC/SEF, 2002.
- BRASIL. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Ensino Fundamental - MEC/SEF, 2006.
- HEFEZ, A. **Aritmética**. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. (Coleção PROFMAT).
- LIMA, E. L. **Curso de Análise: volume 1**. 12. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2008. (Projeto Euclides, v. 1).
- LIMA, E. L. **Logaritmos**. 5. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. (Coleção do Professor de Matemática, v. 1).
- LIMA, E. L. de. **Números e Funções Reais**. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. (Coleção PROFMAT).
- OLIVEIRA, M. N. A. d. **Análise da contextualização da função exponencial e da função logarítmica nos livros didáticos do ensino médio**. Campina Grande: Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Universidade Federal de Campina Grande (Centro de Ciências e Tecnologia), 2014. Disponível em: <<http://www.dme.ufcg.edu.br/PROFmat/TCC/MichelleNoberta.pdf>>. Acesso em: 23 de maio de 2015.
- PARANA. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática**. Curitiba: Secretaria de Estado da Educação: Departamento de Educação Básica, 2008.

APÊNDICE A – CONSTRUÇÃO DA REPRESENTAÇÃO DECIMAL DE UM NÚMERO REAL

Lembremos que todo número real α admite uma representação decimal

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \cdots = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots$$

onde a parte inteira a_0 é um número inteiro qualquer, e os algarismos decimais a_i são números inteiros tais que $0 \leq a_i \leq 9$, com $i = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$

Para compreender melhor essa representação, vejamos o seguinte exemplo o número $32,864565656\dots$ é uma dízima periódica e nele temos $a_0 = 32; a_1 = 8; a_2 = 6; a_3 = 4; a_4 = 5; a_5 = 6; a_6 = 5; a_7 = 6; a_8 = 5; a_9 = 6; \dots$, e pode ser representado como:

$$32,864565656\dots = 32 + \frac{8}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{6}{10^5} + \frac{5}{10^6} + \frac{6}{10^7} + \frac{5}{10^8} + \frac{6}{10^9} + \dots$$

De forma geral, sejam os número reais

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 a_3 \cdots a_n a_{n+1} \cdots$$

e

$$\alpha_n = a_0, a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$$

Observe que α_n é um número decimal finito com n casas decimais, enquanto que α pode ter uma representação decimal infinita, mas que coincide com a representação de α_n até a n -ésima casa decimal.

Tem-se então que $\alpha_n \leq \alpha$ e além disso, fazendo $\alpha - \alpha_n$ temos:

$$\begin{aligned} \alpha - \alpha_n &= a_0, a_1 a_2 a_3 \cdots a_n a_{n+1} \cdots - a_0, a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \\ &= \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \cdots \right) - \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \right) \\ &= a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \cdots - a_0 - \frac{a_1}{10} - \frac{a_2}{10^2} - \cdots - \frac{a_n}{10^n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{10^{n+2}} + \dots \\
&< \frac{9}{10^{n+1}} + \frac{9}{10^{n+2}} + \frac{9}{10^{n+3}} + \dots, \text{ pois } 0 \leq a_i \leq 9 \\
&< \left(\frac{9}{10^{n+1}} \right) \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \right), \text{ observe que é a soma de uma PG infinita.} \\
&= \frac{1}{10^n}
\end{aligned}$$

Portanto, $\alpha - \alpha_n < \frac{1}{10^n}$ para todo $n \geq 0$.

Se um número real x é menor do que α , então deve existir um número natural $n \geq 0$ tal que $x < \alpha_n$. Para provar isto, observemos que $x < \alpha$ nos dá $\alpha - x > 0$. Tome n suficientemente grande tal que $\frac{1}{10^n} < \alpha - x$ e assim $\alpha - \alpha_n < \frac{1}{10^n} < \alpha - x$ logo temos $\alpha - \alpha_n < \alpha - x$ e daí resulta $x < \alpha_n$.