

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE INFORMÁTICA
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

MAYARA MIDORI OMAI

O PROBLEMA DA INUNDAÇÃO EM GRAFOS FUNÇÃO-CIRCULAR

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

PONTA GROSSA
2016

MAYARA MIDORI OMAI

O PROBLEMA DA INUNDAÇÃO EM GRAFOS FUNÇÃO-CIRCULAR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação, do Departamento Acadêmico de Informática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Sheila Morais de Almeida.

PONTA GROSSA

2016



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Ponta Grossa

Diretoria de Graduação e Educação Profissional
Departamento Acadêmico de Informática
Bacharelado em Ciência da Computação



TERMO DE APROVAÇÃO

O PROBLEMA DA INUNDAÇÃO EM GRAFOS FUNÇÃO-CIRCULAR

por

MAYARA MIDORI OMAI

Este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) foi apresentado em 01 de junho de 2016, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação. A candidata foi arguida pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

Profa. Dra. Sheila Morais de Almeida
Orientadora

Prof. Dr. Gleifer Vaz Alves
Membro titular

Prof. Dr. Uéverton dos Santos Souza
Membro titular

Prof. Dr. Augusto Foronda
Responsável pelo Trabalho de Conclusão de
Curso

Prof. Dr. Erikson Freitas de Moraes
Coordenador do curso

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço aos meus pais Sandro Omai e Fátima Omai que me deram os meios para continuar estudando e sempre me incentivaram a continuar, suportaram a distância e nunca me deixaram desanimar, que nos momentos mais difíceis me apoiaram nas minhas decisões. Agradeço a todos os meus colegas de graduação Ananda, Jônatas, Mary, Georgia, Lennon, Gustavo, Wesley, Víctor, Luan, Breno e todos os outros que fizeram parte da minha jornada e fizeram meus dias mais engraçados e felizes. Agradeço em especial a Arlete Mocelin uma pessoa incrível que tive a oportunidade de conhecer, que me adotou como filha, me deu muito carinho e sempre me encorajou. Ao professor Gleifer Vaz que corrigiu minha proposta com muita atenção e dedicação. Ao professor Uéverton Souza que acompanhou o desenvolvimento deste trabalho. Por fim e não menos importante agradeço a minha professora orientadora Sheila Moraes de Alemida, que além de professora e orientadora é uma amiga com quem sempre posso contar. É um exemplo para mim, uma pessoa em que procuro me espelhar, torço para um futuro com professores assim dedicados e esforçados que inspirem seus alunos.

RESUMO

OMAI, Mayara Midori. **O Problema da Inundação em grafos função-circular**. 2016. 47 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Ciência da Computação) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Ponta Grossa, 2016.

O Problema da Inundação consiste em determinar o menor número de movimentos que tornam uma superfície, previamente colorida, monocromática. Tal superfície pode ser modelada como um grafo, onde cada vértice corresponde a uma região monocromática contínua e se duas regiões são vizinhas, então existe uma aresta entre os vértices que as representam. Considere um grafo construído a partir de uma superfície colorida. Um subgrafo conexo composto por vértices coloridos com a mesma cor é denominado componente monocromática. Um movimento se caracteriza pela atribuição de uma cor aos vértices de uma componente monocromática. Existem duas variações do Problema da Inundação, o Problema da Inundação com pivô fixo e o Problema da Inundação com pivô livre. No Problema da Inundação com pivô fixo a atribuição de cor é feita sempre na mesma componente monocromática. Já no Problema da Inundação com pivô livre pode-se escolher uma componente monocromática diferente para a atribuição de cores a cada movimento. Este trabalho apresenta uma solução em tempo polinomial para o Problema da Inundação com pivô fixo em uma classe de grafos que está sendo definida pela primeira vez neste trabalho, a classe dos grafos função-circular. Os grafos função-circular são aqueles que possuem uma representação por interseção de curvas de função entre dois círculos concêntricos, onde cada vértice é representado por uma curva e dois vértices são vizinhos se, e somente se, as curvas correspondentes se intersectam na representação. Os grafos função-circular são uma superclasse dos grafos de co-comparabilidade e a solução apresentada neste trabalho foi baseada na solução do Problema da Inundação com pivô fixo para grafos de co-comparabilidade dada por Fleischer e Woeginger em 2012. A solução do Problema da Inundação com pivô fixo em grafos função-circular implica na solução do Problema da Inundação com pivô fixo para os grafos trapézio circular, arco-circular, círculo, permutação circular, *concave-round*, potência de ciclo, entre outras.

Palavras-chaves: Problema da Inundação. Algoritmo polinomial. Grafos função-circular. Jogos de inundação.

ABSTRACT

OMAI, Mayara Midori. **The flood problem in circular-function graphs**. 2016. 47 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Ciência da Computação) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Ponta Grossa, 2016.

The Flood it Problem aims to determine the smallest number of movements required to convert a colored surface into a monochromatic one. Such surface can be modeled as a graph, where each vertex is a continuous monochromatic region. If two regions are neighbors, then there is an edge connecting the vertices representing these regions. In a graph modeled from a colored surface, a connected subgraph composed by vertices of the same color is called monochromatic component. A movement is the assignment of a color to the vertices of a monochromatic component. There are two variations of the Flood it Problem, one is called Fixed Flood it and the other one Free Flood it. In the former, all the color assignments are made in the same monochromatic component. In the latter, it's possible to choose a distinct monochromatic component for each movement. This paper presents a polynomial time solution for the Fixed Flood it Problem in circular-function graphs. The circular-function graphs are a new graph class defined for the first time in this work. Circular-function graphs are graphs which are intersection graphs of curves between two concentric circles, where each vertex is represented by a curve, and two vertices are neighbors if and only if their corresponding curves intersect each other. This graph class is a superclass of the co-comparability graphs, and the solution proposed in this paper is based on the solution of the Fixed Flood it Problem for co-comparability graphs, given by Fleischer and Woeginger in 2012. The solution of the Fixed Flood it Problem in circular-function graphs implies the solution to the same problem in circular trapezoid graphs, circular-arc graphs, circle graphs, circular permutation graphs, concave-round graphs, cycles, among others.

Key-words: Flood it Problem. Polynomial Algorithm. Circular-function graphs. Flood filling games.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– <i>Grid</i> 3×4 .	8
Figura 2	– Sequência mínima para um grafo <i>grid</i> 3×4 .	9
Figura 3	– Grafo função-circular e sua representação.	10
Figura 4	– Grafos G e G^2 .	12
Figura 5	– Grafo C_6 .	13
Figura 6	– Grafo C_8^2 .	13
Figura 7	– Grafo G e subgrafo H .	13
Figura 8	– Grafo G e subgrafo induzido H .	14
Figura 9	– Hipergrafo.	14
Figura 10	– Tabuleiro 2×4 .	15
Figura 11	– 3-tabuleiro 2×5 .	15
Figura 12	– Tabuleiro $2 \times n$.	16
Figura 13	– 3-tabuleiro 2×5 e grafo <i>grid</i> 2×5 .	16
Figura 14	– Tabuleiro circular 2×6 .	17
Figura 15	– Tabuleiro circular 2×7 .	18
Figura 16	– d -tabuleiro circular $2 \times n$ e subgrafo do hipergrafo correspondente.	19
Figura 17	– Grafo função.	22
Figura 18	– Orientação transitiva.	22
Figura 19	– Grafo de comparabilidade.	23
Figura 20	– Grafos G e \overline{G} .	24
Figura 21	– Grafos D , G e \overline{G} .	24
Figura 22	– Grafo \overline{G} e grafo interseção de curvas de função entre duas retas paralelas.	25
Figura 23	– Grafos G e $G \setminus (v_4, v_5)$.	25
Figura 24	– Grafo touro.	25
Figura 25	– Grafos G , $G \setminus (v_0, v_2)$ e $G \setminus (v_0/v_2, v_7)$.	27
Figura 26	– Grafo função de $G \setminus (v_0/v_2, v_7)$.	27
Figura 27	– Grafo função.	28
Figura 28	– Grafo função e representação com vértice pivô extremal.	29
Figura 29	– Grafo função e representação com vértice pivô não extremal.	30
Figura 30	– Exemplos de grafo conexo e desconexo.	32
Figura 31	– Componentes conexas A e B .	33
Figura 32	– Grafo função-circular G e grafo G .	33
Figura 33	– Grafo função-circular $G \setminus N(v_{10})$ e grafo $G \setminus N(v_{10})$.	34
Figura 34	– Grafo <i>caterpillar</i> .	39
Figura 35	– Grafo G e representação por interseção de intervalos próprios.	39
Figura 36	– Grafo G e representação por interseção de intervalos.	40
Figura 37	– Grafo arco-circular.	40
Figura 38	– Grafo permutação.	41
Figura 39	– Grafo permutação circular.	41
Figura 40	– Grafo trapézio.	42
Figura 41	– Exemplo grafo trapézio circular.	42
Figura 42	– Grafo círculo.	43
Figura 43	– Grafo <i>concave-round</i> .	43
Figura 44	– Grafo trapézio circular e representação função-circular correspondente.	44
Figura 45	– Relações de contingência entre grafos função-circular e suas subclasses.	45

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
1.1	ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO	10
2	O PROBLEMA DA INUNDAÇÃO PARA POTÊNCIAS DE CICLO C_n^2	12
2.1	PRELIMINARES	12
2.2	O PROBLEMA DA INUNDAÇÃO PARA AS SEGUNDAS POTÊNCIAS DE CICLO	14
3	O PROBLEMA DA INUNDAÇÃO EM GRAFOS CO-COMPARABILIDADE ...	22
3.1	PRELIMINARES	22
3.2	O PROBLEMA DA INUNDAÇÃO PARA GRAFOS DE CO-COMPARABILIDADE	26
4	O PROBLEMA DA INUNDAÇÃO EM GRAFOS FUNÇÃO-CIRCULAR	32
4.1	PRELIMINARES	32
4.2	O PROBLEMA DA INUNDAÇÃO EM GRAFOS FUNÇÃO-CIRCULAR	34
5	IMPACTO DO RESULTADO	39
5.1	PRELIMINARES	39
5.2	ABRANGÊNCIA DOS RESULTADOS	43
6	CONCLUSÃO	46
6.1	TRABALHOS FUTUROS	46
	REFERÊNCIAS	47

1 INTRODUÇÃO

Imagine uma superfície colorida, esta pode ser modelada como um grafo G , onde cada região contínua monocromática com cor c é representada por um vértice com a mesma cor e se duas regiões são vizinhas, então existe uma aresta entre os vértices correspondentes. O Problema da Inundação consiste em determinar o menor número de movimentos que tornam essa superfície monocromática. Um subgrafo conexo composto por vértices coloridos com a mesma cor é denominado componente monocromática. Um movimento, também chamado inundação, se caracteriza pela atribuição de uma cor x a uma componente monocromática. A atribuição de uma cor x a uma componente monocromática implica na atribuição da cor x para todos os vértices que a compõem. Em sua forma mais tradicional o Problema da Inundação é conhecido como *Flood it* e é apresentado em grafos *grid* $n \times m$. A Figura 1 apresenta um grafo *grid* 3×4 colorido, uma instância tradicional do Problema da Inundação, onde cada rótulo c_i , $1 \leq i \leq 4$, representa a cor com a qual o respectivo vértice está colorido.

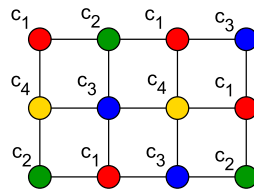


Figura 1 – Grid 3×4 .

Fonte: Autoria própria.

Diz-se que o Problema da Inundação tem *pivô fixo* quando a atribuição de cor é feita sempre na mesma componente monocromática. O Problema da Inundação é *livre* quando a componente monocromática em que se atribui cor pode ser escolhida a cada movimento. Na Figura 2, pode-se observar os passos para a inundação de um grafo *grid* 3×4 com pivô fixo (vértice superior esquerdo). Note que a sequência de cores escolhida $(c_2c_1c_4c_3c_2c_1)$, totaliza 6 movimentos.

O Problema da Inundação pode modelar sistemas que analisam o comportamento e velocidade de propagação de algo, como um vírus, uma notícia, uma contaminação, uma alteração climática, dentre outras possibilidades. Tais modelos são, por exemplo, bastante semelhantes aos apresentados por Aschwanden (2004) para simulação de propagação de algumas doenças. Outra possível aplicação é a determinação da velocidade de divulgação de informações em redes sociais e a previsão do impacto que a existência de um grupo específico de indivíduos causa no tempo necessário para que a informação atinja outros grupos predeterminados.

Um problema é polinomial se existe um algoritmo cujo número de instruções computadas durante a execução do mesmo para a solução do problema é um polinômio em função do tamanho da entrada. No caso do Problema da Inundação o tamanho da entrada é a soma do número de vértices e arestas do grafo. O conjunto dos problemas polinomiais é denotado por

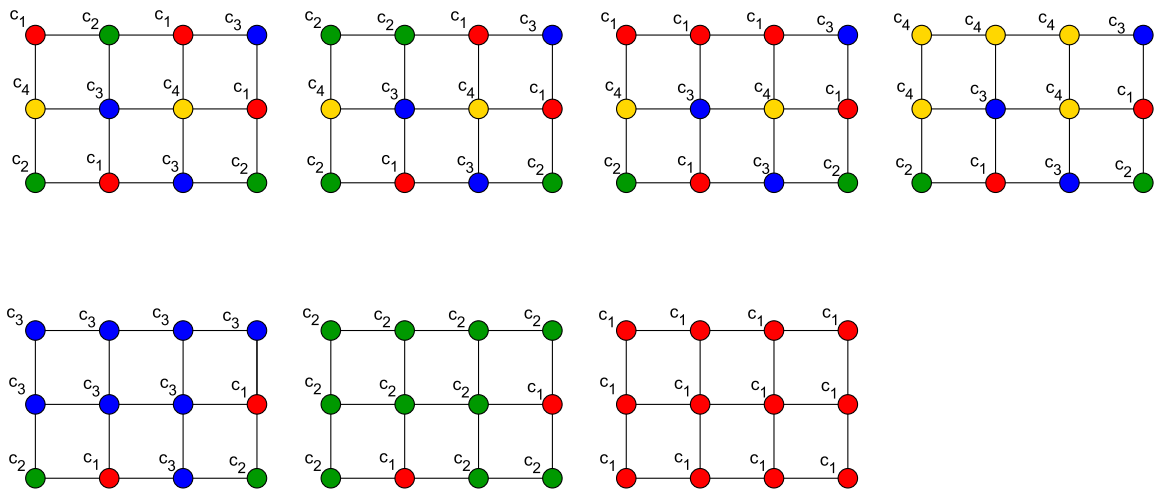


Figura 2 – Sequência mínima para um grafo *grid* 3×4 .

Fonte: Autoria própria.

P. Um problema pertence ao conjunto NP se existe algoritmo polinomial que verifica a correteude de qualquer solução apresentada para uma instância do mesmo. Note que o conjunto dos problemas em P é um subconjunto de NP. Um problema é NP-Difícil se, dado um algoritmo que o resolva, é possível adaptá-lo de forma eficiente para que o mesmo resolva qualquer problema em NP. Um problema é NP-completo se pode ser apresentado em uma versão de decisão (a resposta é apenas sim ou não) e pertence aos conjuntos NP e NP-Difícil. Observe que caso exista algum algoritmo polinomial para um problema NP-completo, então $P = NP$. Esta é uma questão fundamental da computação, considerada um dos grandes desafios do milênio (JAFFE, 2006).

A versão de decisão do Problema da Inundação consiste em determinar se é possível inundar um grafo com n movimentos, onde o grafo e o número inteiro n são dados como entrada. Sabe-se que a versão de decisão do Problema da Inundação em um grafo simples qualquer é um problema NP-completo (FUKUI *et al.*, 2013) mesmo quando o pivô é fixo. O Problema da Inundação com pivô fixo é NP-Difícil em *grids* $n \times m$, para $n \geq 3$ (CLIFFORD *et al.*, 2012) e é NP-completo quando a inundação é livre e $n \geq 3$ (FUKUI *et al.*, 2013). Para ciclos, o problema é polinomial em suas duas versões (LAGOUTTE; NOUAL; THIERRY, 2011; HIROYUKI *et al.*, 2011). Souza, Protti e Silva (2014) provaram que o Problema da Inundação com pivô fixo é polinomial para as segundas potências de ciclo, C_n^2 ; para as potências de caminho, P_n^2 ; e para os grafos *grid* circulares $2 \times n$. Para os grafos de co-comparabilidade, Fleischer e Woeginger (2012) provaram que a solução é polinomial quando o pivô é fixo e Fukui *et al.* (2013) provaram que se a inundação é livre, o problema é NP-completo. Note que soluções do Problema da Inundação ainda que restritas a um subconjunto específico de grafos são contribuições para a conjectura de que $P = NP$.

A princípio este trabalho tinha como objetivo resolver o Problema da Inundação com pivô fixo para as potências de ciclo, mas notamos que era possível encontrar um resultado maior. Neste contexto, definimos uma nova classe de grafos, os grafos função-circular, e generalizamos o resultado apresentado por Fleischer e Woeginger (2012) para o Problema da Inundação com pivô fixo em grafos de co-comparabilidade, resolvendo o mesmo problema para os grafos função-circular, que incluem os grafos de co-comparabilidade e as potências de ciclo.

Um grafo G é **função-circular** quando existe uma representação por interseção de uma família de curvas com extremos em dois círculos concêntricos, onde cada curva representa um vértice de G e se houver uma ou mais interseções entre duas curvas, então existe uma aresta entre os vértices que as representam. Note que, por definição, mesmo que haja mais de um ponto de interseção entre duas curvas, existe apenas uma aresta entre os respectivos vértices, ou seja, o grafo função-circular é simples¹. A Figura 3 apresenta um exemplo de um grafo função-circular e sua representação.

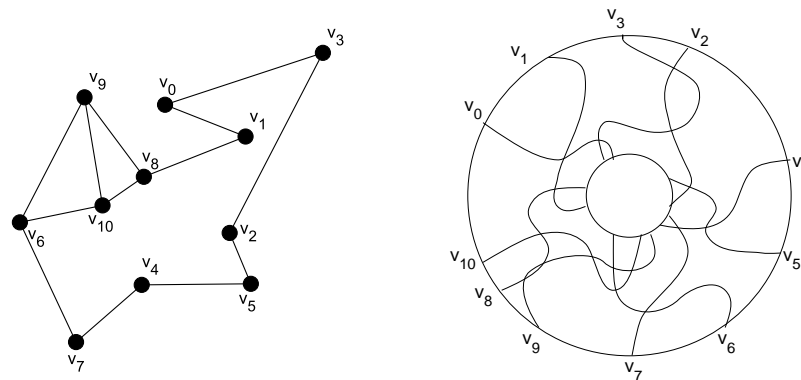


Figura 3 – Grafo função-circular e sua representação.

Fonte: Autoria própria.

A classe função-circular inclui classes de grafos amplamente conhecidas e bem estruturadas, tais como potências de ciclo, arco-circulares e permutação circular.

1.1 ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO

No Capítulo 2 apresenta-se uma síntese da solução de Souza, Protti e Silva (2014) para o Problema da Inundação com pivô fixo em potências de ciclo C_n^2 , que são uma subclasse dos grafos função-circular para a qual o Problema da Inundação com pivô fixo foi resolvido em tempo polinomial. No Capítulo 3 apresenta-se a solução de Fleischer e Woeginger (2012) para o Problema de Inundação com pivô fixo para os grafos de co-comparabilidade, que como dito anteriormente são uma subclasse dos grafos função-circular. O trabalho de Fleischer e Woeginger

¹ Um grafo é simples se não possui laço (uma aresta que conecta um vértice a ele mesmo) nem arestas múltiplas (mais de uma aresta entre o mesmo par de vértices).

(2012) foi utilizado como base para a solução do Problema da Inundação com pivô fixo para os grafos função-circular. O Capítulo 4 apresenta a solução do Problema da Inundação com pivô fixo para os grafos função-circular e o Capítulo 5 detalha a abrangência desta solução em comparação com o que se conhecia a partir da solução dada por Fleischer e Woeginger (2012). Por fim, o Capítulo 6 apresenta as conclusões deste trabalho.

2 O PROBLEMA DA INUNDAÇÃO PARA POTÊNCIAS DE CICLO C_n^2

Uma das referências mais importantes utilizadas no desenvolvimento deste trabalho foi o trabalho de Souza, Protti e Silva (2014), que apresenta uma prova de que o Problema da Inundação com pivô fixo em segundas potências de ciclo pode ser resolvido em tempo polinomial. A prova se baseia na transformação, em tempo polinomial, de grafos C_n^2 em d -tabuleiros circulares $2 \times n$ para os quais o Problema da Inundação com pivô fixo pode ser resolvido em tempo $O(n^2)$. Para maior compreensão do capítulo alguns conceitos básicos são apresentados a seguir.

2.1 PRELIMINARES

Existem diferentes definições de **potências de grafos**, neste trabalho, adotaremos a definição apresentada por Lin *et al.* (2011). A k -ésima potência G^k de um grafo G tem o mesmo conjunto de vértices de G e dois vértices distintos u e v de G são adjacentes em G^k se, e somente se, a distância entre eles em G é de até k . Na Figura 4 tem-se um exemplo de potência do grafo G , onde $k = 2$. Note que as arestas tracejadas conectam em G^2 vértices que estão à distância 2 em G .

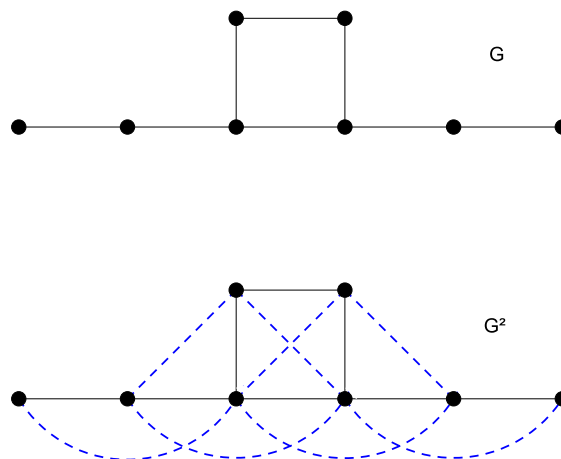


Figura 4 – Grafos G e G^2 .

Fonte: Autoria própria.

Um **ciclo** $C_n = (V, E)$ é uma sequência de vértices $v_1v_2 \dots v_{n-1}v_nv_1$ tal que $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $E = \{(v_i, v_{i \pmod{n}+1}), 1 \leq i \leq n\}$. Na Figura 5 tem-se um C_6 .

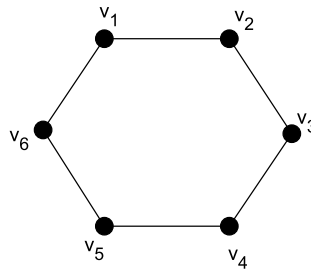


Figura 5 – Grafo C_6 .

Fonte: Autoria própria.

A k -ésima **potência de um ciclo** com n vértices, denotada por C_n^k , é obtida aplicando-se a operação de potência sobre o grafo C_n . Os ciclos são a primeira potência de ciclo.

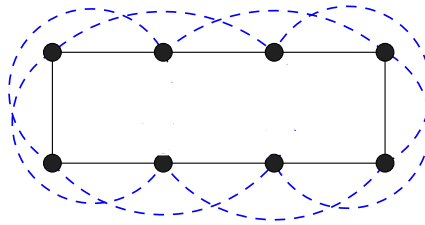


Figura 6 – Grafo C_8^2 .

Fonte: Autoria própria.

Na Figura 6 pode-se ver um C_8^2 , onde as arestas tracejadas representam as arestas de distância 2 e as arestas contínuas representam as arestas de distância 1.

Um grafo H é um **subgrafo** de um grafo G se, $V_H \subseteq V_G$ e $E_H \subseteq E_G$, onde V_G e E_G são respectivamente o conjunto de vértices e arestas de G . Um exemplo pode ser visto na Figura 7.

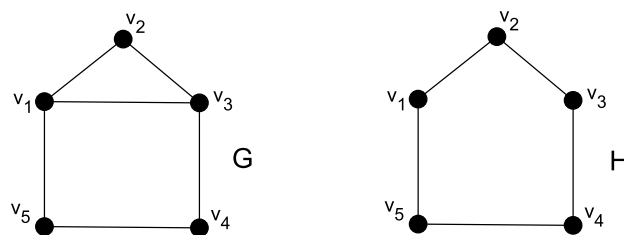


Figura 7 – Grafo G e subgrafo H .

Fonte: Autoria própria.

Um subgrafo **induzido** por um subconjunto X dos vértices de G , denotado por $G[X]$, é o grafo $G[X] = (V(G[X]), E(G[X]))$, onde $V(G[X]) = X$ e $E(G[X])$ é o subconjunto de $E(G)$ composto por todas as arestas que incidem em dois vértices de X . A Figura 8 apresenta um grafo G e o subgrafo induzido $G[\{v_0, v_1, v_2\}]$.

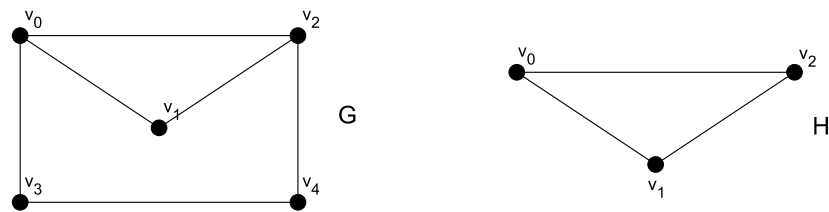


Figura 8 – Grafo G e subgrafo induzido H .

Fonte: Autoria própria.

Um **hipergrafo** $H = (V(H), E(H))$ é uma estrutura matemática abstrata, onde $V(H)$ é um conjunto de vértices, e $E(H)$ é um conjunto de subconjuntos de $V(H)$, chamados de hiperarestas. A Figura 9 apresenta um exemplo de um hipergrafo com duas hiperarestas, sendo $E(H) = \{\{v_1, v_5, v_6\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4\}\}$.

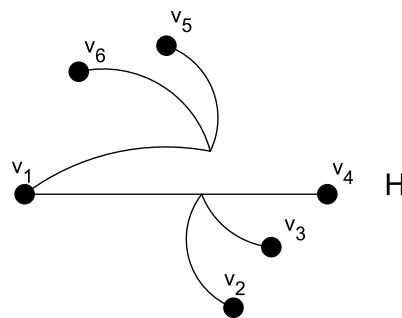


Figura 9 – Hipergrafo.

Fonte: Autoria própria.

2.2 O PROBLEMA DA INUNDAÇÃO PARA AS SEGUNDAS POTÊNCIAS DE CICLO

Um tabuleiro é uma superfície plana particionada em linhas e colunas. Um tabuleiro $n \times m$ pode ser representado por uma matriz $n \times m$. Portanto tabuleiros $2 \times n$ correspondem às matrizes $2 \times n$. Um exemplo de tabuleiro 2×4 pode ser visto na Figura 10-1.

Tabuleiros circulares se caracterizam pela adjacência entre a primeira e última coluna. Logo, dado um tabuleiro, este pode ser transformado em um tabuleiro circular como pode ser visto na Figura 10-2, onde a coluna 1 e a coluna 4 se tornaram vizinhas.

Um d -tabuleiro se caracteriza por ser uma matriz cuja d -ésima coluna é monocromática representando o pivô do Problema da Inundação. Analogamente, um d -tabuleiro circular possui sua d -ésima coluna monocromática, representando o pivô. A Figura 11 apresenta um 3-tabuleiro 2×5 e seu respectivo 3-tabuleiro circular 2×5 .

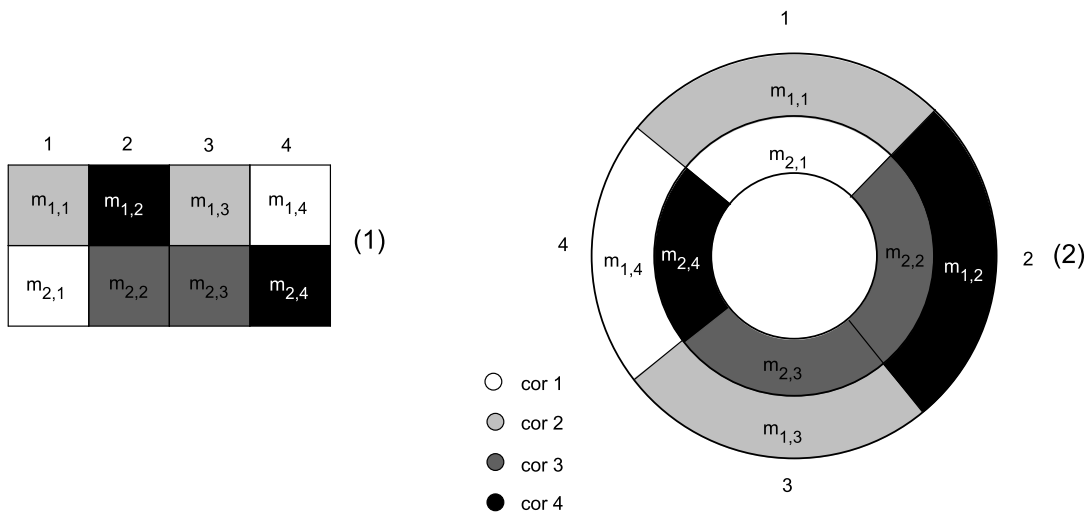


Figura 10 – Tabuleiro 2×4 .

Fonte: Autoria própria.

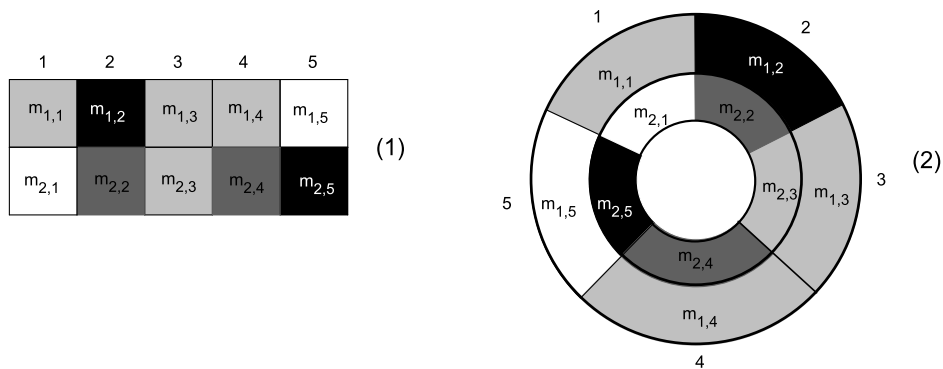


Figura 11 – 3-tabuleiro 2×5 .

Fonte: Autoria própria.

Considere o Problema da Inundação em um tabuleiro $2 \times n$, com pivô na célula $m_{i,j}$. Para representar o pivô no respectivo tabuleiro circular, inserem-se duas novas colunas d e p_2 nas posições $j + 1$ e $j + 2$, onde d é uma coluna monocromática com a mesma cor que $m_{i,j}$ e p_2 é uma cópia da coluna j . A Figura 12-2 apresenta o 3-tabuleiro circular obtido a partir do tabuleiro circular da Figura 12-1 assumindo a célula $m_{1,1}$ como pivô.

Um grafo G que modela o Problema da Inundação em um d -tabuleiro é composto por um conjunto de vértices, onde cada vértice $v_{i,j}$ representa a célula $m_{i,j}$ e tem cor igual a $m_{i,j}$, e dois vértices são adjacentes se, e somente se, as células correspondentes do tabuleiro são consecutivas na mesma linha ou na mesma coluna. Seja T um d -tabuleiro $2 \times n$ representado por um grafo G com vértices $v_{i,j}$, $1 \leq i \leq 2$ e $1 \leq j \leq n$. Considere L o conjunto dos vértices $v_{i,j}$ tal que $j \leq d$ e R o conjunto dos vértices $v_{i,j}$ tal que $j \geq d$. Vamos denotar por

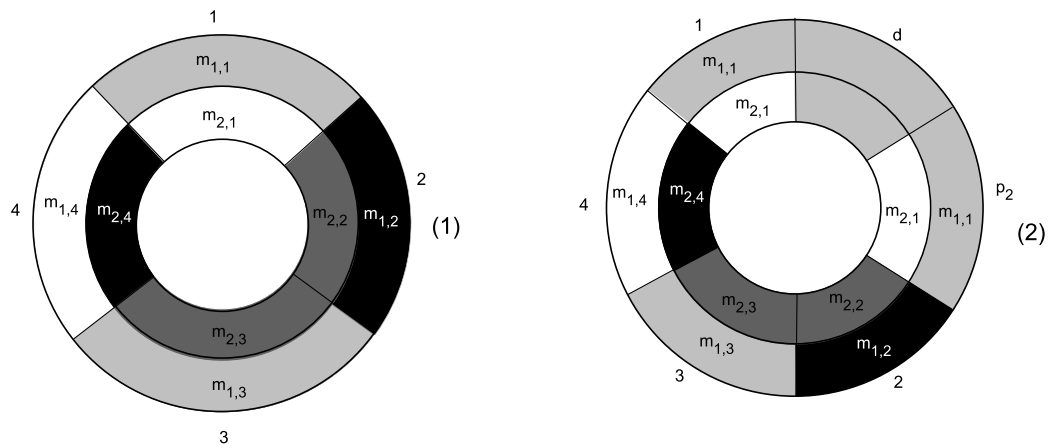


Figura 12 – Tabuleiro $2 \times n$.

Fonte: Autoria própria.

G_L (G_R) o subgrafo máximo de G conexo monocromático induzido por vértices de L (R) e que contenha o pivô. A Figura 13 apresenta a modelagem do 3-tabuleiro 2×5 da Figura 11 como um grafo. Neste exemplo $L = \{v_{1,1}, v_{1,2}, v_{1,3}, v_{2,1}, v_{2,2}, v_{2,3}\}$, $R = \{v_{1,3}, v_{1,4}, v_{1,5}, v_{2,3}, v_{2,4}, v_{2,5}\}$, $G_L = G[v_{1,3}, v_{2,3}]$ e $G_R = G[v_{1,3}, v_{2,3}, v_{1,4}]$.

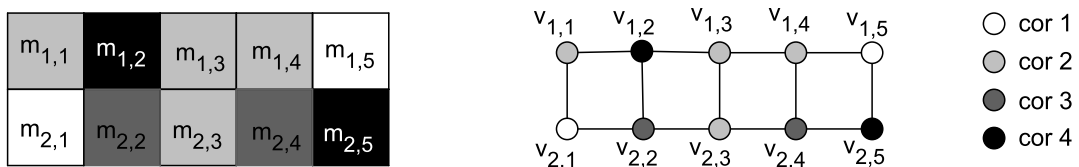


Figura 13 – 3-tabuleiro 2×5 e grafo $grid$ 2×5 .

Fonte: Autoria própria.

O Lema 2.2.1 apresentado a seguir, garante que as segundas potências de ciclo podem ser transformadas em tabuleiros circulares sem perda de generalidade.

Lema 2.2.1. (SOUZA, 2014) *O Problema da Inundação com pivô fixo em C_n^2 é um caso particular de tabuleiros circulares.*

Considere os vértices de uma potência de ciclo v_1, v_2, \dots, v_n . A transformação é feita a partir de dois casos: (1) quando n é par e (2) quando n é ímpar.

Caso 1: quando n é par, a primeira linha do tabuleiro circular $2 \times n$ é constituída por $v_{a_1}, v_{b_1}, v_{a_3}, v_{b_3}, \dots, v_{a_{n-1}}, v_{b_{n-1}}$ e a segunda linha é $v_{b_n}, v_{a_2}, v_{b_2}, v_{a_4}, v_{b_4}, \dots, v_{a_{n-2}}, v_{b_{n-2}}, v_{a_n}$.

Caso 2: quando n é ímpar, a primeira linha do tabuleiro circular $2 \times n$ é constituída por $v_{a_1}, v_{a_3}, v_{b_3}, v_{a_5}, v_{b_5}, \dots, v_{a_{n-2}}, v_{b_{n-2}}, v_{a_n}$ e na segunda linha $v_{b_1}, v_{a_2}, v_{a_4}, v_{b_4}, \dots, v_{a_{n-1}}, v_{b_{n-1}}$.

As células são dispostas no sentido anti-horário e a última célula é vizinha da primeira.

Na construção de um tabuleiro circular com n par, as células v_{a_i} e v_{b_i} que representam o vértice v_i , são vizinhas de uma célula com cor c se, e somente se, existe um vértice vizinho de v_i com cor c . Para tabuleiros com n ímpar a construção é da mesma forma, exceto para as células v_{a_2} e v_{a_n} que são vizinhas das células que representam o vértice pivô. Note que se no problema original ocorrer a situação em que v_2 inunda v_n , então no tabuleiro circular correspondente v_{a_2} pertence ao bloco monocromático do pivô e, neste caso, o próprio pivô pode inundar v_{a_n} . Um exemplo de C_n^2 com n par é apresentado na Figura 14, onde pode-se observar a representação de um C_6^2 como um tabuleiro circular 2×6 .

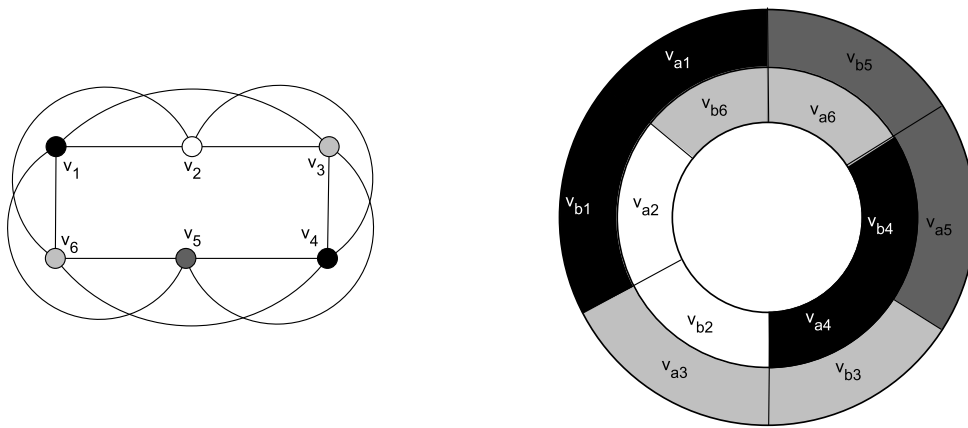


Figura 14 – Tabuleiro circular 2×6 .

Fonte: Adaptado de Souza, Protti e Silva (2014).

Na Figura 15 pode-se observar um exemplo com n ímpar, onde um C_7^2 é representado como um tabuleiro 2×7 .

Como d -tabuleiros circulares podem ser transformados em d -tabuleiros o Lema 2.2.2 é importante para resolver o Problema da Inundação em tempo polinomial em d -tabuleiros circulares.

Lema 2.2.2. (SOUZA, 2014) Dado um d -tabuleiro $2 \times n$ e duas células $v_l \in L$ e $v_r \in R$, o menor número de movimentos para conectar v_l e v_r pode ser encontrado em tempo $O(n^2)$

Demonstração. Considere um tabuleiro T previamente colorido. Observe que v_l será inundado por uma célula que está na mesma coluna ou por uma célula à direita. Portanto, colunas à esquerda de v_l não precisam ser analisadas. O mesmo serve para v_r já que o objetivo é encontrar o menor número de movimentos que conecta v_l a v_r . Então, para saber qual cor deve ser escolhida em cada movimento só é necessário saber quais são as células adjacentes às células mais à esquerda de L e as células adjacentes às células mais à direita de R . Quando estas células são definidas um hipergrafo acíclico orientado H é construído, da seguinte forma.

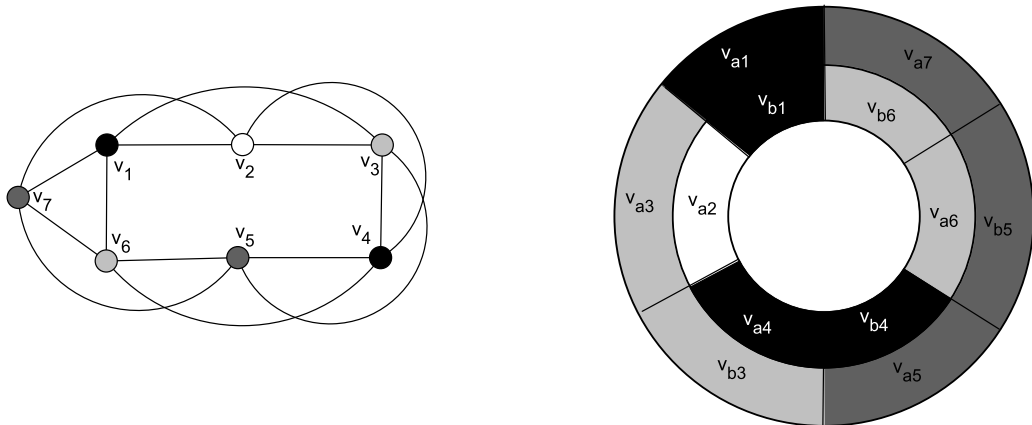


Figura 15 – Tabuleiro circular 2×7 .

Fonte: Adaptado de Souza, Protti e Silva (2014).

1. Crie um vértice para cada possibilidade de configuração de L ou R ;
2. Dadas as configurações S_1, T_1 e S_2, T_2 de L e R , respectivamente, adicione um aresta direcionada $(\{S_1, S_2\}, \{T_1, T_2\})$ com cor c se ao inundar com cor c é possível mudar L da configuração S_1 para a configuração T_1 e mudar R da configuração S_2 para T_2 .
3. Dadas as configurações S_1, T_1 de L (ou R), adicione uma hiperaresta (S_1, T_1) com cor c se ao inundar com a cor c é possível mudar a configuração de L (ou R) de S_1 para T_1 ;
4. Contraia os vértices que representam as configurações iniciais de L e R em um único vértice s .

Cada hiperaresta de H representa uma possibilidade de movimento. Uma hiperaresta de forma $(\{S_1, S_2\}, \{T_1, T_2\})$ representa um movimento que conecta vértices de L e R . Achar a quantidade mínima de movimentos para conectar v_l e v_r implica em achar a menor quantidade de hiperarestas necessárias para construir caminhos entre s e vértices que representam configurações em que v_l e v_r pertencem ao bloco monocromático que contém o pivô. Uma vez que o número de hiperarestas de H é $O(n^2)$, é fácil ver que a quantidade mínima de movimentos para conectar v_l a v_r é descoberta em tempo $O(n^2)$. \square

A Figura 16 apresenta um d -tabuleiro T e o subgrafo do hipergrafo H construído a partir de T que mostra a menor quantidade de movimentos que inunda as células a e l .

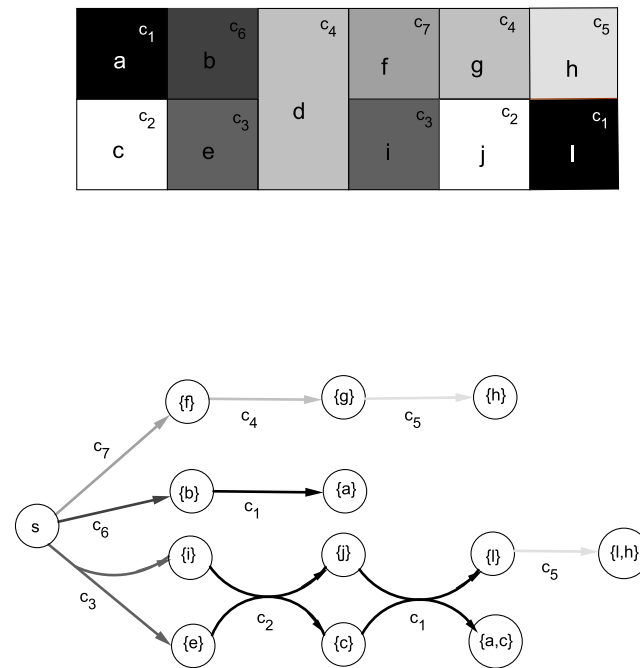


Figura 16 – d -tabuleiro circular $2 \times n$ e subgrafo do hipergrafo correspondente.

Fonte: Souza, Protti e Silva (2014).

A partir do Lema 2.2.2 pode-se concluir que a solução do Problema da Inundação com pivô fixo em d -tabuleiros $2 \times n$ pode ser encontrada em tempo polinomial, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 2.2.3. (SOUZA, 2014) *O Problema da Inundação com pivô fixo pode ser resolvido em tempo $O(kn^2)$ em d -tabuleiros $2 \times n$, onde k é o número de cores.*

Demonstração. Seja T um d -tabuleiro $2 \times n$. Se uma célula $v_l \in L$ ($v_r \in R$) tem cor c e nenhuma outra coluna estritamente à esquerda (direita) de v_l (v_r) tem cor c , faça uma marca especial nesta célula. Uma coluna é marcada quando possui uma célula marcada. Se todas as células marcadas forem inundadas então todo o tabuleiro T será. Para entender, note que quando uma célula marcada v_l de cor c é inundada, todas as outras células de cor c em L que ainda não foram inundadas estão à direita de v_l e portanto adjacentes à região inundada. E quando uma célula marcada v_r de cor c é inundada, todas as outras células de cor c em R que ainda não foram inundadas estão à esquerda de v_r e portanto adjacentes à região inundada. Assim busca-se iterativamente a menor sequência de movimentos que conecta a célula marcada mais a direita de L à célula marcada mais a esquerda de R , até que todas as células marcadas estejam inundadas. Pelo Lema 2.2.2 encontrar o menor número de movimentos que conecta estas duas células pode ser feito em tempo $O(n^2)$. Como, para cada cor, é preciso determinar quais serão as suas células marcadas, o número mínimo de movimentos necessários para inundar T pode ser obtido em tempo $O(kn^2)$. \square

O Teorema 2.2.4 prova que d -tabuleiros circulares podem ser transformados em d -tabuleiros e, utilizando o resultado do Teorema 2.2.3, o Problema da Inundação com pivô fixo pode ser resolvido em tempo polinomial em d -tabuleiros circulares $2 \times n$.

Teorema 2.2.4. (SOUZA, 2014) *O Problema da Inundação com pivô fixo pode ser resolvido em tempo $O(kn^4)$ em d -tabuleiros circulares $2 \times n$, onde k é o número de cores.*

Prova. Sejam T um d -tabuleiro circular $2 \times n$ com colunas $d, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ e S uma sequência ótima de movimentos para inundar T . Dizemos que uma célula v pertencente a c_i é inundada pela direita por S , quando $i = 1$ ou quando $i \leq n - 2$ e, antes de fazer um movimento que inunda v , existe um bloco monocromático que contém o pivô e é o vizinho à direita da célula v . Ao se escolher a cor de v (cor c) para o próximo movimento da inundação, todo o bloco do pivô é colorido com cor c e, como este bloco é adjacente à célula v , a mesma passa a integrar o bloco do pivô. Se uma célula v não é inundada pela direita, então é inundada pela esquerda. A coluna c_i é inundada pela direita por S , se as duas células de c_i são inundadas pela direita, caso contrário a coluna é inundada pela esquerda. Note que as adjacências entre células inundadas pela direita e células inundadas pela esquerda não são importantes para o resultado da inundação realizada pela sequência S , ou seja, células inundadas pela direita e células inundadas pela esquerda não precisam ser adjacentes para que o tabuleiro T seja inundado por S . Considere o tabuleiro T após os movimentos da sequência S . Seja c_i uma coluna inundada pela direita com índice máximo i , e v_j uma célula na coluna c_j inundada pela direita, tal que j é máximo ($j \geq i$), isto é, v_j e c_i são, respectivamente, a célula e a coluna mais distantes que foram inundadas pela direita. Podemos definir T' , um d -tabuleiro (não-circular), da seguinte maneira: crie a coluna d para T' ; para cada célula inundada pela direita por S em T , crie uma célula na mesma posição em T' ; pinte todas as células criadas em T' com a mesma cor que estas células tem em T na sua configuração inicial; se existir em T' uma coluna c' com uma única célula, deve-se substituir a mesma por uma coluna c' monocromática de mesma cor da célula c' . Note que uma inundação ótima de T' corresponde a uma ótima em T . Como não se sabe quem são c_i e v_j , é necessário executar esse processo para cada combinação de pares de células do tabuleiro T , isto é, n^2 vezes. Sabe-se que o Problema da Inundação com pivô fixo pode ser resolvido em d -tabuleiros (não-circulares), como são n^2 possibilidades podemos resolver o Problema da Inundação com pivô fixo em d -tabuleiros circulares $2 \times n$ em tempo $O(kn^4)$. \square

Como é possível transformar qualquer tabuleiro circular em um d -tabuleiro circular com complexidade de tempo $O(1)$, a partir do Teorema 2.2.4, pode-se concluir o Corolário 2.2.5, a seguir.

Corolário 2.2.5. (SOUZA, 2014) *O Problema da Inundação com pivô fixo é resolvido em tempo polinomial em tabuleiros circulares $2 \times n$.*

Corolário 2.2.6. (SOUZA, 2014) *O Problema da Inundação com pivô fixo pode ser resolvido em tempo polinomial em C_n^2 .*

Pelo Lema 2.2.1 um grafo C_n^2 pode ser transformado em uma matriz circular $2 \times n$, sem perda de generalidade. Segundo o Lema 2.2.2 e o Corolário 2.2.5 o Problema da Inundação com pivô fixo é resolvido em tempo polinomial em matrizes circulares $2 \times n$. Logo, o Problema da Inundação com pivô fixo pode ser resolvido em tempo polinomial em grafos C_n^2 .

3 O PROBLEMA DA INUNDAÇÃO EM GRAFOS CO-COMPARABILIDADE

Este capítulo apresenta a solução do Problema da Inundação com pivô fixo em grafos de co-comparabilidade, uma subclasse dos grafos função-circular. Esta técnica, apresentada por Fleischer e Woeginger (2012), é muito importante no contexto deste trabalho, pois a partir dela pode-se construir uma solução eficiente para o Problema da Inundação em grafos função-circular.

3.1 PRELIMINARES

Golumbic, Rotem e Urrutia (1983) definem grafos de co-comparabilidade como grafos **função**, ou seja, grafo interseção de famílias de curvas de funções contínuas em um intervalo I , onde cada curva representa um vértice e quando duas curvas se intersectam existe uma aresta entre os respectivos vértices. A Figura 17 apresenta um exemplo de grafo função.

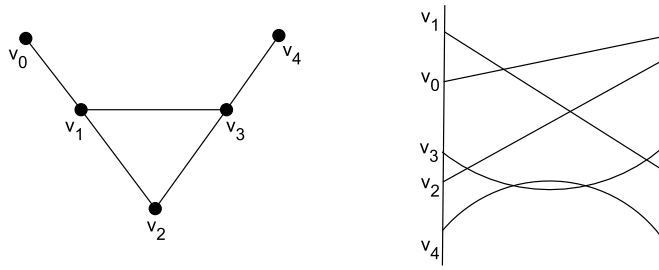


Figura 17 – Grafo função.

Fonte: Autoria própria.

Uma **orientação transitiva** das arestas de um grafo G é uma atribuição de orientação para cada aresta de G de forma que se as arestas $(v_1 \rightarrow v_0)$ e $(v_0 \rightarrow v_2)$ existem, então existe a aresta $(v_1 \rightarrow v_2)$, como pode ser visto na Figura 18.

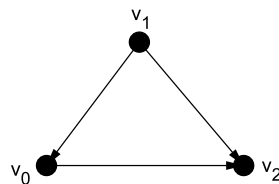


Figura 18 – Orientação transitiva.

Fonte: Autoria própria.

Um grafo é de **comparabilidade** se, e somente se, admite uma orientação transitiva para suas arestas (BRANDSTÄDT; SPINRAD *et al.*, 1999). Golombic (2004) apresenta um algoritmo que permite verificar se um grafo G não orientado é um grafo de comparabilidade, caso G seja um grafo de comparabilidade o algoritmo apresenta uma orientação transitiva para G . A verificação é feita em tempo polinomial, mais precisamente em $O(\Delta.m)$, onde Δ corresponde ao grau máximo de G e m ao o número de arestas de G . A Figura 19 apresenta um grafo de comparabilidade com uma orientação transitiva das arestas.

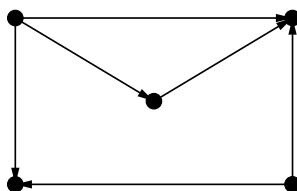


Figura 19 – Grafo de comparabilidade.

Fonte: Autoria própria.

Segundo Gersting (2004) uma **ordem parcial** é uma relação binária entre os elementos de um conjunto que é reflexiva (todo elemento está relacionado com ele mesmo), antissimétrica (se existe uma relação entre a e b , e b e a , então obrigatoriamente $a = b$) e transitiva (se existe relação entre a e b , e b e c , então obrigatoriamente existe relação entre a e c).

Dada uma orientação transitiva pode-se estabelecer uma ordem entre os vértices de G de forma que se existe a aresta orientada $v_0 \rightarrow v_1$, então o vértice v_0 precede o vértice v_1 nesta ordem e denota-se $v_0 < v_1$. Neste caso, diz-se que v_0 e v_1 são comparáveis. Pelas definições de orientação transitiva e ordem parcial, pode-se concluir que a ordenação obtida é uma ordem parcial dos vértices de G . Logo, outra forma de definir os grafos de comparabilidade é dizer que G é um grafo de comparabilidade se, e somente se, os vértices de G admitem uma ordem parcial.

Um **complemento** de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo $\overline{G} = (V, \overline{E})$ tal que um vértice é adjacente a outro, se e somente se, eles não são adjacentes em G , ou seja, $(u, v) \in \overline{E}$, se e somente se, $(u, v) \notin E$. A Figura 20-1 apresenta um grafo G e a Figura 20-2 apresenta o grafo \overline{G} . Além de serem definidos como grafos função, os grafos de co-comparabilidade são aqueles cujo complemento é um grafo de comparabilidade.

Considere um grafo de comparabilidade G e λ uma ordem parcial dos vértices de G . Um elemento a é **minimal** em λ , quando não existe elemento em λ que o preceda, ou seja, não existe $b \in \lambda$ tal que $b < a$. Da mesma forma, um elemento a é **maximal** quando não existe elemento em λ que o suceda, ou seja, não existe $b \in \lambda$ tal que $a < b$ (ARAÚJO, 2010).

Por exemplo, na ordem parcial $v_0 < v_2, v_0 < v_4, v_1 < v_4, v_1 < v_5, v_3 < v_2, v_3 < v_5$, os vértices v_0, v_1 e v_3 são minimais e os vértices v_2, v_4 e v_5 são maximais. Por definição, dado um grafo de comparabilidade G e a ordem parcial λ que o mesmo representa, se dois vértices são incomparáveis em λ , então estão conectados por uma aresta no grafo de co-comparabilidade \overline{G} .

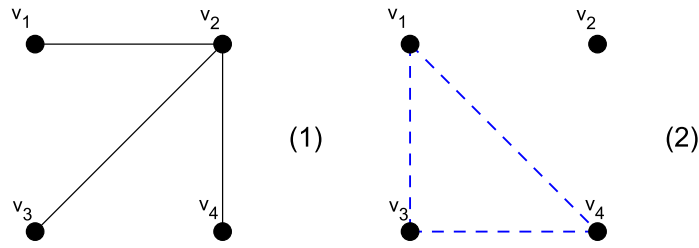


Figura 20 – Grafos G e \overline{G} .

Fonte: Autoria própria.

A forma mais fácil de construir um grafo de co-comparabilidade a partir de uma ordem parcial é construir seu complemento, colocando uma aresta orientada $v_0 \rightarrow v_1$ em G se, e somente se, os elementos correspondentes na ordem parcial são comparáveis e tais que $v_0 < v_1$. Depois, remove-se a orientação das arestas de G , criando um novo grafo que é chamado grafo subjacente de G e por fim aplica-se a operação de complemento. Dada a ordem parcial $\lambda = v_0 < v_3, v_0 < v_4, v_1 < v_4, v_2 < v_3$, a Figura 21-1 apresenta o grafo orientado D contruído a partir de λ , e as Figuras 21-2 e 21-3 apresentam o grafo G subjacente de D e \overline{G} que é de co-comparabilidade.

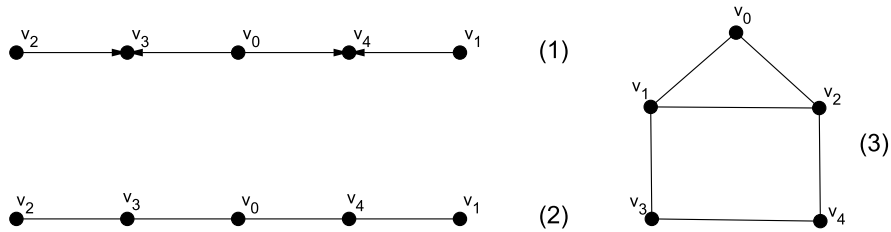


Figura 21 – Grafos D , G e \overline{G} .

Fonte: Autoria própria.

Na Figura 22 pode-se observar a representação do grafo \overline{G} da Figura 21 através da interseção de uma família de curvas de função entre duas retas paralelas. Lembre-se que curvas que se intercectam representam a existência de aresta entre os respectivos vértices em \overline{G} , assim como cada aresta em \overline{G} representa incomparabilidade entre os respectivos vértices. Perceba que quando uma curva está totalmente **acima** de outra, como por exemplo, a curva v_3 , que está totalmente acima da curva v_2 na Figura 22, os vértices correspondentes são comparáveis na ordem parcial. Ainda, pode-se afirmar que $v_2 < v_3$ na ordem parcial.

A operação de **contração de arestas** tem como objetivo remover uma aresta $(u, v) \in G$ e substituir os vértices u e v por um novo vértice u/v , de forma que toda aresta incidente em u ou v no grafo G seja incidente ao vértice u/v no grafo resultante, denotado por $G \setminus (u, v)$. Note que na Figura 23 a aresta (v_4, v_5) do grafo G é removida, os vértices extremos v_4 e v_5 se tornam

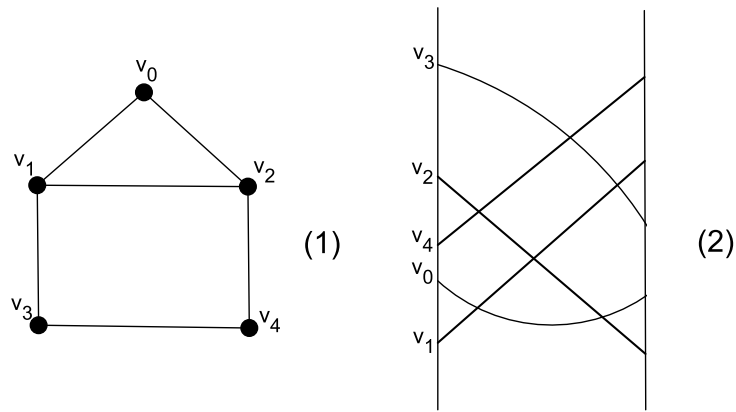


Figura 22 – Grafo \overline{G} e grafo interseção de curvas de função entre duas retas paralelas.

Fonte: Autoria própria.

o vértice v_4/v_5 e tanto as arestas que eram incidentes em v_4 como em v_5 passam a incidir no vértice v_4/v_5 , resultando no grafo $G \setminus (v_4, v_5)$.

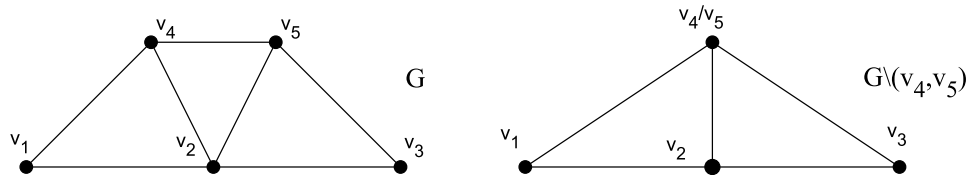


Figura 23 – Grafos G e $G \setminus (v_4, v_5)$.

Fonte: Autoria própria.

Uma **clique** é um subconjunto de vértices $X \subseteq V$, tal que para cada dois vértices em X , existe uma aresta que os conecta. Dois exemplos de clique na Figura 24 são os conjuntos $\{v_4, v_5\}$ e $\{v_4, v_2, v_3\}$.

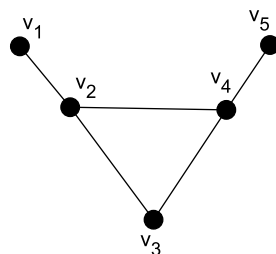


Figura 24 – Grafo touro.

Fonte: Autoria própria.

Uma classe de cor c em um grafo colorido G é o conjunto dos vértices de G que estão coloridos com cor c .

3.2 O PROBLEMA DA INUNDAÇÃO PARA GRAFOS DE CO-COMPARABILIDADE

Nesta seção, G é um grafo de co-comparabilidade, ou seja, um grafo função. Consideramos, sem perda de generalidade, que não existem vértices adjacentes em G que estejam coloridos com a mesma cor. Tal suposição pode ser feita, visto que, ao se inundar um vértice colorido com cor c , todos os demais conectados a ele por caminhos monocromáticos de cor c também são inundados, de acordo com o Lema 3.2.1, a seguir.

Lema 3.2.1. (FLEISCHER; WOEGINGER, 2012) *Inundando um vértice inunda-se todos os vértices menores de mesma cor.*

Prova. Se a inundação inicia-se em um vértice v_0 , minimal na ordem parcial, e atinge em um dado momento um vértice v , então existe um caminho p que se inicia em v_0 e termina em v que está inundado com cor c . Observe que no momento anterior à inundação de v com a cor c , todo vértice pertencente à p com cor c ainda não estava inundado. Portanto, inunda-se ao mesmo tempo todos os vértices com cor c que precedem v . \square

Diante de tal observação, pode-se contrair as arestas que conectam vértices adjacentes coloridos com a mesma cor. Assim, o Lema 3.2.2 é interessante, pois garante que, ao contrair-se uma aresta de um grafo de co-comparabilidade, o grafo resultante pertence à mesma classe e, por isso, todos os passos do algoritmo que será apresentado podem ser aplicados sobre o grafo contraído, sem perda de generalidade.

Lema 3.2.2. (FLEISCHER; WOEGINGER, 2012) *A classe dos grafos de co-comparabilidade é fechada sob contração de arestas.*

Prova. Após a contração das arestas, toda classe de cor é totalmente ordenada, uma vez que os pares de vértices de mesma cor, que eram incomparáveis, foram contraídos em G . \square

Um exemplo de contração de arestas entre vértices de mesma cor de um grafo de co-comparabilidade pode ser visto na Figura 25, onde a Figura 25-1 apresenta o grafo co-comparabilidade G e as Figuras 25-2 e 25-3 apresentam os grafos resultantes da contração das arestas (v_0, v_2) e $(v_0/v_2, v_7)$, respectivamente, transformando os vértices v_0 , v_2 e v_7 em um único vértice. Observe que após a contração das arestas o grafo resultante é um grafo de co-comparabilidade, conforme pode-se ver pelo grafo função da Figura 26, onde cada função é identificada em seus extremos por um par ordenado (v_i, c_j) , onde v_i é o vértice correspondente no grafo da Figura 26 e c_j é a cor com a qual a referida curva está colorida.

O vértice maximal na ordenação que possui cor c é denotado por $Max(c)$. Como não há vértices adjacentes com a mesma cor, não existem vértices vizinhos à $Max(c)$ com cor c . Logo, os vértices remanescentes de cor c são totalmente ordenados entre eles. Considere M o conjunto de todos os vértices que são $Max(c)$, para todas as cores c , e considere M_{max} o

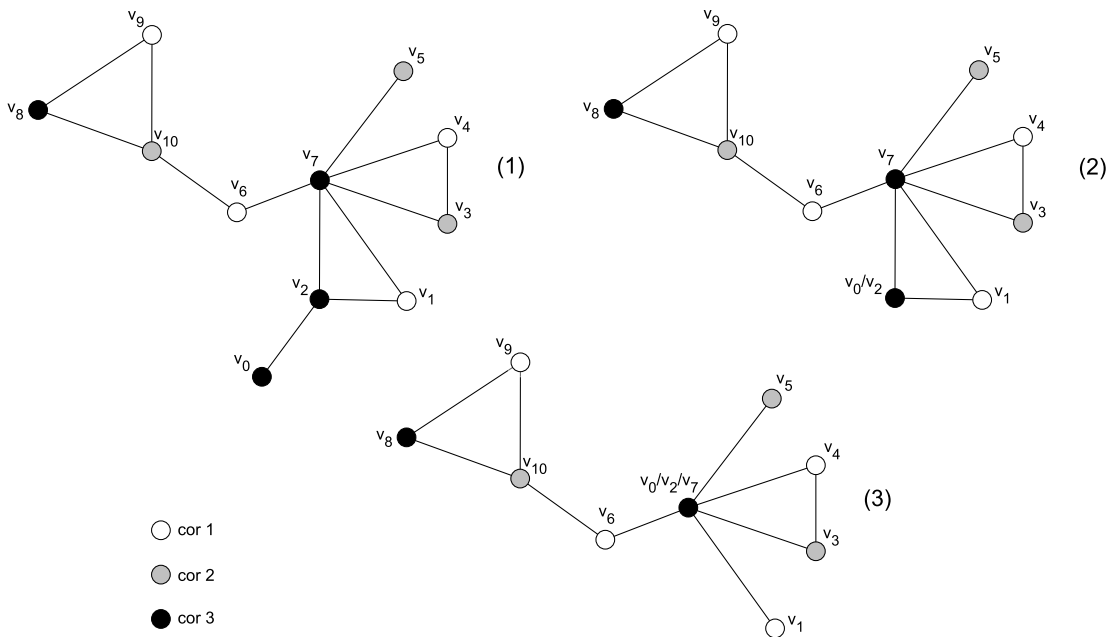


Figura 25 – Grafos G , $G \setminus (v_0, v_2)$ e $G \setminus (v_0/v_2, v_7)$.

Fonte: Autoria própria.

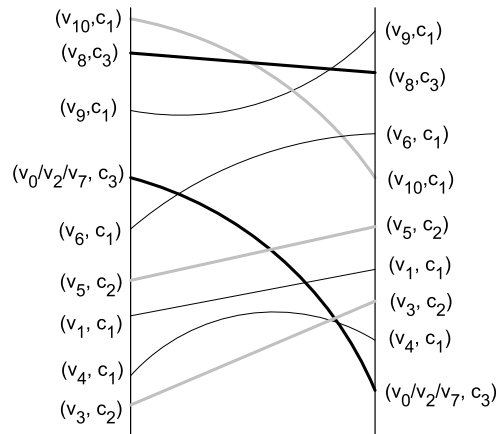


Figura 26 – Grafo função de $G \setminus (v_0/v_2, v_7)$.

Fonte: Autoria própria.

conjunto de elementos maximais da ordem parcial. No exemplo da Figura 27 $M = \{v_2, v_3, v_4\}$ e $M_{max} = \{v_3, v_4\}$.

Note que $|M| = k$, já que todas as classes de cores estão totalmente ordenadas e cada uma tem exatamente um elemento máximo. Note também que $M_{max} \subseteq M$.

A Figura 27 apresenta um grafo de co-comparabilidade e seu respectivo grafo função. Perceba que é possível estabelecer uma ordem total entre os vértices de uma mesma classe de

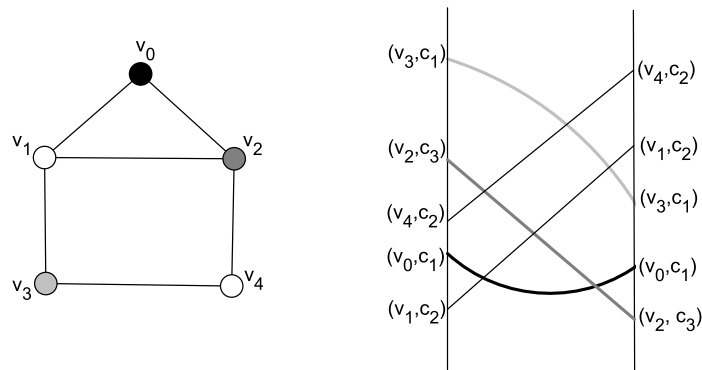


Figura 27 – Grafo função.

Fonte: Autoria própria.

cor, já que não existem curvas de função com a mesma cor e que se intersectam. Na Figura 27, o conjunto de cores utilizadas é $C = \{c_1, c_2, c_3\}$. No restante deste trabalho, denotamos a cardinalidade de C por k , ou seja $|C| = k$. No exemplo $k = 3$.

Lema 3.2.3. (FLEISCHER; WOEGINGER, 2012) *Os vértices em M_{max} formam uma clique em G .*

Prova. Sejam dois vértices $a, b \in M_{max}$. Se a e b não estão ligados em G , então eles são comparáveis. Logo, $a < b$ ou $b < a$, contradizendo a maximalidade de a e b na ordem parcial. Portanto, todos os vértices em M_{max} formam uma clique, já que os vértices de M são incomparáveis entre si, existindo uma aresta entre eles no grafo. \square

A partir do Lema 3.2.1 conclui-se que basta encontrar a menor sequência de cores para inundar M . Para tanto, utiliza-se um algoritmo de menor caminho em grafos com pesos nos vértices, onde deve-se atribuir peso 0 para os vértices $Max(c)$ e para os demais vértices atribui-se peso 1, a origem será o vértice v_0 e os destinos são todos os vértices em M_{max} . Sejam MIN o menor custo para que se inunde ao menos um vértice em M_{max} e $S = (c_1, \dots, c_b)$ uma sequência de cores. Define-se tamanho essencial, $ess(S)$, como $|S|$ menos o número de movimentos necessários para atingir um vértice de M . É fácil ver que $|S| = ess(S) + k$ para qualquer sequência minimal de cores, S , que inunde o grafo inteiro.

Lema 3.2.4. (FLEISCHER; WOEGINGER, 2012) *A solução ótima para o Problema da Inundação com pivô fixo tem custo $MIN + k$.*

Prova. Considere S a sequência de cores mínima para inundar o grafo inteiro, começando em v_0 . Após atingir o primeiro vértice em M_{max} , S só precisa atingir todos os vértices remanescentes de M para inundar o grafo inteiro. Conforme o Lema 3.2.3 e o Lema 3.2.4 isso acontece com um movimento para cada cor. Assim, $|S| = ess(S) + k \geq MIN + k$, com igualdade somente no caso em que S é uma sequência de movimentos mínima e, portanto, ótima. \square

Teorema 3.2.5. (FLEISCHER; WOEGINGER, 2012) *Começando do vértice extremo v_0 o Problema da Inundação com pivô fixo pode ser resolvido em tempo polinomial em grafos de comparabilidade.*

Prova. Dado um grafo G , é possível estabelecer uma orientação transitiva para o complemento de G e, portanto, estabelecer uma ordem parcial para os vértices de $V(G)$ em tempo polinomial (GOLUMBIC, 2004). A atribuição de pesos aos vértices pode ser feita em tempo polinomial. Por fim, encontrar o menor caminho em um grafo ponderado nos vértices a partir de uma única origem pode ser feito em tempo polinomial (DIJKSTRA, 1959). \square

Fleischer e Woeginger (2012) ainda formularam o algoritmo como uma programação dinâmica. Onde para qualquer vértice v , o tamanho essencial da menor sequência de cores que conquista v partindo de v_0 é denotado por $D(v)$. Para cada cor c , seja $\min_v(c)$ o menor vértice de cor c conectado a v , se existir. Então, $D(v)$ é computado recursivamente como segue

$$D(v_0) = 0$$

e

$$D(v) = \min_c (D(\min_v(c)) + \delta_v)$$

onde $D(\min_v(c)) = \infty$ se $\min_v(c)$ não for definido, e se v está em M , então $\delta_v = 0$, caso contrário $\delta_v = 1$.

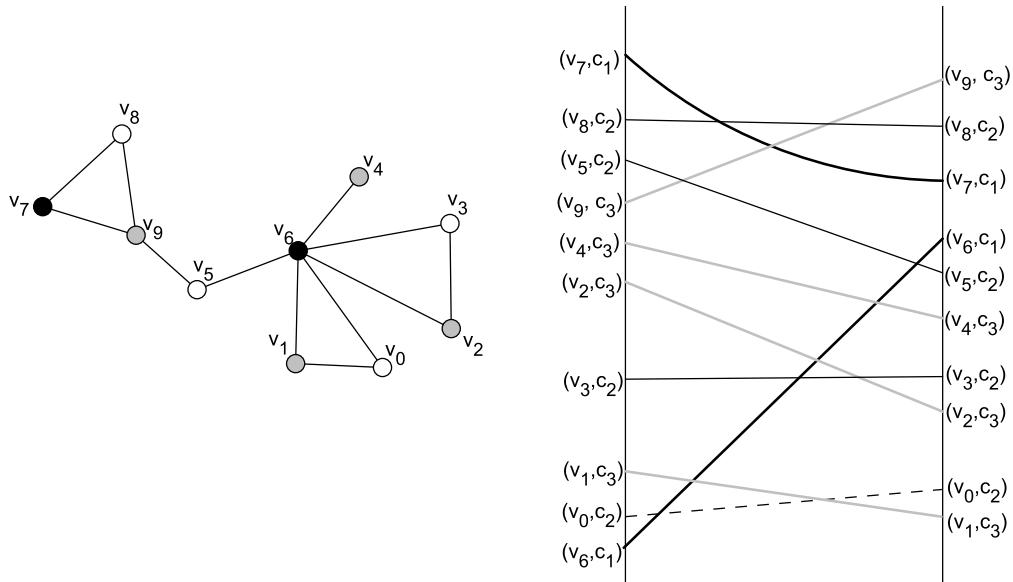


Figura 28 – Grafo função e representação com vértice pivô extremal.

Fonte: Autoria própria.

Na Figura 28 a curva tracejada corresponde ao vértice extremo v_0 , que será considerado o vértice pivô. Ao considerarmos $v = v_1$, analisando o grafo função, sabe-se que $\min_{v_1}(c_1) =$

$v_6, \min_{v_1}(c_2) = v_0$ e $\min_{v_1}(c_3) = \infty$, pois não existe aresta de cor c_3 que intercecta v_1 . Por fim, $M = \{v_7, v_8, v_9\}$. Como v_1 não pertence à M , então $\delta_{v_1} = 1$.

Já para os casos em que v_0 não é um extremo deve-se pensar na inundação atingindo simultaneamente vértices abaixo do pivô (menores que o pivô na ordem parcial de \overline{G}) e acima do pivô (maiores que o pivô na ordem parcial). Considere G um grafo de co-comparabilidade e v_0 o pivô de um Problema de Inundação. Seja v um vértice maior que v_0 na ordem parcial de \overline{G} e, portanto, representado por uma curva de função totalmente acima da curva correspondente a v_0 na representação por curvas de função. Seja w um vértice menor que v_0 na mesma ordem parcial de \overline{G} e, portanto, representado por uma curva de função totalmente abaixo da curva de v_0 na representação por curvas de função. O tamanho essencial da menor sequência de cores S que atinge (inunda) v e w partindo de v_0 é denotado por $D(v, w)$. Para cada vértice $u \in V(G)$, o menor vértice de cor c adjacente a u é denotado por $\min_u(c)$, já o maior vértice de cor c adjacente a u é denotado por $\max_u(c)$.

Então, $D(v, w)$ é computado recursivamente como segue:

$$D(v_0, v_0) = 0$$

e

$$D(v, w) = \min_c (D(v, \min_w(c)) + \delta_w(v), D(\max_v(c), w) + \delta_v(w)),$$

onde $\delta_v(w) = 0$ se, e somente se, w é um vértice extremo de alguma classe de cor c e o outro vértice extremo da classe de cor c está entre v e w , ou é incomparável a v ou a w ou a ambos. Senão, $\delta_v(w) = 1$.

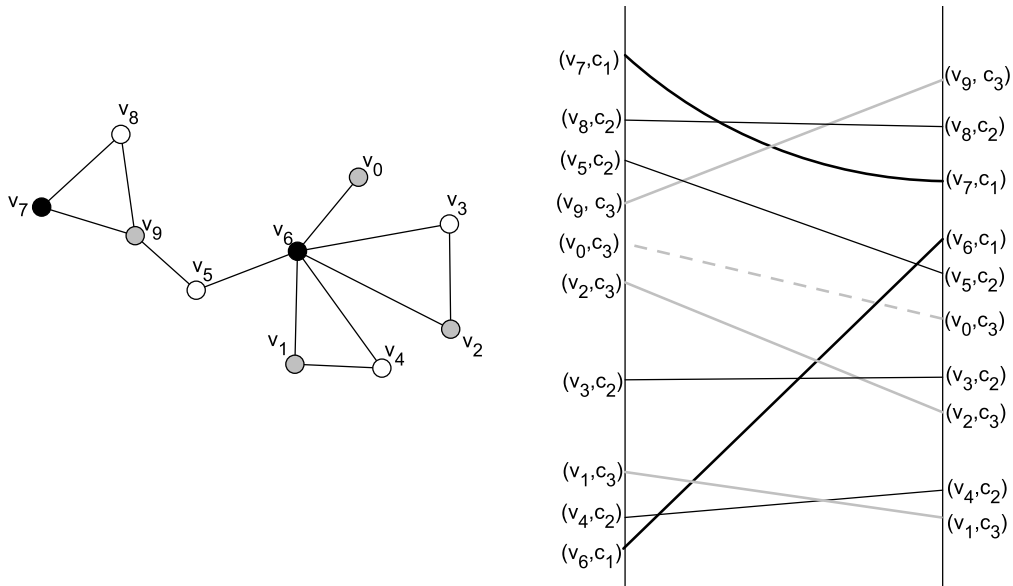


Figura 29 – Grafo função e representação com vértice pivô não extremal.

Fonte: Autoria própria.

A Figura 29 mostra um exemplo onde o pivô, v_0 , não é um vértice extremo. Ao considerar os vértices $v = v_5$ e $w = v_6$, então $\min_{v_5}(c_1) = v_6$, $\min_{v_5}(c_2) = \infty$, $\min_{v_5}(c_3) = v_9$, $\min_{v_6}(c_1) = \infty$, $\min_{v_6}(c_2) = v_4$ e $\min_{v_6}(c_3) = v_1$. Ainda pela definição, $\max_{v_5}(c_1) = v_6$, $\max_{v_5}(c_2) = \infty$, $\max_{v_5}(c_3) = v_9$, $\max_{v_6}(c_1) = \infty$, $\max_{v_6}(c_2) = v_5$ e $\max_{v_6}(c_3) = v_0$. Por fim, $\delta_{v_5}(v_6) = 1$ e $\delta_{v_6}(v_5) = 1$.

Lema 3.2.6. (FLEISCHER; WOEGINGER, 2012) *A solução ótima para o Problema da Inundação tem custo $\min_{v,w}(D(v,w) + k)$.*

Prova. Seja γ a menor sequência de cores que inunda o grafo inteiro partindo de v_0 . Considere v (w) o primeiro vértice minimal (maximal) inundado por γ . Após inundar v e w , γ só precisa inundar os vértices extremos remanescentes de cada classe de cor para inundar o grafo inteiro. Isso pode ser feito com um movimento para cada cor pelos Lemas 3.2.1 e 3.2.3. Portanto, $|\gamma| \geq D(v,w) + k$, com igualdade se γ é uma sequência ótima. \square

Corolário 3.2.7. (FLEISCHER; WOEGINGER, 2012) *O Problema da Inundação com pivô fixo pode ser resolvido em tempo polinomial em grafos co-comparabilidade.*

A solução do Problema da Inundação com pivô fixo para os grafos de co-comparabilidade implica na solução deste problema para diversas classes de grafos que serão apresentadas em detalhes no Capítulo 4.

4 O PROBLEMA DA INUNDAÇÃO EM GRAFOS FUNÇÃO-CIRCULAR

Este capítulo tem como objetivo mostrar que o Problema da Inundação com pivô fixo pode ser resolvido em tempo polinomial em grafos função-circular. Em resumo, ao se retirar um determinado conjunto de vértices de um grafo função-circular obtém-se um grafo de comparabilidade, em que aplica-se o algoritmo de Fleischer e Woeginger (2012). Ao se repetir este processo de maneira sistemática sobre um grafo função-circular, a sequência de inundação ótima encontrada pelo Algoritmo de Fleischer e Woeginger (2012) para algum dos subgrafos de G é também uma sequência ótima para G . Alguns conceitos básicos serão necessários para a compreensão do capítulo, estes são apresentados a seguir.

4.1 PRELIMINARES

O **grau de um vértice** é a quantidade de arestas que incidem no mesmo, sendo denotado por $d(v)$.

Um grafo G é **conexo** se existe um caminho entre qualquer par de vértices de G . Caso contrário, G é desconexo. Um exemplo de grafo conexo pode ser visto na Figura 30-1 e um exemplo de grafo desconexo pode ser visto na Figura 30-2.

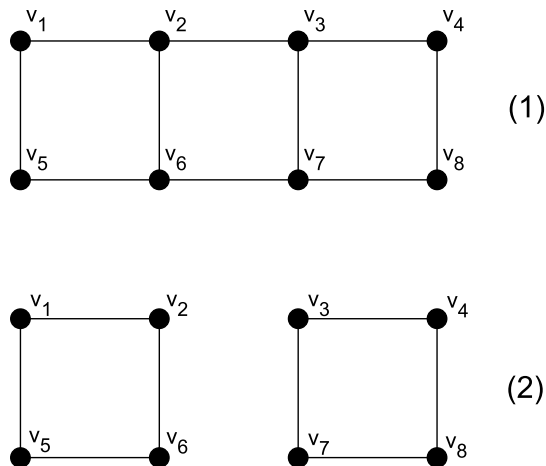


Figura 30 – Exemplos de grafo conexo e desconexo.

Fonte: Autoria própria.

Uma **componente conexa** é um subgrafo conexo maximal em G . Na Figura 31 o grafo G é formado por duas componentes A e B , onde A é a componente formada por mais vértices, portanto é considerada a **componente máxima**.

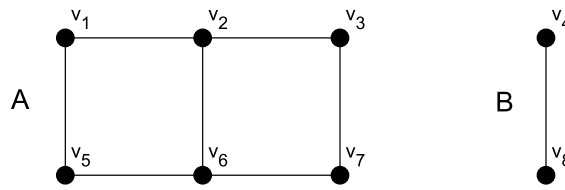


Figura 31 – Componentes conexas A e B.

Fonte: Autoria própria.

Para verificar se um grafo é conexo, basta executar uma busca em largura¹. Se ao final da busca em largura obtém-se uma componente conexa, então o grafo é conexo. Caso contrário, o grafo é desconexo. A busca em largura é feita em tempo $O(|m|)$, onde m é a quantidade de arestas de G .

Segundo Brandstädt, Spinrad *et al.* (1999) dado um grafo G e um vértice $v \in V(G)$, a **vizinhança** de v corresponde aos vértices adjacentes a v em G . A vizinhança aberta de v é definida como $N(v) = \{x : x \in V(G) \wedge x \neq v \wedge (x, v) \in E(G)\}$ e se caracteriza por não incluir v . A vizinhança fechada de v é definida como $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Na Figura 32 $N(v_{10}) = \{v_1, v_2, v_{11}\}$ e $N[v_{10}] = \{v_1, v_2, v_{10}, v_{11}\}$. Note que a Figura 32 apresenta um grafo G e sua representação por interseção de funções entre dois círculos concêntricos. Nas duas representações de G , a vizinhança de v_{10} é destacada.

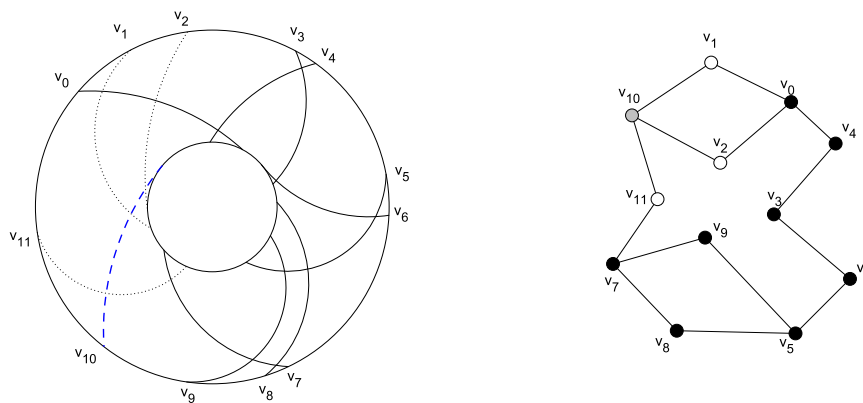


Figura 32 – Grafo função-circular G e grafo G .

Fonte: Autoria própria.

Considere um grafo G e $N(v)$ tal que $v \in V(G)$, a operação $G \setminus N(v)$ consiste em retirar de G o conjunto de vértices $N(v)$ e as arestas adjacentes aos elementos em $N(v)$. A operação $G \setminus N[v]$ é feita analogamente. A Figura 33 apresenta um exemplo onde o conjunto $N(v_{10})$ foi retirado do grafo G apresentado na Figura 32, assim obtendo o grafo $G \setminus N(v_{10})$.

¹ Para detalhes sobre o algoritmo de busca em largura consulte Golumbic (2004).

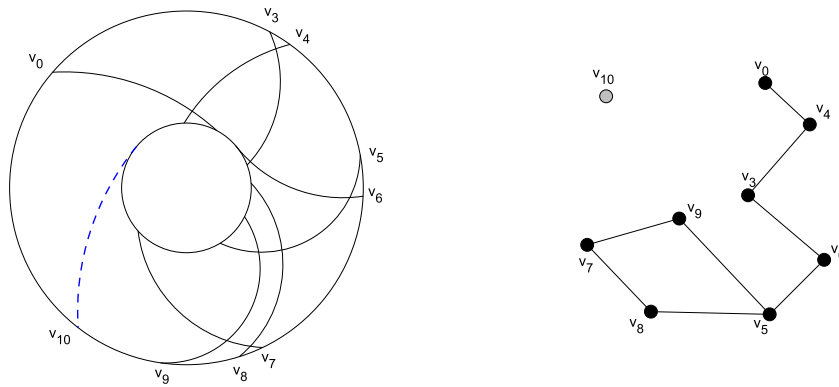


Figura 33 – Grafo função-circular $G \setminus N(v_{10})$ e grafo $G \setminus N(v_{10})$.

Fonte: Autoria própria.

4.2 O PROBLEMA DA INUNDAÇÃO EM GRAFOS FUNÇÃO-CIRCULAR

O lema a seguir mostra que qualquer subgrafo de G obtido pela remoção da vizinhança de um de seus vértices é um grafo de co-comparabilidade.

Lema 4.2.1. *Considere um grafo função-circular G e seu subgrafo induzido $H_u = G \setminus N(u)$, para qualquer $u \in V(G)$. Se G é um grafo função circular, então $G \setminus N(u)$ é grafo função, para qualquer $u \in V(G)$.*

Demonstração. Sejam G um grafo função-circular e $u \in V(G)$. Então G possui uma representação por interseção de curvas de função entre dois círculos concêntricos. Seja D tal representação. Considere a ordem das curvas de função em D , em sentido horário a partir da curva da função que representa u . Dizemos que duas curvas são incomparáveis se existe interseção entre as mesmas. Caso contrário, as curvas de função são comparáveis e dizemos que a curva f_i , que representa o vértice v_i , é menor que a curva f_j , correspondente ao vértice v_j , quando em sentido horário a partir de f_u , a curva da função f_i precede a curva de f_j . O grafo $G \setminus N(u)$ é um grafo função-circular, visto que a remoção das curvas de função ainda resulta em uma representação por interseção de curvas de função entre dois círculos concêntricos. Seja D' a representação circular de $G \setminus N(u)$. Note que todo vértice v em $G \setminus N(u)$ não é adjacente a u , ou seja, toda curva de função na representação D' é comparável a f_u . Então, construa uma representação de interseção de curvas de função entre duas retas paralelas, D^* , da seguinte forma: primeiro, faça com que a curva de f_u seja minimal em D^* . Agora, insira em D^* as mesmas curvas que sucedem f_u em D' , respeitando a ordem e comparabilidade (ou incomparabilidade) das mesmas. Então, $G \setminus N(u)$ tem uma representação por interseção de curvas de função entre duas retas paralelas e, portanto, é um grafo função. \square

Pelo Lema 4.2.1, H_u é um grafo de co-comparabilidade. Então, por definição o grafo $\overline{H_u}$ é um grafo de comparabilidade e admite uma orientação transitiva de suas arestas.

Considere a coloração dos vértices de G dada por $\phi : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$. Seja $p \in V(G)$ o vértice pivô e suponha que o conjunto de cores $C = \{1, 2, \dots, k\}$ só contém cores que pintam pelo menos um dos vértices de G .

Lema 4.2.2. *Se o grau de p é igual a $|V(G)| - 1$, então G é inundado com $k - 1$ movimentos.*

Demonstração. Quando o grau do pivô for igual a $|V(G)| - 1$ significa que ele é vizinho de todos os outros vértices de G , portanto são necessários $k - 1$ movimentos para inundar G . \square

Lema 4.2.3. *Considere que existe um v adjacente a p tal que $N(p) \cup N(v) = V(G)$. Se existem pelo menos duas componentes monocromáticas maximais disjuntas em G com cor $\phi(p)$, então G é inundado com k cores; caso contrário, com $k - 1$ cores.*

Demonstração. Primeiro faça um movimento com a cor $\phi(u)$. Note que agora todo vértice com cor $\phi(u)$ pertencem ao bloco monocromático do pivô e que este bloco é adjacente a todo vértice não inundado. Portanto, há dois casos: se originalmente G possuía uma única componente conexa com a cor $\phi(p)$, então já não existem vértices com essa cor e basta fazer uma inundação com cada uma das cores de $C \setminus \{\phi(p), \phi(u)\}$, totalizando $k - 1$ movimentos, onde $|C| = k$. Caso G possua originalmente duas componentes monocromáticas maximais desconexas com cor $\phi(p)$, então uma dessas componentes contém p e a outra é composta por vértices de $N(u)$ não adjacentes a p . Neste caso, após inundar u a cor $\phi(p)$ precisa ser utilizada mais uma vez e são necessários, portanto k movimentos. \square

Teorema 4.2.4. *O Problema da Inundação pode ser resolvido em tempo polinomial em grafos função-circular.*

Demonstração. Seja G um grafo função-circular conexo cujos vértices estão coloridos com k cores. Considere uma sequência de inundação ótima para G , denotada por S . Vamos chamar de S' o prefixo de S que contém os movimentos executados até que todo vértice ainda não inundado seja adjacente à componente monocromática que contém o pivô.

Se $S' = \emptyset$, então todo vértice de G é adjacente ao pivô. Neste caso, pelo Lema 4.2.2, são necessários $k - 1$ movimentos para inundar G . Observe que a cor do próprio pivô não está em S , pois todo vértice com a cor do pivô já está inundado desde antes do primeiro movimento.

Agora, considere que $|S'| = 1$. Então o pivô, p , não é um vértice universal, mas é adjacente a um vértice v tal que $N(p) \cup N(v) = V(G)$. Neste caso, pelo Lema 4.2.3, se existe um vértice em $N(v) \setminus N(p)$ com a mesma cor que p , então são necessários k movimentos para inundar G . Caso contrário, são necessários $k - 1$ movimentos.

Observe que os dois casos já apresentados, tanto quando $S' = \emptyset$ quanto quando $|S'| = 1$, podem ser verificados em tempo polinomial: o primeiro ocorre quando $d(p) = |V(G)| - 1$ e o segundo caso ocorre quando $d(p) < |V(G)| - 1$ e existe $v \in N(p)$ tal que $|N(p) \cup N(v)| = |V(G)|$. No segundo caso, distinguir se v tem ou não um vizinho não adjacente ao pivô com a mesma cor do pivô também pode facilmente ser feito em tempo polinomial.

Por fim, se $|S'| \geq 2$, então antes do último movimento da sequência S' ainda existia um conjunto com pelo menos um vértice não adjacente à componente monocromática do pivô. Seja u um vértice desse conjunto. Note que o último movimento de S' inunda um vizinho de u e torna u adjacente à componente monocromática do pivô. Neste caso, seja v um vizinho de u inundado no último movimento de S' . Considere o subgrafo de G induzido por $(V(G) \setminus N(u)) \cup \{v\}$. Vamos chamar tal subgrafo de H . Por construção, H é conexo. Além disso, ou H é um grafo função, ou $H - v$ é um grafo função, pelo Lema 4.2.1. Verificar se H é um grafo função pode ser feito em tempo polinomial, basta construir o seu complemento e verificar se trata-se de um grafo de comparabilidade utilizando o algoritmo apresentado em Golubic (2004). Então, há dois casos e em ambos é possível construir um grafo função que possui uma sequência ótima de inundação T tal que $ess(T)$ pode ser usado para determinar o menor número de movimentos que inunda G . Tais casos são apresentados a seguir.

Caso 1: Se H não é um grafo função, então H só pode ser representado como função circular, mas $H - v$ é grafo função, pelo Lema 4.2.1. Então, vamos remover v de H e incluir dois vértices com a cor de v : v_1 e v_2 , de forma que v_1 (v_2) é adjacente aos vizinhos de v que são minimais (maximais) na ordem parcial de $\overline{H - v}$. Além disso, faça v_1 adjacente à u . O novo grafo é um grafo função. Observe que a construção deste novo grafo H' pode ser feita em tempo polinomial, dada a ordem parcial de $\overline{H - v}$. Seja T uma inundação ótima de H' , obtida em tempo polinomial pelo Algoritmo de Fleischer e Woeginger (2012). Como a inundação de v_1 ou v_2 foi contabilizada em $ess(T)$, então são necessários mais k movimentos para inundar H' e os mesmos k movimentos completam a inundação de G . Observe que como v_1 é minimal, v_2 é maximal e ambos têm a mesma cor então, pelo Algoritmo de Fleischer e Woeginger (2012), a inundação de ambos contabiliza exatamente um movimento em $ess(T)$.

Caso 2: Se H é um grafo função, pode-se aplicar o Algoritmo de Fleischer e Woeginger (2012) para que se obtenha uma sequência T de inundação ótima de H . Se a inundação de v for contabilizada em $ess(T)$, então são necessários mais k movimentos para inundar H e os mesmos k movimentos completam a inundação de G . Se a inundação de v não for contabilizada em $ess(T)$, pode haver algum vértice w adjacente a u com a mesma cor de v , tal que w não é adjacente a v nem a vértices de H inundados com movimentos contabilizados em $ess(T)$. Então, será preciso aplicar a cor de v uma vez mais além dos k movimentos que completam a inundação de H : um dos k movimentos inunda v , depois u é inundado e, por fim, w . Nesse caso, são necessários $ess(T) + k + 1$ movimentos. Se w não existir, são necessários $ess(T) + k$ movimentos.

A determinação de $ess(T)$, bem como descobrir se v foi inundado ou não com movimentos de $ess(T)$ pode ser feita em tempo polinomial pelo Algoritmo de Fleischer e Woeginger (2012). Resta saber se existe necessidade de repetir a cor de v na sequência para inundar algum vértice com as características de w . Se u não tem outros vizinhos com a cor de v , está feito. Se u tem vizinhos com a cor de v e que não são adjacentes a v , basta verificar se tais vizinhos são adjacentes a vértices inundados pelos movimentos contabilizados em $ess(T)$. Se sim, não é

necessário contabilizar mais um movimento, pois quando v for inundado tais vértices também serão inundados. Se não, é preciso contar mais movimentos. Para adequar o algoritmo de Fleischer e Woeginger (2012) a essa situação basta alterar a forma como $\delta_w(v)$ é calculado. O cálculo deve ser feito da seguinte forma: se v é extremo da classe de cor c em H e o outro extremo da classe de cor c em H está entre v e w ou é adjacente a um dentre v e w e não existe $z \in V(G) \setminus H$ com cor c que seja vizinho de u e não seja vizinho de v nem de outro extremo da classe de cor c , então $\delta_w(v) = 0$; caso contrário, $\delta_w(v) = 1$. Como para a adaptação do algoritmo basta uma modificação no cálculo de $\delta_w(v)$, o algoritmo tem a mesma complexidade que o Algoritmo de Fleischer e Woeginger (2012).

Por fim, como não sabemos quem é o último vértice inundado pela subsequência S' (prefixo da sequência ótima que inunda G), precisamos testar todas as alternativas. Então, para cada vértice $u \in V(G)$, todos os seus vizinhos que o conectam ao pivô por meio de um caminho podem ser considerados na condição de v , resultando em até $2m$ execuções do procedimento construído nesta prova, onde m é a quantidade de arestas do grafo. Note que vizinhos de u que não conectam u ao pivô por um caminho não precisam ser considerados, pois se o grafo H resultante for desconexo então v não é o último vértice inundando em S' , contrariando a forma como v foi definido na hipótese. \square

A determinação de $ess(S)$ de uma sequência de inundação ótima S para um grafo função pode ser feita pelo pseudocódigo apresentado a seguir, adaptado do Algoritmo de Fleischer e Woeginger (2012).

Dado como entrada um grafo G de co-comparabilidade cujos vértices estão coloridos, no algoritmo cria-se uma matriz $D_{n \times n}$, onde $n = |V(G)|$ e cada célula deve armazenar o $ess(S_{v,w})$, onde $S_{v,w}$ é uma sequência ótima de movimentos que inunda v e w a partir do vértice pivô v_0 . Todas as células da matriz D são inicializadas com ∞ . A célula $D(v_0, v_0)$ é inicializada com 0. Cria-se uma matriz $\delta_{n \times n}$, onde a célula $\delta(w, v)$ armazena $\delta_w(v)$. Cria-se um vetor d_n , onde cada célula $d[i]$ guarda uma lista dos pares de vértices que são inundados com i movimentos a partir do pivô. A lista $d[0]$ é inicializada com (v_0, v_0) . Cria-se uma matriz $M_{n \times n}$, onde cada célula $M[v][w]$ corresponde a uma lista que guarda os vértices $max_w(v)$ e $max_v(c)$ para cada cor c de G . O primeiro bloco (linhas 2 a 16) do algoritmo é responsável por inicializar as matrizes D e M , e o vetor δ . No segundo bloco (linhas 17 a 32) o laço calcula $D(v, w)$ em ordem crescente do número de movimentos necessários, para garantir que o número de movimentos das subsequências ótimas necessárias para o cálculo do $D(v, w)$ corrente já tenham sido calculados previamente. Note que os valores de $min_w(c)$ e $max_v(c)$ podem ser consultados em $M[v][w]$ e que $\delta(w, v)$ e $\delta(v, w)$ já foram calculados. A lógica aplicada foi extraída da recursão de Fleischer e Woeginger (2012) apresentada no Capítulo 3. Por fim, no último bloco (linhas 33 a 39) como a matriz D foi preenchida basta verificar a menor das sequências que inundam de um vértice minimal v a um vértice maximal w , partindo de v_0 .

Pseudocódigo 1: Releitura do algoritmo de Fleischer e Woeginger (2012)

```

1 início
2   para todo par de vértices  $(v, w)$  faça
3      $D(v, w) = \infty$ 
4     Calcule  $\delta(w, v)$  e  $\delta(v, w)$ 
5      $M[v][w] = null$ 
6     para cada cor  $c$  faça
7       Calcule  $min_w(c)$  e  $max_v(c)$ 
8        $M[v][w] = min_w(c)$ 
9        $M[v][w] = max_v(c)$ 
10    fim
11  fim
12   $D(v_0, v_0) = 0$ 
13  para  $i = 0$  até  $n$  faça
14     $d[i] = null$ 
15  fim
16   $d[0] = (v_0, v_0)$ 
17  para  $i = 0$  até  $n$  faça
18    enquanto  $d[i] \neq 0$  faça
19      desenfile um par  $(v, w)$  da lista  $d[i]$ 
20       $A = D(v, min_w(c)) + \delta(w, v)$ 
21       $B = D(max_v(c), w) + \delta(v, w)$ 
22      se  $min(A, B) < D(v, w)$  então
23         $D(v, w) = min(A, B)$ 
24        se  $A < B$  então
25           $d[A] = (w, min_w(c))$ 
26        fim
27        senão
28           $d[B] = (max_v(c), w)$ 
29        fim
30      fim
31    fim
32  fim
33   $MIN = \infty$ 
34  para todo par de vértices  $(v, w)$ , onde  $v$  é minimal e  $w$  é maximal em  $G$  faça
35    se  $D(v, w) < MIN$  então
36       $MIN = D(v, w)$ 
37    fim
38  fim
39  retorna  $MIN$ 
40 fim

```

5 IMPACTO DO RESULTADO

Este capítulo descreve em detalhes as principais classes de grafos para as quais o Problema da Inundação com pivô fixo foi resolvido por Fleischer e Woeginger (2012) e como este trabalho de conclusão de curso ampliou o conjunto de classes de grafos para as quais a solução é conhecida. Na próxima seção são apresentadas as definições destas classes.

5.1 PRELIMINARES

Um grafo *caterpillar* é uma árvore com a propriedade de que o conjunto dos vértices nos quais incidem mais de uma aresta induzem um caminho, ou seja, uma sequência $v_1v_2v_3 \dots v_n$ tal que existe aresta entre dois vértices v_i e v_j se, e só se, $j = i + 1$. A Figura 34 apresenta um grafo *caterpillar*.

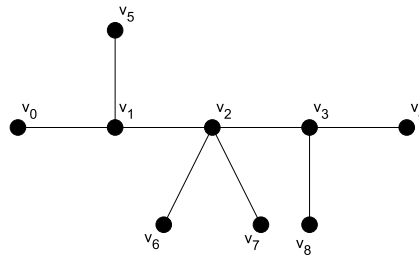


Figura 34 – Grafo *caterpillar*.

Fonte: Autoria própria.

Um grafo G é **indiferença** se, e somente se, é um grafo interseção de intervalos próprios da reta real. Intervalos próprios são um conjunto de intervalos tais que nenhum contém propriamente o outro. Cada vértice de um grafo indiferença representa um intervalo próprio e existe aresta entre dois vértices se e somente se os respectivos intervalos se intersectam. A Figura 35-1 apresenta um grafo indiferença e a Figura 35-2 mostra a sua representação por interseção de uma família de intervalos próprios.

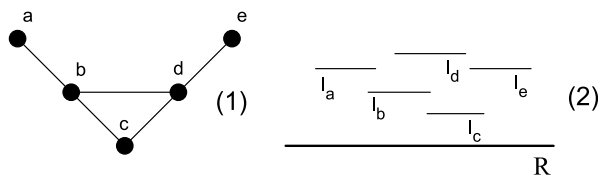


Figura 35 – Grafo G e representação por interseção de intervalos próprios.

Fonte: Autoria própria.

Um grafo é de **intervalos** se, e somente se, representa a interseção de uma família de intervalos da reta real de forma que cada vértice v_k representa um intervalo, denotado por I_k e existe aresta entre dois vértices se, e somente se, os intervalos correspondentes se intersectam. Observe que, pela definição, todo grafo indiferença é um grafo de intervalos. Além disso, é possível representar qualquer grafo *caterpillar* como um grafo de intervalos. As Figuras 36-1 e 36-2 apresentam um grafo G e sua representação por uma família de intervalos, respectivamente.

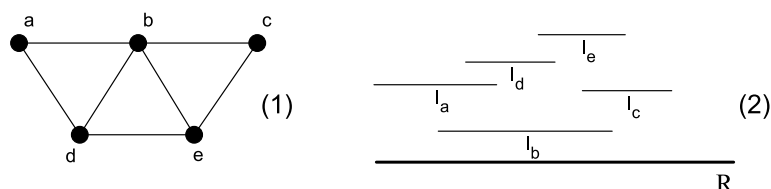


Figura 36 – Grafo G e representação por interseção de intervalos.

Fonte: Autoria própria.

Os grafos **arco-circulares** são grafos interseção de uma família de arcos de um círculo, onde cada arco corresponde a um vértice e dois arcos se intersectam se, e somente se, existe arestas entre os respectivos vértices. As potências de ciclo são uma subclasse dos grafos arco-circulares.

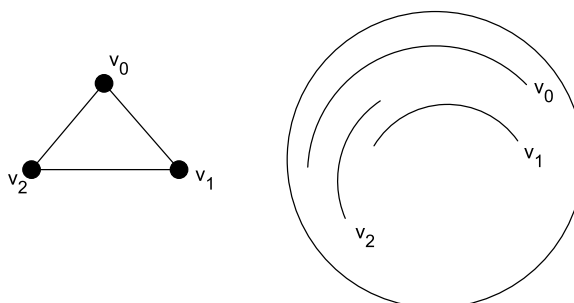


Figura 37 – Grafo arco-circular.

Fonte: Autoria própria.

Um grafo é **permutação** se, e somente se, representa a interseção de uma família de segmentos de reta entre duas retas paralelas, onde cada vértice representa um segmento de reta e dois vértices são vizinhos se, e somente se, os segmentos de reta que os representam se intersectam. Além disso, um grafo G é permutação se, e somente se, G e \overline{G} são grafos de comparabilidade (BRANDSTÄDT; SPINRAD *et al.*, 1999). Um exemplo de grafo permutação e sua representação pela interseção de segmentos de reta podem ser vistos na Figura 38.

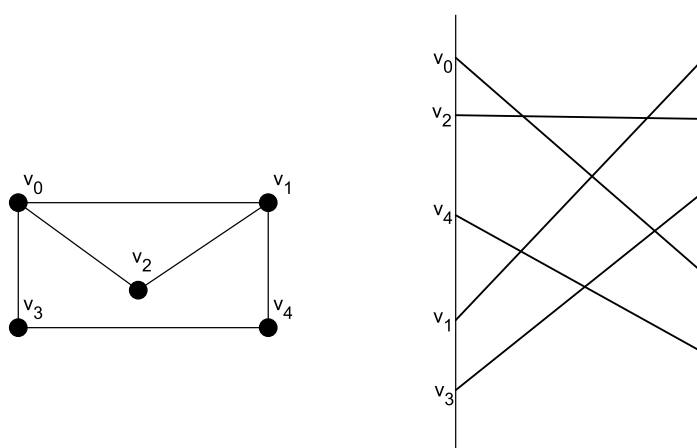


Figura 38 – Grafo permutação.

Fonte: Autoria própria.

Os grafos **permutação circular** são grafos que podem ser representados por interseção de curvas entre dois círculos concêntricos com a restrição de que duas curvas se intersectam no máximo uma vez. Nesta representação cada vértice corresponde a uma curva e existe aresta entre dois vértices se, e somente se, as curvas correspondentes se intersectam. Um exemplo de grafo permutação circular é apresentado na Figura 39. Note que todo grafo permutação circular é um grafo função-circular.

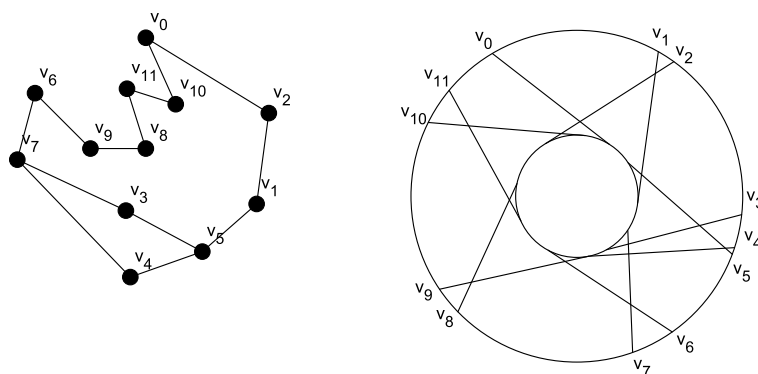


Figura 39 – Grafo permutação circular.

Fonte: Autoria própria.

Um grafo G é **trapézio** se possui uma representação por interseção de uma família de trapézios entre duas retas paralelas, onde cada trapézio corresponde a um vértice de G e dois trapézios se intersectam se, e somente se, existe aresta entre os respectivos vértices. A Figura 40 apresenta o grafo da Figura 38 representado pela interseção de uma família de trapézios.

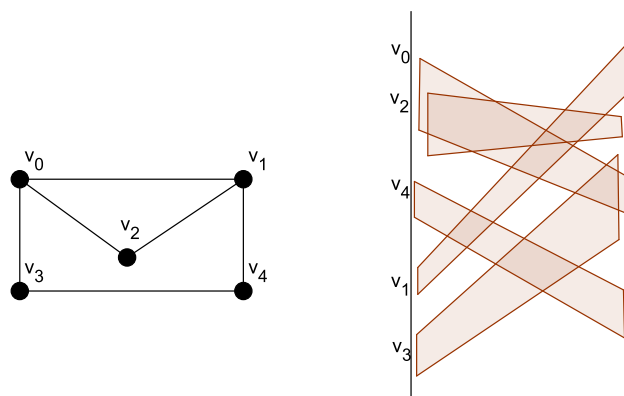


Figura 40 – Grafo trapézio.

Fonte: Autoria própria.

Os grafos **trapézio circular** são aqueles que possuem uma representação por interseção entre dois círculos concêntricos, onde cada trapézio representa um vértice e a interseção entre dois trapézios implica na existência de uma aresta entre seus respectivos vértices. A Figura 41 apresenta um exemplo de grafo trapézio circular.

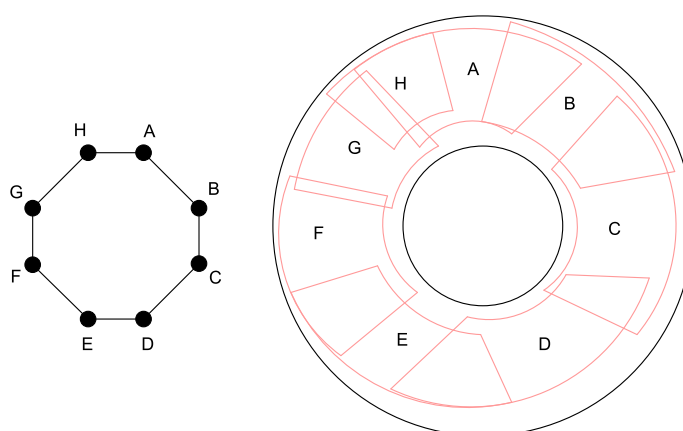


Figura 41 – Exemplo grafo trapézio circular.

Fonte: Autoria própria.

Os grafos **círculo** são aqueles que possuem uma representação por inteseção de curvas em um círculo, onde cada vértice corresponde a uma curva cujos extremos são pontos do círculo e existe aresta entre dois vértices se, e somente se, as curvas correspondentes se intersectam. Um exemplo de grafo círculo é apresentado na Figura 42.

Um grafo é **concave-round** se seus vértices podem ser numerados circularmente tal que a vizinhança fechada de todo vértice representa um intervalo na sequência. Um exemplo de grafo concave-round pode ser visto na Figura 43.

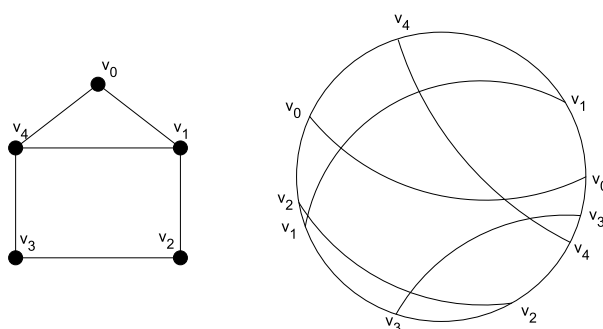


Figura 42 – Grafo círculo.

Fonte: Autoria própria.

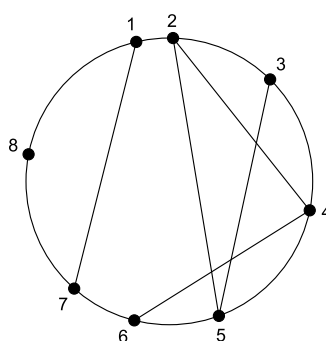


Figura 43 – Grafo *concave-round*.

Fonte: Autoria própria.

Segundo Ridder *et al.* (2001) os grafos arco-circulares e círculo são subclasses dos grafos trapézio circular e os grafos *concave-round* são uma subclasse dos grafos arco-circulares. Portanto, estas classes também são subclasses dos grafos função-circular.

5.2 ABRANGÊNCIA DOS RESULTADOS

Ao resolver o Problema da Inundação com pivô fixo para os grafos função-circular, este problema também é resolvido para as classes trapézio circular, permutação circular, círculo, arco-circulares e *concave-round*, uma vez que estas são subclasses dos grafos função-circular. O Lema 5.2.1 prova a relação entre os grafos função-circular e suas subclasses.

Lema 5.2.1. *Os grafos trapézio circular são uma subclasse dos grafos função-circular.*

Demonstração. Sejam um grafo trapézio-circular G e o conjunto de trapézios que o compõem T . O grafo G é um grafo função-circular, onde para cada $t \in T$ existe uma curva f_t correspondente. Considere um trapézio t formado por $abcd$, onde ab e cd são dois arcos que pertencem aos

círculos externo e interno, respectivamente e ac e bd são dois segmentos que os ligam. A curva f_t pode ser tão longa quanto se queira, abrangendo quaisquer pontos dos trechos ac e bd , cobrindo pontos onde haja interseção com outros trapézios. Veja um exemplo na Figura 44.

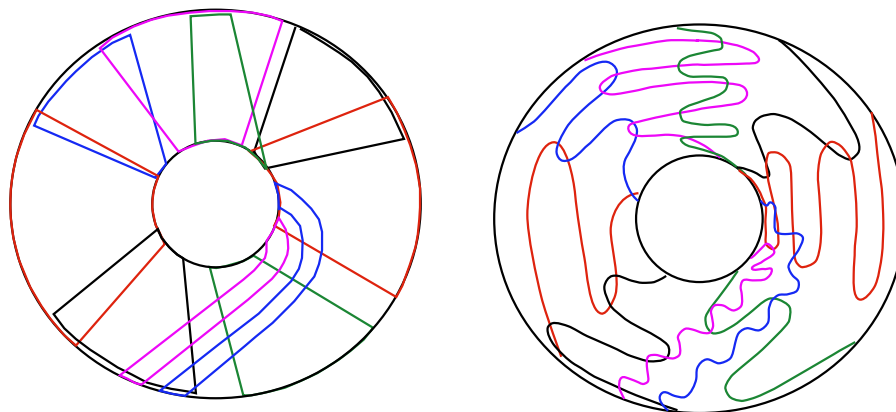


Figura 44 – Grafo trapézio circular e representação função-circular correspondente.

Fonte: Autoria própria.

□

A solução do problema para os grafos de co-comparabilidade implica na solução do problema para suas subclasses, sendo as principais os grafos trapézio, permutação, intervalos, indiferença e *caterpillar*. Portanto, o resultado de (FLEISCHER; WOEGINGER, 2012) inclui estas classes.

Na Figura 45 é possível observar as relações de contigência entre grafos função-circular e suas subclasses, onde os nós com borda contínua representam as classes para as quais o Problema da Inundação com pivô fixo foi resolvido por Fleischer e Woeginger (2012) e os nós com borda tracejada representam as classes para as quais a solução para o Problema da Inundação foi apresentado neste trabalho.

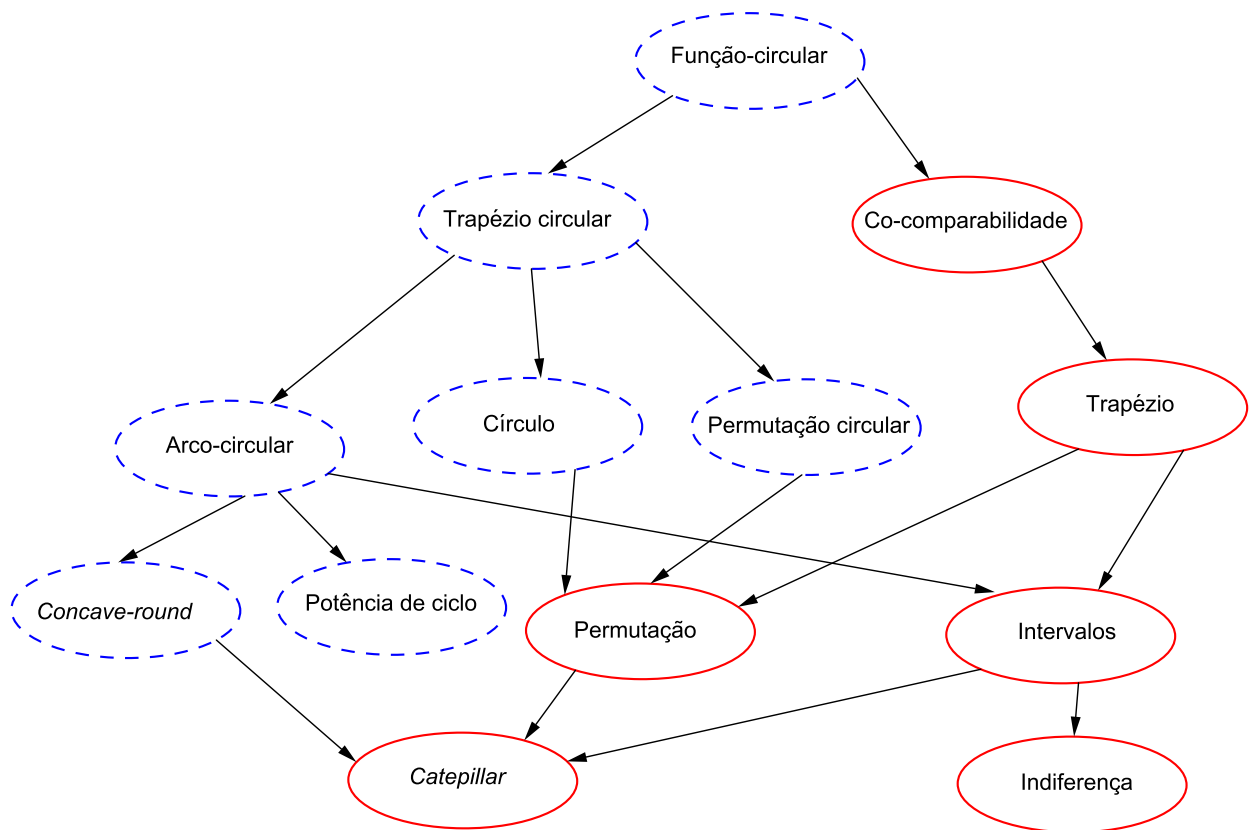


Figura 45 – Relações de contingência entre grafos função-circular e suas subclasses.

Fonte: Souza (2016).

6 CONCLUSÃO

Inicialmente este trabalho de conclusão de curso tinha como objetivo encontrar uma solução para o Problema da Inundação com pivô fixo para as potências de ciclo, desta forma a solução para as segundas potências de ciclo de Souza, Protti e Silva (2014) apresentada no Capítulo 2 serviu como base de estudo para elaboração de uma solução para o Problema da Inundação com pivô fixo para as potências de ciclo em geral. Ainda, foi necessário estudar a solução de Fleischer e Woeginger (2012) para o Problema da Inundação em grafos de comparabilidade apresentada no Capítulo 3. A ideia de transformar um grafo função-circular em um grafo função foi inspirada na solução de Souza, Protti e Silva (2014), onde realizamos uma espécie de corte no grafo assim como Souza, Protti e Silva (2014) verificam a menor quantidade de movimentos que inundam dois vértices predeterminados considerando para cada par de vértices do grafo. Por fim, a solução de Fleischer e Woeginger (2012) foi totalmente aproveitada. Com a solução apresentada consegue-se resolver o Problema da Inundação com pivô fixo para os grafos trapézio circular, arco-circular, círculo, permutação circular e *concave-round* em tempo polinomial. Como as potências de ciclo são grafos função-circular, o problema também foi resolvido para esta classe.

6.1 TRABALHOS FUTUROS

Para trabalhos futuros sugere-se tentar resolver o Problema da Inundação com pivô fixo para as classes *outer-string* e *string* que são superclasses dos grafos função-circular ou até mesmo para outras classes de grafo para as quais ainda não existe solução, ou provar que estas pertencem ao conjunto dos NP-completos. Além disso, seria interessante considerar a caracterização dos grafos função-circular e um algoritmo de reconhecimento para a classe.

REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, M. J. V. C. de. Fundamentos de matemática elementar (mat133). 2010.
- ASCHWANDEN, C. Spatial simulation model for infectious viral disease with focus on sars and the common flu. **37th Annual Hawaii International Conference on System Sciences, IEEE Computer Society**, 2004.
- BRANDSTÄDT, A.; SPINRAD, J. P. *et al.* **Graph classes: a survey**. [S.l.]: Siam, 1999. v. 3.
- CLIFFORD, R. *et al.* The complexity of flood filling games. **Theory of Computing Systems**, Springer, v. 50, n. 1, p. 72–92, 2012.
- DIJKSTRA, E. W. A note on two problems in connexion with graphs. **NUMERISCHE MATHEMATIK**, v. 1, n. 1, p. 269–271, 1959.
- FLEISCHER, R.; WOEGINGER, G. J. An algorithmic analysis of the honey-bee game. **Theoretical Computer Science**, Elsevier, v. 452, p. 75–87, 2012.
- FUKUI, H. *et al.* On complexity of flooding games on graphs with interval representations. In: **Computational Geometry and Graphs**. [S.l.]: Springer, 2013. p. 73–84.
- GERSTING, J. L. Fundamentos matemáticos para a ciência da computação, 3ª. **E 5ª Edições, Rio de Janeiro**, 2004.
- GOLUMBIC, M. C. **Algorithmic graph theory and perfect graphs**. [S.l.]: Elsevier, 2004. v. 57.
- GOLUMBIC, M. C.; ROTEM, D.; URRUTIA, J. Comparability graphs and intersection graphs. **Discrete Mathematics**, Elsevier, v. 43, n. 1, p. 37–46, 1983.
- HIROYUKI, F. *et al.* The complexity of free flood filling games. **Proceedings of The 14th Korea-Japan Joint Workshop on Algorithms and Computation**, v. 2011, n. 7, p. 1–5, 2011.
- JAFFE, A. **The millennium grand challenge in mathematics**. [S.l.]: Notices of the American Mathematical Society, 2006.
- LAGOUTTE, A.; NOUAL, M.; THIERRY, E. **Flooding games on graphs**. [S.l.], 2011.
- LIN, M. C. *et al.* Powers of cycles, powers of paths, and distance graphs. **Discrete Applied Mathematics**, Elsevier, v. 159, n. 7, p. 621–627, 2011.
- RIDDER, H. N. de *et al.* **Information System on Graph Classes and their Inclusions (ISGCI)**. 2001. <<http://www.graphclasses.org>>.
- SOUZA, U. dos S. **Multivariate Investigation of NP-Hard Problems: Boundaries Between Parameterized Tractability and Intractability**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal Fluminense, 2014.
- SOUZA, U. S. **Relações de contingência**. 2016. <<https://www.dropbox.com/s/0zv274dosc5msza/hierarquia%20das%20classes.pptx?dl=0>>.
- SOUZA, U. S.; PROTTI, F.; SILVA, M. D. An algorithmic analysis of Flood-It and Free-Flood-It on graph powers. **Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science**, Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science, v. 16, n. 3, p. 279–290, 2014.