

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM
MATEMÁTICA

MAYARA VENDRAMINI CODOGNOS

UM ESTUDO SOBRE O TEOREMA DE ARZELÀ-ASCOLI

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

TOLEDO

2016

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM
MATEMÁTICA**

MAYARA VENDRAMINI CODOGNOS

UM ESTUDO SOBRE O TEOREMA DE ARZELÀ-ASCOLI

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Toledo, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Manoel Dias Andrade

TOLEDO

2016

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM
MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

O Trabalho de Conclusão de Curso intitulado “Um estudo sobre o Teorema de Arzelà-Ascoli” foi considerado **APROVADO** de acordo com a ata nº -- de --/--/----

Fizeram parte da banca examinadora os professores:

Professor Dr. Rodrigo Manoel Dias Andrade

Professora Ma. Larissa Hagedorn Vieira

Professor Dr. Wilian Francisco de Araujo

TOLEDO

2016

RESUMO

O objetivo deste trabalho é realizar um estudo sobre sequências e séries de funções, no qual são analisados os principais tipos de convergência. Demonstra-se também, o seguinte teorema devido à Arzelà-Ascoli: Dada $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, sequência de funções equicontínuas e uniformemente limitadas, definidas em $[a, b]$, existe uma subsequência que converge uniformemente. Além disso, será abordada uma aplicação do teorema anterior, que reside no Cálculo das Variações.

Palavras-chave: Sequências de funções, Convergência uniforme, Equicontinuidade, Teorema de Arzelà-Ascoli.

ABSTRACT

The aim of this paper is to conduct a study about sequences and series of functions, in which the main types of convergence are analyzed. It is also proved the following theorem due to Arzela-Ascoli: Given $\{f_n\}_n$, equicontinuous and uniformly bounded sequence of functions, defined on $[a, b]$, there is a subsequence which converges uniformly. In addition, an application of the previous theorem, which lies in the Calculus of Variations will be also addressed.

Keywords: Sequences of functions, Uniform convergence, Equicontinuity, Arzela-Ascoli theorem.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

2.1	Sequência de funções do Exemplo 2.3	9
2.2	Sequência de funções do Exemplo 2.4	10
2.3	Sequência de funções da Afirmação 2.5	11
2.4	Sequência de funções do Exemplo 2.7	12
2.5	Sequência de funções da Afirmação 2.8	13
2.6	Sequência de funções da Afirmação 2.9	14
2.7	Sequência de funções do Exemplo 2.11	15
2.8	Sequência de funções do Exemplo 2.17	19
2.9	Sequência de funções do Exemplo 2.21	21
5.1	Sequência de funções de $f_n(x) = x^{2n}$	33
5.2	Gráfico do caso $c = 1$	34
5.3	Gráfico do caso $0 < c < 1$	34
5.4	Gráfico do caso $c > 1$	35

LISTA DE SÍMBOLOS

S_n Soma parcial.

$[x]$ Parte inteira de x .

\mathcal{F} Família de funções.

\mathcal{F}_c Família de funções contínuas.

f_n Sequência de funções.

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES	5
LISTA DE SÍMBOLOS	6
1 INTRODUÇÃO	8
2 SEQUÊNCIAS DE FUNÇÕES	9
3 SÉRIES DE FUNÇÕES	22
4 TEOREMA DE ARZELÀ-ASCOLI	28
5 APLICAÇÃO	33
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	36
REFERÊNCIAS	37

1 INTRODUÇÃO

Até a metade do século XVII, o desenvolvimento da análise de sequências e séries numéricas demonstrou-se bastante satisfatório, devido à contribuição de matemáticos como James Gregory, Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz, Jacques Bernoulli, Brook Taylor, entre outros. A partir de então, a comunidade matemática foi motivada a mudar a natureza da pesquisa, passando de cálculos práticos para fundamentos mais teóricos sobre as ideias de limite e convergência de sequências e séries (BARONI R. L. S.; OTERO-GARCIA, 2014).

Ao longo da formação no curso de Licenciatura em Matemática, estudam-se nas sequências e séries de números reais, as definições, exemplos, os tipos e critérios de convergência, sendo que um dos principais resultados vistos na disciplina de Análise Matemática I é o Teorema de Bolzano-Weierstrass, o qual garante que para qualquer sequência limitada de números reais, pode-se extrair uma subsequência convergente (FIGUEIREDO, 2011). Com o intuito de aprofundar os conhecimentos sobre o tema, considerar-se-ão as sequências e séries cujos termos são funções, $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$, “cada uma das quais cumpre as condições exigidas, em determinados problemas, apenas aproximadamente, porém com aproximações cada vez menores” (LIMA, 1993). Intuitivamente, o limite dessa sequência de funções atenderá às condições inicialmente impostas.

Nesse contexto, o objetivo deste trabalho é conhecer as sequências e séries de funções e como ocorre a convergência nesses casos, bem como relacionar os resultados de sequências e séries numéricas com os resultados de sequências e séries de funções. Desse modo, a pesquisa tem como problema “Sob quais condições as sequências e séries de funções convergem? Quais seus principais tipos de convergência? Existe resultado análogo ao Teorema de Bolzano-Weierstrass para sequência de funções?”.

2 SEQUÊNCIAS DE FUNÇÕES

Nesta seção, apresentar-se-ão algumas definições¹ que foram estudadas e que dão subsídio para a compreensão do Teorema de Arzelà-Ascoli. No que segue, X será um subconjunto dos números reais.

Definição 2.1 *Uma sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma correspondência que associa a cada número natural $n \in \mathbb{N}^*$, uma função f_n , definida em X e tomando valores reais.*

Definição 2.2 *Uma sequência $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ de funções converge simplesmente para uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, se dado $\epsilon > 0$, para cada $x \in X$, existir $n_0 = n_0(x, \epsilon)$, com $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, se $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.*

Exemplo 2.3 *A sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f_n(x) = \frac{x}{n}$, converge simplesmente para $f(x) = 0$.*

De fato, note que, para todo $\epsilon > 0$ e todo $x \in \mathbb{R}$,

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x}{n} \right| < \epsilon \Rightarrow \frac{|x|}{n} < \epsilon \Rightarrow n > \frac{|x|}{\epsilon}.$$

Desse modo, tomando $n_0 > \left\lceil \frac{|x|}{\epsilon} \right\rceil$, a convergência simples ocorre, onde $[x]$ significa a parte inteira de x .

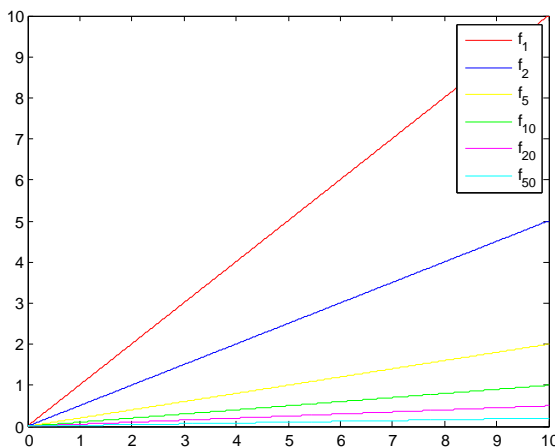


Figura 2.1: Sequência de funções do Exemplo 2.3

Fonte: Autora, 2016.

¹O conteúdo deste trabalho foi baseado e inspirado nos livros que constam nas referências bibliográficas.

Observando o gráfico da Figura 2.1, pode-se perceber que, conforme o n aumenta, as funções aproximam-se cada vez mais da função $f(x) = 0$. Observe também que a distância das f_n , para cada x , em relação a f , é discrepante. Isso ocorre pois, para cada x , existe um ϵ dependendo do ponto, característica principal da convergência simples.

Exemplo 2.4 A sequência de funções $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (Figura 2.2), dada por $f_n(x) = x^n$, converge simplesmente para

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

De fato, considerando $0 \leq x < 1$, para todo $\epsilon > 0$, note que

$$|x^n| < \epsilon \Rightarrow x^n < \epsilon \Rightarrow \log x^n < \log \epsilon \Rightarrow n \log x < \log \epsilon \Rightarrow n > \frac{\log \epsilon}{\log x}.$$

Logo, basta tomar $n_0 > \left\lceil \frac{\log \epsilon}{\log x} \right\rceil$. Com $x = 1$, tem-se que, para todo $\epsilon > 0$ e para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$|x^n - 1| < \epsilon \Rightarrow |1^n - 1| = 0 < \epsilon.$$

Desse modo, tem-se a convergência simples da f_n para a f .

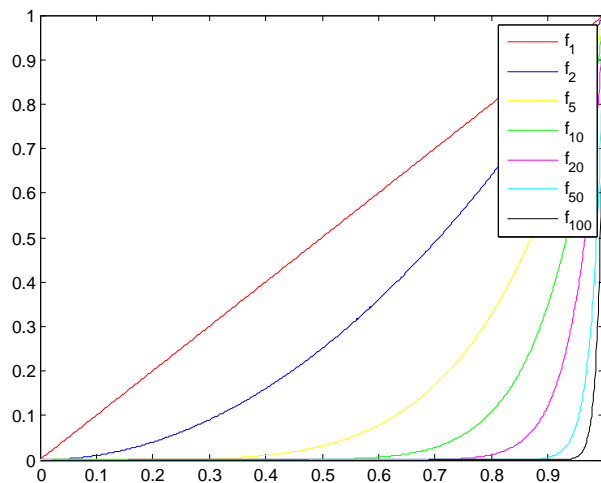


Figura 2.2: Sequência de funções do Exemplo 2.4

Fonte: Autora, 2016.

Definição 2.5 Uma sequência $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ de funções converge uniformemente para uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, se dado $\epsilon > 0$, para todo $x \in X$, existir n_0 (que depende de ϵ), com $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, se $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Afirmção 2.6 A sequência de funções $f_n(x) = nxe^{-nx}$ (Figura 2.3), definidas em $[0, 1]$, converge simplesmente para $f(x) = 0$ em $[0, 1]$, mas a convergência não é uniforme.

Demonstração:

Observe que, se $x = 0$, a convergência é trivial. Agora, se $0 < x \leq 1$, note que, para todo $\epsilon > 0$, $\frac{nx}{e^{nx}} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, isso significa que existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, para todo $n > n_0$, $nxe^{-nx} < \epsilon$.

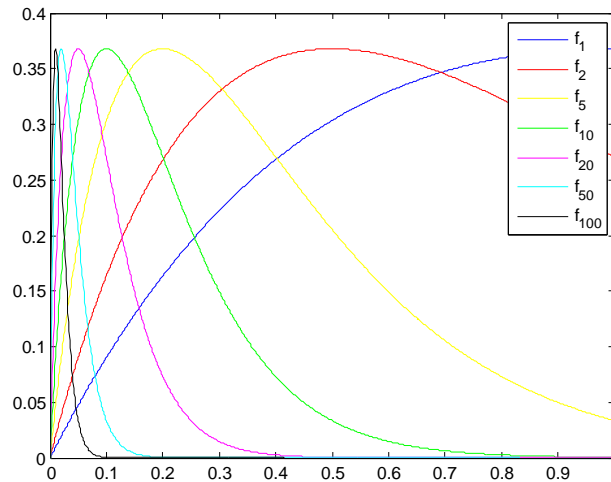


Figura 2.3: Sequência de funções da Afirmação 2.5
Fonte: Autora, 2016.

Desse modo, para mostrar que a convergência da sequência de funções da Afirmação 2.5 não é uniforme, utilizar-se-á a noção de distância entre duas funções no espaço métrico formado por funções contínuas no intervalo $[a, b]$.

Primeiramente, tem-se que um espaço métrico é um par (M, d) , onde M é um conjunto não-vazio e d é uma métrica em M . Além disso, uma métrica num conjunto M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, que associa cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a distância de x a y , que cumprem as seguintes condições (LIMA, 2015):

- $d(x, x) = 0$;
- Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;
- $d(x, y) = d(y, x)$;
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$;

Nesse caso, utilizaremos a convergência uniforme a partir da convergência na distância entre duas funções. Essa métrica é definida por $\rho(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$. Como $f_n(x) = nxe^{-nx}$ é contínua em um compacto, esse máximo existe.

Assim, estudando a convergência uniforme por meio desse espaço métrico, tem-se que $f_n \rightarrow f$ uniformemente se, dado $\epsilon > 0$, existe n_0 , que depende apenas de ϵ , tal que para todo $n \in \mathbb{N}^*$ com $n > n_0$, tem-se $\rho(f_n, f) < \epsilon$.

Como é preciso mostrar que a convergência não é uniforme, basta negar essa afirmação, resultando, existe um $\epsilon > 0$, tal que para todo n_0 , com $n > n_0$, ocorre $\max_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon$.

Agora, basta encontrar o máximo da f_n , já que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$. Desse modo, note que

$$f_n(x)' = (nxe^{-nx})' = ne^{-nx} - n^2xe^{-nx} = ne^{-nx}(1 - nx).$$

Igualando a zero, com base no teste da primeira derivada, obtém-se

$$ne^{-nx}(1 - nx) = 0 \Rightarrow (1 - nx) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{n}.$$

Aplicando $x = \frac{1}{n}$ na função,

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n\left(\frac{1}{n}\right)e^{-n\left(\frac{1}{n}\right)} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Logo, basta tomar $\epsilon < \frac{1}{e}$.

Exemplo 2.7 A sequência de funções $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f_n(x) = \frac{x}{n}$ (Figura 2.4), converge uniformemente para $f(x) = 0$.

Isso ocorre pois, no caso dessa sequência de funções, considerando um intervalo do tipo $[-c, c]$ com $c > 0$, tem-se que, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \geq \left[\frac{c}{\epsilon}\right]$ para cada $x \in \mathbb{R}$ fixado, tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x}{n}\right| < \frac{c}{n} < \frac{c}{\frac{c}{\epsilon}} = \epsilon$. Em particular, para o intervalo $[0, 1]$.

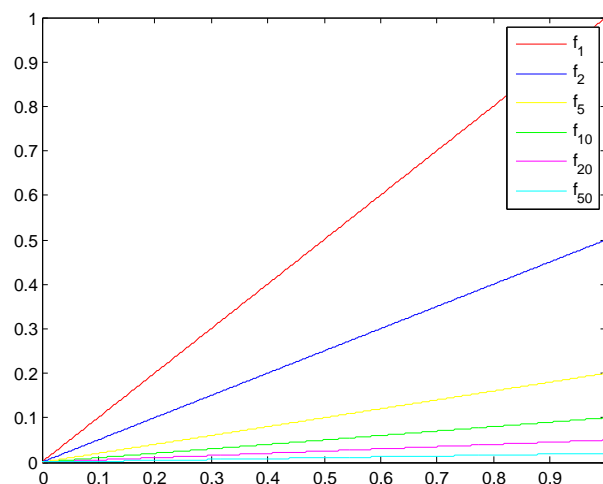


Figura 2.4: Sequência de funções do Exemplo 2.7
Fonte: Autora, 2016.

É interessante realizar uma comparação entre as sequências de funções da Figura 2.1 e da Figura 2.4, visto que trata-se da mesma sequência de funções, porém

definidas em subconjuntos diferentes, a primeira, definida em \mathbb{R} e a segunda, no intervalo $[0, 1]$. É possível observar que, quando definida em toda a reta real, a distância entre as f_n e a f aumenta conforme x aumenta, necessitando de um n_0 que dependa do ponto. Já no segundo caso, é possível encontrar um n_0 que independa de x , mas apenas do intervalo tomado (constante), o que ocasiona a convergência uniforme.

Afirmção 2.8 A seqüência de funções $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f_n(x) = \frac{x^2}{1 + nx^2}$ (Figura 2.5), converge uniformemente para a função $f(x) = 0$.

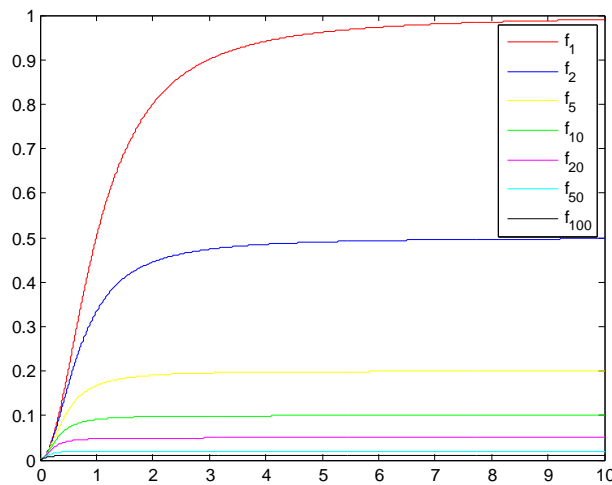


Figura 2.5: Seqüência de funções da Afirmção 2.8
Fonte: Autora, 2016.

De fato, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\epsilon)$, tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{x^2}{1 + nx^2} \right| < \epsilon \Rightarrow \frac{x^2}{1 + nx^2} < \epsilon.$$

É trivial que

$$\frac{x^2}{1 + nx^2} < \frac{1}{n} \Rightarrow nx^2 < 1 + nx^2 \Rightarrow 1 > 0.$$

Logo,

$$n > n_0 \Rightarrow \frac{x^2}{1 + nx^2} < \frac{1}{n} < \epsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\epsilon}.$$

Desse modo, basta tomar

$$n_0 > \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil.$$

Afirmção 2.9 A seqüência de funções $\left(\frac{\text{sen}(nx)}{\sqrt{n}} \right)$ (Figura 2.6), definida em $[0, \pi]$ converge uniformemente.

Para encontrar a função f , note que:

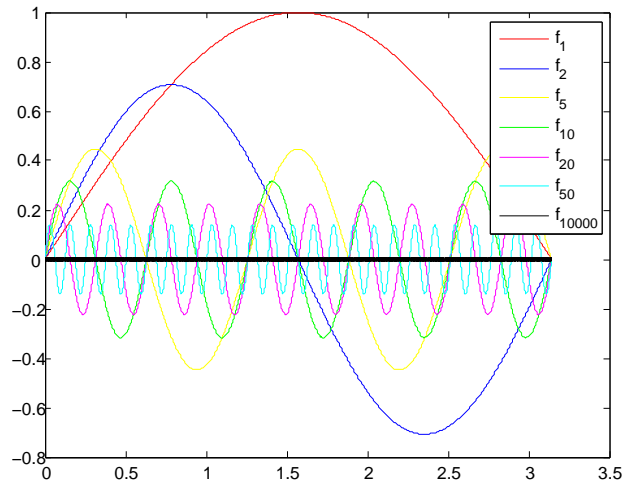


Figura 2.6: Sequência de funções da Afirmação 2.9
Fonte: Autora, 2016.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\text{sen}(nx)}{\sqrt{n}} \right) = 0,$$

pois $|\text{sen}(nx)| < 1$, para $x \in [0, \pi]$ e $\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$.

Com efeito, a sequência $f_n(x) = \frac{\text{sen}(nx)}{\sqrt{n}}$ converge uniformemente para $f(x) = 0$, pois, dado $\epsilon > 0$, para todo $x \in [0, \pi]$, existe $n_0 = n_0(\epsilon)$, tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{\text{sen}(nx)}{\sqrt{n}} \right| = \frac{|\text{sen}(nx)|}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon.$$

Logo, basta tomar $n_0 > \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \right\rceil$.

Afirmação 2.10 A sequência de funções $f_n : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{n} \text{sen} \left(\frac{1}{nx} \right)$, converge uniformemente para a função $f(x) = \frac{1}{x}$.

Para que haja a convergência uniforme é necessário que exista n_0 dependendo apenas de ϵ , de modo que, para todo $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} n > n_0 &\Rightarrow \left| \frac{1}{x} + \frac{1}{n} \text{sen} \left(\frac{1}{nx} \right) - \frac{1}{x} \right| < \epsilon \\ &\Rightarrow \left| \frac{1}{n} \text{sen} \left(\frac{1}{nx} \right) \right| = \frac{1}{n} \left| \text{sen} \left(\frac{1}{nx} \right) \right| < \epsilon. \end{aligned}$$

Como $\left| \operatorname{sen} \left(\frac{1}{nx} \right) \right| \leq 1$, então

$$n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} \left| \operatorname{sen} \left(\frac{1}{nx} \right) \right| < \frac{1}{n} < \epsilon.$$

Assim, para $n_0 > \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil$, $f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{n} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{nx} \right)$ converge uniformemente para $f(x) = \frac{1}{x}$.

Observação: É evidente que, se f_n converge uniformemente para f , então f_n converge simplesmente para f . Porém, a recíproca é falsa, tendo como exemplo a Afirmação 2.5. O exemplo a seguir, retrata a contrapositiva dessa observação.

Exemplo 2.11 A sequência de funções $f_n : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, em que $f_n(x) = \cos(nx)$ (Figura 2.7) não converge simplesmente para função alguma.

De fato, tomando, por exemplo $x = \pi$, a $f_n(\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ não possui limite. Logo, como não existe limite para todo x no intervalo $[0, 2\pi]$, f_n não converge simplesmente, e conseqüentemente, não há a convergência uniforme.

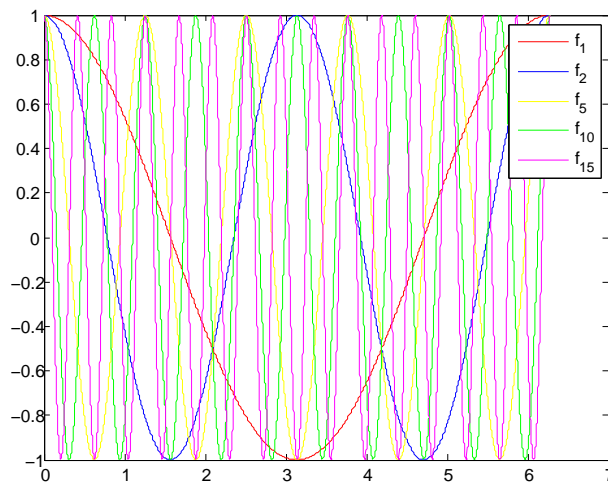


Figura 2.7: Sequência de funções do Exemplo 2.11
Fonte: Autora, 2016.

Outra maneira de verificar a convergência uniforme é adotar o Critério de Cauchy para seqüências de funções (Teorema 2.13). Para sua demonstração utilizar-se-á o seguinte lema:

Lema 2.12 Toda seqüência de Cauchy de números reais é convergente.

Teorema 2.13 (Critério de Cauchy) Uma seqüência f_n de funções definidas em X converge uniformemente para uma função f se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$, para todo $x \in X$ e todos $n, m \geq n_0$.

Demonstração:

Supõe-se que $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente em X . Assim, dado $\epsilon > 0$, para todo $x \in X$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned} n > n_0 &\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \\ m > n_0 &\Rightarrow |f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, para $n, m > n_0$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \\ &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \\ &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Então, $n, m > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$, isto é, f_n é uma sequência de Cauchy.

Se a sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ é de Cauchy, então para cada x , os números $f_n(x)$, com $n \in \mathbb{N}$, formam uma sequência de Cauchy de números reais.

Como toda sequência de Cauchy é convergente, suponha que $f_n \rightarrow f$, em que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon, \text{ para todo } x \in X.$$

Fixando $n \geq n_0$ e $x \in X$, como $f_m(x) \rightarrow f(x)$ quando $m \rightarrow \infty$, tem-se que, para todo $x \in X$

$$n > n_0 \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon,$$

ou seja, f_n converge uniformemente para f .

Em outras palavras, uma sequência de funções que converge uniformemente é uma sequência de Cauchy, e se a sequência de funções for de Cauchy, converge uniformemente.

Utilizando os resultados obtidos até agora, é possível mostrar que a convergência uniforme possibilita a inversão da ordem de limites repetidos, como mostra o Teorema 2.14.

Teorema 2.14 *Seja a um ponto de acumulação do subconjunto X . Se a sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $L_n = \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$, então*

1. Existe $L = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n$;

2. Tem-se $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Demonstração:

1. Dado $\epsilon > 0$, como f_n converge uniformemente para f , então, pelo Critério de Cauchy (Teorema 2.13), existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, para todo $x \in X$,

$$m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Agora, sejam $m, n > n_0$ e $L_n = \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$. Desse modo, pode-se tomar $x \in X$, de forma que

$$|f_m(x) - L_n| < \frac{\epsilon}{3}$$

e

$$|f_n(x) - L_n| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Então, para $m, n > n_0$, tem-se

$$\begin{aligned} |L_m - L_n| &= |L_m - f_m(x) + f_m(x) - f_n(x) + f_n(x) - L_n| \\ &\leq |L_m - f_m(x)| + |f_m(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - L_n| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Logo, $|L_m - L_n| < \epsilon$, ou seja, L_n é uma sequência de Cauchy e converge uniformemente para L . Assim, $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = L$.

2. Sendo assim, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, para todo $x \in X$

$$n > n_0 \Rightarrow |L - L_n| < \frac{\epsilon}{3}$$

e

$$n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Agora, com $n > n_0$, como $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = L_n$, por definição de limite, existe $\delta > 0$, tal que para $x \in X$,

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - L_n| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - L_n + L_n - L| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - L_n| + |L_n - L| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Logo, se $|f(x) - L| < \epsilon$ quando $n > n_0$, então $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. O que conclui a demonstração do teorema.

Isto é, afirmar o Teorema 2.14 significa dar validade à propriedade de que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\lim_{x \rightarrow a} f_n(x)] = \lim_{x \rightarrow a} [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)],$$

desde que existam os dois limites dentro dos colchetes, sendo o segundo deles uniforme.

Exemplo 2.15 *Seja a sequência de funções do Exemplo 2.4, $f_n(x) = x^n$, em que $f(x) = 0$ se $0 \leq x < 1$, e $f(x) = 1$ se $x = 1$.*

Neste caso, o Teorema 2.14 não é válido, pois

$$\lim_{x \rightarrow 1} [\lim_{n \rightarrow \infty} x^n] = \lim_{x \rightarrow 1} 0 = 0,$$

mas,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\lim_{x \rightarrow 1} x^n] = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Desse modo, isso ocorre pois, como vimos, a convergência da sequência f_n para f é simples e não uniforme.

Além disso, vimos no Exemplo 2.4, que uma sequência de funções contínuas pode convergir simplesmente para uma função não contínua. O teorema a seguir nos fornecerá o resultado de que essa situação não ocorre quando a convergência é uniforme.

Teorema 2.16 *Seja f_n uma sequência de funções contínuas, definidas em um intervalo I , que converge uniformemente, e seja f seu limite. Então f é um função contínua.*

Demonstração: Provar-se-á que f é contínua em um ponto $y \in I$. Como $f_n \rightarrow f$, então para todo $x \in I$, dado $\epsilon > 0$, toma-se $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_{n_0}(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Pela continuidade de $f_{n_0}(x)$ tem-se que existe $\delta > 0$, tal que, se $x \in I$,

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Agora, como

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y) + f_{n_0}(y) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \text{ para todo } x, y \in I \text{ com } |x - y| < \delta, \end{aligned}$$

o que prova a continuidade de f em y .

Exemplo 2.17 A sequência de funções $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ (Figura 2.8) converge para a função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}.$$

Como f é descontínua, pela contrapositiva do Teorema 2.16, tem-se que a convergência não é uniforme.

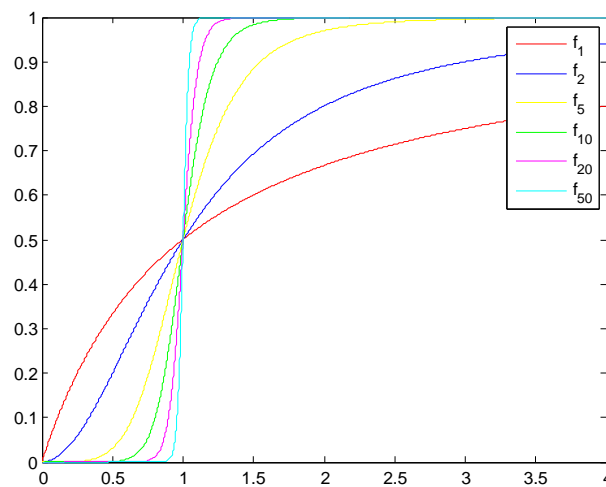


Figura 2.8: Sequência de funções do Exemplo 2.17
Fonte: Autora, 2016.

A conclusão do Teorema 2.16 é que se f não é contínua, então a convergência não é uniforme. Porém se f é contínua, a convergência pode ser uniforme ou não.

Exemplo 2.18 A sequência de funções

$$f_n(x) = \begin{cases} nx - 1, & n^{-1} \leq x < 2n^{-1} \\ -nx + 3, & 2n^{-1} \leq x \leq 3n^{-1} \\ 0, & x \text{ nos demais pontos de } [0, 1]. \end{cases}$$

converge simplesmente para a função $f(x) = 0$.

Neste caso a função f é contínua, mas a convergência não é uniforme.

O teorema a seguir fornece um resultado em que há a garantia de que, se a f for contínua, então a convergência é uniforme, bastando acrescentar a condição de que as funções da sequência sejam monótonas e estejam definidas em um intervalo fechado e limitado. Para sua demonstração, será necessário a utilização do Lema 2.19, a seguir.

Lema 2.19 *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e I intervalo. Suponha que, para um ponto $y \in I$, se tenha $f(y) < c$. Então, existe um $\epsilon > 0$ tal que $f(x) < c$ para todo $x \in I$ tal que $|x - y| \leq \epsilon$.*

Teorema 2.20 (Dini) *Seja f_n uma sequência de funções contínuas em um intervalo fechado e limitado I . Se f_n for monótona e convergir simplesmente para uma função contínua f , então a convergência é uniforme.*

Demonstração: Considerar-se-á o caso em que f_n é não-decrescente.

Por hipótese, f_n converge simplesmente para f . Então, dado $\epsilon > 0$, para cada $x \in I$, existe $n(x)$ tal que

$$f(x) - f_{n(x)}(x) \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Pela continuidade da $f_{n(x)}$, tem-se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta_1(x)$, tal que para todo $y \in I$,

$$|x - y| < \delta_1(x) \Rightarrow |f_{n(x)}(x) - f_{n(x)}(y)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Pela continuidade da $f(x)$, tem-se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta_2(x)$, tal que

$$|x - y| < \delta_2(x) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Seja $\delta(x) = \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\}$. Desse modo, utilizando a desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} |f(y) - f_{n(x)}(y)| &= |f(y) - f(x) + f(x) - f_{n(x)}(x) + f_{n(x)}(x) - f_{n(x)}(y)| \\ &\leq |f(y) - f(x)| + |f(x) - f_{n(x)}(x)| + |f_{n(x)}(x) - f_{n(x)}(y)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

para cada $y \in I$ com $|x - y| < \delta(x)$.

Agora considere a cobertura do intervalo fechado I , dada pelos intervalos abertos $I_x = \{y \in I : |y - x| < \delta(x)\}$.

Por hipótese, I é compacto, logo é possível extrair uma subcobertura finita de I_x . Portanto, escolhe-se $I_{x_1}, \dots, I_{x_2}, \dots, I_{x_m}, x \in I_{x_j}$, que cubram I .

Seja $n_0 = \max\{n(x_1), \dots, n(x_m)\}$. Agora, dado $x \in I$ arbitrário, $x \in I_{x_j}$, para algum x_j . Então, pela monotonicidade de f_n , isto é $f_n \leq f_{n+1} \Rightarrow 0 < f - f_n$, tem-se

$$f(x) - f_n(x) \leq f(x) - f_{n(x_j)}(x) < \epsilon, \text{ para todo } x \in I \text{ e } n > n_0.$$

Logo, $0 < f(x) - f_n(x) < \epsilon$, isto é, f_n converge uniformemente para f .

Exemplo 2.21 A sucessão de funções $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$ (Figura 2.9) converge uniformemente para $f(x) = x$ no intervalo $[0, 1]$.

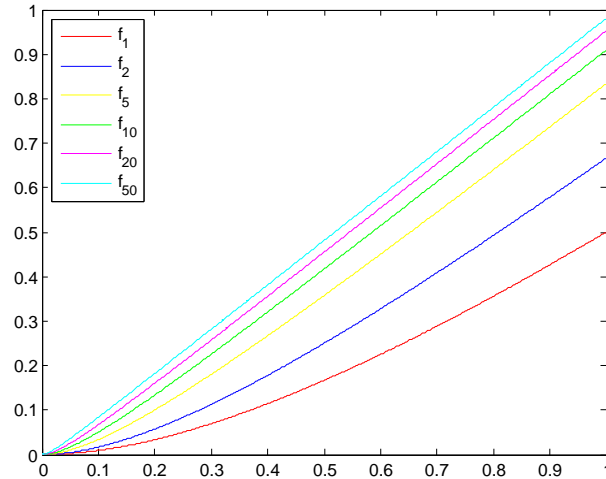


Figura 2.9: Sequência de funções do Exemplo 2.21
Fonte: Autora, 2016.

A sequência de funções f_n é monótona:

De fato, observe que

$$\begin{aligned} \frac{nx^2}{1+nx} &\leq \frac{(n+1)x^2}{1+(n+1)x} \\ \Leftrightarrow \frac{nx^2}{(n+1)x^2} &\leq \frac{1+nx}{1+(n+1)x} \\ \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} &\leq \frac{1+nx}{1+nx+x}. \end{aligned}$$

Assim, $n + n^2x + nx \leq n + n^2x + 1 + nx$, logo $0 \leq 1$.

E ainda, basta observar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx^2}{1+nx} = x, \text{ para todo } x \in (0, 1].$$

Logo, pelo Teorema de Dini, f_n converge uniformemente para x .

3 SÉRIES DE FUNÇÕES

Antes de se iniciar o estudo sobre as séries de funções, é necessário retomar a definição e o critério de convergência de séries numéricas, visto que algumas noções serão utilizadas. Sendo assim, foram utilizados os materiais que constam nas referências bibliográficas desse trabalho, como Análise I, de Djairo Figueiredo e Curso de Análise, de Elon Lages Lima.

Definição 3.1 A expressão $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$ é chamada de série numérica, em que os termos a_n são números reais dados.

Para as séries numéricas vale o seguinte teorema:

Teorema 3.2 A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, existir n_0 (que pode depender de ϵ) tal que $\left| \sum_{j=n}^m a_j \right| < \epsilon$ para todos $m \geq n \geq n_0$.

Definição 3.3 Seja f_n um seqüência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, definidas em um subconjunto X de \mathbb{R} . É dado o nome de série de funções à soma dos infinitos termos dessa seqüência. Em símbolos, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots$

Para cada $x \in X$, tem-se a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, fazendo com que a convergência da séries seja estudada por meio das somas parciais

$$S_n(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x).$$

Definição 3.4 A série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge simplesmente se a seqüência $S_n(x)$ (numérica) das reduzidas converge simplesmente.

Definição 3.5 A série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente se a seqüência $S_n(x)$ (numérica) das reduzidas converge uniformemente.

Proposição 3.6 A série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge simplesmente se, e somente se, dados $\epsilon > 0$ e

$x \in X$, existir $n_0 = n_0(x, \epsilon)$, tal que $\left| \sum_{j=n}^m f_j(x) \right| \leq \epsilon$, para todos $m > n \geq n_0$.

Demonstração:

Se a série converge simplesmente, então, por definição, a sequência $S_n(x)$ das reduzidas converge simplesmente. Logo, pelo Teorema 3.2, tem-se que, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > n \geq n_0 \Rightarrow |S_m(x) - S_{n-1}(x)| < \epsilon.$$

Por outro lado,

$$\left| \sum_{j=n}^m f_j(x) \right| = |f_n(x) + \dots + f_m(x)| = |S_m(x) - S_{n-1}(x)| < \epsilon.$$

Desse modo, dado $\epsilon > 0$, para $x \in X$, tem-se

$$m > n \geq n_0 \Rightarrow \left| \sum_{j=n}^m f_j(x) \right| < \epsilon.$$

Reciprocamente, dado $\epsilon > 0$ e o x já definido, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$m > n \geq n_0 \Rightarrow \left| \sum_{j=n}^m f_j(x) \right| < \epsilon.$$

Agora, tem-se que

$$|S_m(x) - S_{n-1}(x)| = |f_n(x) + \dots + f_m(x)| = \left| \sum_{j=n}^m f_j(x) \right| < \epsilon.$$

Logo, pelo Teorema 3.2, as reduzidas convergem uniformemente e por definição, a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ também converge simplesmente.

Proposição 3.7 *A série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente se, e somente se, dados $\epsilon > 0$, existir $n_0 = n_0(\epsilon)$, tal que $\left| \sum_{j=n}^m f_j(x) \right| \leq \epsilon$, para todo $x \in X$ e todos $m > n \geq n_0$.*

Demonstração:

Se a série converge uniformemente, então, por definição, a sequência $S_n(x)$ das reduzidas converge uniformemente. Logo, pelo Critério de Cauchy para sequências (Teorema 2.14), tem-se que, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\epsilon)$, tal que

$$m > n \geq n_0 \Rightarrow |S_m(x) - S_{n-1}(x)| < \epsilon.$$

Por outro lado,

$$\left| \sum_{j=n}^m f_j(x) \right| = |f_n(x) + \dots + f_m(x)| = |S_m(x) - S_{n-1}(x)| < \epsilon.$$

Desse modo, dado $\epsilon > 0$, para todo $x \in X$, tem-se

$$m > n \geq n_0 \Rightarrow \left| \sum_{j=n}^m f_j(x) \right| < \epsilon.$$

Agora, por hipótese, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que,

$$m > n \geq n_0 \Rightarrow \left| \sum_{j=n}^m f_j(x) \right| < \epsilon.$$

Então, tem-se que

$$|S_m(x) - S_{n-1}| = |f_n(x) + \dots + f_m(x)| = \left| \sum_{j=n}^m f_j(x) \right| < \epsilon.$$

Logo, pelo Critério de Cauchy, as reduzidas convergem uniformemente e por definição, a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ também converge uniformemente.

Definição 3.8 A série $\sum f_n$ converge absolutamente se a série $\sum |f_n|$ convergir.

Observação: Se a série $\sum |f_n|$ converge simplesmente/uniformemente, a série $\sum f_n$ também converge simplesmente/uniformemente.

Um importante resultado é o Teste M. de Weierstrass, que fornece uma condição suficiente para convergência absoluta e uniforme. Para demonstrá-lo, é necessário o seguinte corolário.

Corolário 3.8.1 Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos não-negativos. Se existem $c > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $a_n \leq c \cdot b_n$ para todo $n > n_0$ então a convergência de $\sum b_n$ implica a convergência de $\sum a_n$, enquanto que a divergência de $\sum a_n$ acarreta a de $\sum b_n$.

Teorema 3.9 Seja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uma série de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ definidas em um subconjunto X de \mathbb{R} . Suponha que $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in X$, e que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$. Então, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente e absolutamente.

Demonstração:

Por hipótese, a série $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ é convergente. Logo, pelo teste da comparação (corolário anterior), para cada $x \in X$, tem-se que $|f_n(x)| \leq M_n$ implica na convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$.

Como $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge absolutamente. Suponha que a série convirja para $f(x)$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ é convergente, segue do Teorema do Critério de Cauchy para séries que dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \sum_{j=n+1}^{\infty} M_j < \epsilon.$$

Desse modo, para todo $x \in X$,

$$n > n_0 \Rightarrow \left| \sum_{j=n+1}^{\infty} f_j(x) \right| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} M_j < \epsilon,$$

o que prova a uniformidade da convergência e conclui a demonstração do teorema.

Exemplo 3.10 A série $\sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{-nx}$ converge uniformemente em $0 \leq x \leq \infty$.

De fato, tem-se que

$$\begin{aligned} |x^n e^{-nx}| &= x^n e^{-nx} = e^{\ln x^n} \cdot e^{-nx} \\ &= e^{-nx + n \ln x} = e^{-n(x - \ln x)}, \end{aligned}$$

mas $e^{-n(x - \ln x)} < e^{-n}$, pois a função $g(x) = x - \ln x$ atinge seu mínimo em $x = 1$. Tomando $M_n = e^{-n}$ e observando que a série $\sum e^{-n}$ converge, já que $\frac{1}{e} < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{-nx}$ converge uniformemente em $x \geq 0$, pelo Teste M. de Weierstrass.

Afirmção 3.11 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$ converge absolutamente e uniformemente em \mathbb{R} .

Com efeito, perceba que a série numérica $\sum \frac{1}{n^2}$ é convergente. Observe também que $\left| \frac{1}{n^2 + x^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, pois $x^2 \geq 0$.

Sendo assim, pelo Teste M. de Weierstrass, a série converge absolutamente e uniformemente em \mathbb{R} .

Corolário 3.11.1 Seja a um ponto de acumulação de X . Se a série $\sum f_n$ converge uniformemente para f em X e, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $L_n = \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$, então $\sum L_n$ é uma série convergente e $\sum_n L_n = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Demonstração:

De fato, se $\sum f_n$ converge uniformemente, então a sequência S_n de suas parciais também converge uniformemente. Além disso, por hipótese, existe $L_n = \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, desse modo, existe $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \dots + \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \sum_{i=1}^n \lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = \lim_{x \rightarrow a} S_n(x)$.

Assim, se S_n é uniformemente convergente e existe $\lim_{x \rightarrow a} S_n(x)$, aplica-se o Teorema 2.13 de imediato, produzindo o resultado desse corolário.

Corolário 3.11.2 *Uma série convergente de funções contínuas não-negativas num conjunto fechado e limitado é uniformemente convergente se, e somente se, a soma é uma função contínua nesse conjunto.*

Demonstração:

Seja X um conjunto compacto. Tomando as reduzidas $S_n = f_1 + \dots + f_n$, tem-se uma sequência S_n dessas reduzidas, contínuas e definidas em X . Pelo Teorema 2.16, se uma sequência de funções contínuas é uniformemente convergente, então, seu limite é uma função contínua. Logo, como o limite de S_n é uma função contínua, a soma da série também é contínua.

Por outro lado, como as f_n são não-negativas, contínuas e a sequência de funções converge para uma função contínua, tem-se, pelo Teorema 2.20, que a convergência é uniforme. Logo, a série converge uniformemente.

Exemplo 3.12 *A série de funções não-negativas $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ não converge uniformemente em um compacto que possua zero como ponto de acumulação.*

Lembrando que, uma série geométrica converge se a razão é menor do que um. Assim, observa-se que, se $x > 0$, então a razão $r = \frac{1}{1+x^2} < 1$, convergindo para $s = \frac{a_1}{1-r}$, em que a_1 é o primeiro termo da sequência e r é a razão. Assim, para $x > 0$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ converge para $f(x) = \frac{a_1}{1-r} = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2$.

Observe que, para $x = 0$, a série converge para $f(x) = 0$.

Desse modo, a convergência da série é dada pela função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1 + x^2, & x > 0 \end{cases}.$$

De fato, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ não converge uniformemente, pois trata-se de uma série geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^n.$$

Nesse contexto, de acordo com o Corolário 3, se a soma não é contínua, a convergência não é uniforme. Logo, para qualquer compacto que possuir o zero como ponto de acumulação, a convergência da série não será uniforme.

Corolário 3.12.1 *Se as funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas e, para todo $x \in X$, $\sum |f_n(x)| = f(x)$, onde $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então a série $\sum f_n$ converge uniformemente em X fechado e limitado.*

Demonstração:

Com efeito, pelo Corolário 3.11.2, sejam $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas, não-negativas e a soma da série $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, então $\sum |f_n|$ converge uniformemente. Por definição de convergência absoluta, se $\sum |f_n|$ converge uniformemente em X compacto, $\sum f_n$ também converge uniformemente em X .

4 TEOREMA DE ARZELÀ-ASCOLI

Os resultados desta seção foram possibilitados por meio do conteúdo contido nos materiais referenciados ao final desse trabalho, os quais foram imprescindíveis no desenvolvimento da compreensão do teorema que dá origem ao nome desta seção.

Tratando-se de sequências numéricas, temos o Teorema de Bolzano-Weierstrass, cujo enunciado é “Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente”. Analisando essa situação para as sequências de funções, é correto afirmar que, toda sequência de funções contínuas definidas em um intervalo $[a, b]$ e uniformemente limitadas, possui uma subsequência que converge uniformemente? Antes de responder essa pergunta, é necessária a definição a seguir.

Definição 4.1 *Uma família \mathcal{F} de funções é dita uniformemente limitada se existe um número real $M > 0$, tal que $|f(x)| \leq M$, para todo $x \in X$.*

Desse modo, o seguinte contraexemplo mostra que a resposta do questionamento feito é negativa.

Exemplo 4.2 *Seja $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$, uma sequência de funções definidas no intervalo $[0, 1]$, contínuas e uniformemente limitadas, isto é, $0 < f_n(x) \leq \frac{1}{4}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo x no intervalo $[0, 1]$.*

Se existisse uma subsequência, ela deveria tender uniformemente para zero, o que não ocorre, pois em toda f_n , algum ponto do intervalo $[0, 1]$ assume o valor $\frac{1}{4}$, fazendo com que a convergência não seja uniforme. Sendo assim, é necessário atribuir outra hipótese para a situação considerada: a equicontinuidade.

Definição 4.3 *Uma família \mathcal{F} de funções contínuas, definidas em um intervalo $[a, b]$, é equicontínua se, dado $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que se $|x - y| \leq \delta$, para cada $x, y \in [a, b]$ implicar $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$, para cada $f \in \mathcal{F}$.*

Exemplo 4.4 *A sequência de funções $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f_n(x) = nx$ não é equicontínua.*

De fato, dado $\epsilon = \frac{1}{2}$, para qualquer que seja $\delta > 0$ podemos obter $n \in \mathbb{N}$, de modo que $\frac{1}{n} < \delta$. Logo, tem-se o ponto $x = y + \frac{1}{n}$, em que

$$|x - y| = \left| y + \frac{1}{n} - y \right| = \frac{1}{n} < \delta,$$

implica em

$$|f_n(x) - f_n(y)| = \left| n \left(y + \frac{1}{n} \right) - ny \right| = 1 > \epsilon$$

Afirmção 4.5 *A sequência de funções $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f_n(x) = x^n$ não é equicontínua.*

Com efeito, um conjunto de funções é equicontínuo quando é equicontínuo em todos os pontos. Então, dado $\epsilon = \frac{1}{4}$, para qualquer que seja $\delta > 0$, pode-se obter $n \in \mathbb{N}^*$, de modo que $\frac{1}{\sqrt[n]{2}} < \delta$. Tomando $x = 0$ e $y = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$, tem-se

$$|x - y| = \left| 0 - \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \right| = \frac{1}{\sqrt[n]{2}} < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| = \left| 0^n - \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}} \right)^n \right| = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \epsilon.$$

Logo, f_n não é equicontínua.

Observe que a sequência de funções do Exemplo 4.2 é composta por funções contínuas e uniformemente limitadas, definidas em um intervalo $[a, b]$ e converge simplesmente para zero. O que aconteceria se fosse considerada uma função uniformemente convergente? O teorema a seguir é um resultado que associa a convergência uniforme com a equicontinuidade.

Teorema 4.6 *Seja f_n uma sequência uniformemente convergente de funções contínuas em um intervalo $[a, b]$. Então, os elementos de f_n formam um conjunto equicontínuo de funções.*

Demonstração:

Como f_n é uma sequência de funções contínuas e converge uniformemente para uma função f , de acordo com o Teorema 2.16, f também é contínua. Logo, pela continuidade da f , dados $\epsilon > 0$, $\delta_0 > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$, tem-se que, para todo $x \in [a, b]$

$$|x - y| < \delta_0 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3}$$

Pela convergência da f_n , seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tem-se que, para todo $x \in [a, b]$,

$$n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Logo, para $n > n_0$ e $|x - y| < \delta_0$, tem-se

$$|f_n(x) - f_n(y)| = |f_n(x) - f(x) + f(x) - f(y) + f(y) - f_n(y)|$$

$$\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f_n(y) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon.$$

Com isso, prova-se a equicontinuidade das funções da sequência f_n quando $n > n_0$, faltando então, provar a equicontinuidade para todo $n \in \mathbb{N}$. Para se acrescentar as funções f_j , com $1 \leq j \leq n_0$, toma-se δ_j tal que $|f_j(x) - f_j(y)| < \epsilon$ para $|x - y| < \delta_j$.

Tomando $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{n_0}\}$, tem-se que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $|x - y| < \delta$

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon.$$

o que finaliza a demonstração do teorema.

Exemplo 4.7 A sequência de funções $f_n : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = \frac{\text{sen}(nx)}{n}$ é equicontínua.

De fato, a sequência de funções $f_n(x) = \frac{\text{sen}(nx)}{n}$ converge uniformemente para zero. Tomando $n_0 \geq \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil$, observe que

$$n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{\text{sen}(nx)}{n} \right| < \epsilon |\text{sen}(nx)| < \epsilon.$$

Além disso, as funções da sequência são contínuas, logo, pelo teorema anterior, os elementos da f_n formam um conjunto equicontínuo de funções.

Para a demonstração do Teorema de Arzelà-Ascoli, primeiramente é necessário, demonstrar o Lema 4.9, que dá conclusão ao Teorema de Arzelà-Ascoli. Para demonstrar o lema, é preciso conhecer o Teorema de Heine-Borel, que será utilizado em sua demonstração.

Teorema 4.8 Sejam K um conjunto fechado e limitado de \mathbb{R} e $\{A_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$, onde \mathcal{A} é uma conjunto de índices, uma coleção de abertos que cobre K , isto é, $K \subset \cup A_\alpha$. Então, existe um número finito, $A_{\alpha_1}, \dots, A_{\alpha_n}$, desses abertos, que também cobre K .

Lema 4.9 Seja f_n uma sequência equicontínua de funções definidas em $[a, b]$. Suponha que f_n convirja simplesmente para uma função f . Então, (f_n) converge uniformemente para f .

Demonstração:

Dado $x \in [a, b]$, a sequência numérica $(f_n(x))$ converge para $f(x)$, então, dado $\epsilon > 0$, existe n_0 , que depende de x e de ϵ , tal que

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{3},$$

para $n, m > n_0$. Pela convergência do conjunto de funções (f_n) , tem-se que existe $\delta > 0$ de modo que

$$|f_n(y) - f_n(z)| < \frac{\epsilon}{3},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $y, z \in [a, b]$, tal que $|x - y| < \delta$.

Agora, seja $J_x = \{y \in [a, b] : |y - x| < \delta\}$. Desse modo, para $n, m > n_0$ (dependendo de x) e $y \in J_x$, tem-se

$$\begin{aligned} |f_n(y) - f_m(y)| &= |f_n(y) - f_n(x) + f_n(x) - f_m(x) + f_m(x) - f_m(y)| \\ &\leq |f_n(y) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(y)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon. \end{aligned}$$

Como os conjuntos J_x , com $x \in [a, b]$ são abertos em $[a, b]$ e o cobrem, então, pelo Teorema de Heine Borel, existe um número finito de J_{x_1}, \dots, J_{x_k} que cobrem $[a, b]$. Para cada x_i tem-se um n_0 que depende de x_i , isto é, um $n_0(x_i)$. Seja $n_0 = \max\{n_0(x_i) : i = 1, \dots, k\}$ e dado $y \in [a, b]$, para algum x_i tem-se que $y \in J_{x_i}$, então

$$\begin{aligned} |f_n(y) - f_m(y)| &= |f_n(y) - f_n(x_i) + f_n(x_i) - f_m(x_i) + f_m(x_i) - f_m(y)| \\ &\leq |f_n(y) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f_m(x_i)| + |f_m(x_i) - f_m(y)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon, \end{aligned}$$

para todo $y \in [a, b]$ e todos $n, m > n_0$. Fixando n e fazendo m tender a infinito, obtem-se

$$|f_n(y) - f(y)| < \epsilon,$$

para todo $y \in [a, b]$ e todos $n > n_0$, provando a continuidade uniforme da sequência de funções.

Teorema 4.10 (Arzelà-Ascoli) *Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência equicontínua e uniformemente limitada de funções definidas em um intervalo $[a, b]$. Então $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ contém uma subsequência que converge uniformemente.*

Demonstração:

Seja r_1, r_2, \dots o conjunto enumerável de todos os racionais de $[a, b]$. Observe que $f_n(r_1)$ é uma sequência numérica limitada, pois a sequência de funções f_n é uniformemente limitada. Então, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe $f_{1n}(r_1)$ uma subsequência convergente de $f_n(r_1)$. Agora, tome $f_{1n}(r_2)$ uma sequência numérica limitada que fornece $f_{2n}(r_2)$, uma subsequência convergente de $f_{1n}(r_2)$. De maneira análoga, é possível construir uma sequência de subsequências, em que cada uma é subsequência da anterior:

$$\begin{array}{c}
f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1n}, \dots \\
f_{21}, f_{22}, \dots, f_{2n}, \dots \\
\vdots \\
f_{n1}, f_{n2}, \dots, f_{nn}, \dots
\end{array}$$

Defina $g_n = f_{nn}$ a subsequência diagonal $(f_{11}, f_{22}, \dots, f_{nn})$ da sequência obtida acima, em que o objetivo é mostrar que ela converge para todo $x \in [a, b]$. Pela construção da sequência de subsequências, tem-se que a g_n converge para todo r racional em $[a, b]$, pois $(f_{kn}(r_k))_{n=1}^{\infty}$ converge e $(g_n(r_k))_{n=k}^{\infty}$ é uma subsequência de $(f_{kn}(r_k))_{n=k}^{\infty}$. Então, é necessário provar que, para um real qualquer em $[a, b]$, g_n converge. Desse modo, seja $x \in [a, b]$ um real qualquer fixado. Pela equicontinuidade da sequência de funções (f_n) , tem-se que, dado um $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $|g_n(x) - g_n(y)| < \frac{\epsilon}{3}$, se $|x - y| < \delta$, pois a equicontinuidade é válida para todos os pontos das f_n , em particular, os da g_n , uma subsequência de f_n . Tome um racional $r \in [a, b]$, de modo que se $|x - r| < \delta$, então $|g_n(x) - g_n(r)| < \frac{\epsilon}{3}$.

Além disso, sabe-se que a sequência numérica $g_n(r)$ converge, pois g_n converge para todo racional em $[a, b]$, então, tem-se um n_0 , tal que $|g_n(r) - g_m(r)| < \epsilon$, pois $g_n(r)$ é numérica e converge, logo, é de Cauchy, já que toda sequência numérica convergente é de Cauchy.

Desse modo, para o x fixado, $m > n > n_0$ e $|x - r| < \delta$, tem-se

$$\begin{aligned}
|g_n(x) - g_m(x)| &= |g_n(x) - g_n(r) + g_n(r) - g_m(r) + g_m(r) - g_m(x)| \\
&\leq |g_n(x) - g_n(r)| + |g_n(r) - g_m(r)| + |g_m(r) - g_m(x)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon
\end{aligned}$$

Assim, g_n converge para todo $x \in [a, b]$ e segue do Lema 4.9, que a convergência é uniforme, concluindo a demonstração do teorema.

5 APLICAÇÃO

Uma aplicação do Teorema de Arzelà-Ascoli reside no Cálculo das Variações, onde o problema é encontrar uma função que faça com que a área abaixo de sua curva seja mínima ou máxima. Nesses casos, o Teorema de Arzelà-Ascoli é de fundamental importância, já que demonstra a existência de soluções desse tipo.

Desse modo, seja \mathcal{F} o conjunto das funções contínuas $f : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ tais que $f(-1) = f(1) = 1$. A cada função $f \in \mathcal{F}$ associa-se o número $A(f) = \int_{-1}^1 f(x)dx$, a área compreendida entre o gráfico de f e o eixo das abscissas. O problema consiste em achar $f_0 \in \mathcal{F}$ tal que a área $A(f_0)$ seja mínima, isto é, $A(f_0) \leq A(f)$ para toda $f \in \mathcal{F}$.

Com efeito, a sequência de funções $f : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por $f_n(x) = x^{2n}$, pertence ao conjunto \mathcal{F} . Tem-se que a área $A(f_n) = \int_{-1}^1 x^{2n}dx = 2 \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1 = \frac{2}{2n+1}$. Observando o gráfico da Figura 5.1, é possível perceber que a área abaixo da curva dessas funções tende à zero, o que implicaria em $A(f_0) = 0$, pois $A(f_0) \leq A(f)$ para toda $f \in \mathcal{F}$. Por esse motivo, o problema não tem solução, pois se $A(f_0) = 0$, então $f_0 \notin \mathcal{F}$.

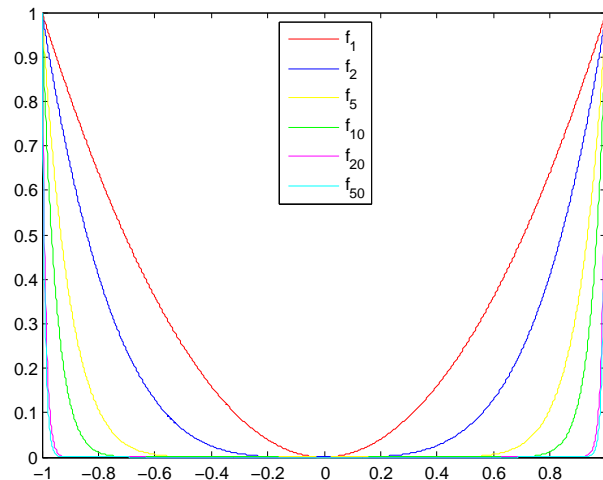


Figura 5.1: Sequência de funções de $f_n(x) = x^{2n}$
Fonte: Autora, 2016.

Uma observação importante a se fazer é que $f_n(x) = x^{2n}$ não é equicontínua, pois é uma subsequência de $f_n(x) = x^n$, que não é equicontínua, conforme provado na Afirmação 4.5.

Nesse contexto, adicionando a condição da equicontinuidade temos o problema: Seja \mathcal{F}_c o conjunto das funções contínuas $f : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ tais que $f(-1) = f(1) = 1$ e $|f(x) - f(y)| < c|x - y|$ para quaisquer $x, y \in [-1, 1]$ e $c > 0$ uma constante fixada. O objetivo é utilizar o Teorema de Arzelà-Ascoli para mostrar que, para cada $c > 0$ dado, existe uma função $f_c \in \mathcal{F}_c$ de modo que $A(f_c) \leq A(f)$ para toda $f \in \mathcal{F}_c$, isto é, a área

$A(f_c)$ é a mínima entre todas as áreas $A(f)$, $f \in \mathcal{F}$.

De fato, seja $\mu_c = \{\inf A(f); f \in \mathcal{F}_c\}$. Pela definição de ínfimo, tem-se que, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $f_n \in \mathcal{F}_c$ tal que $\mu_c \leq A(f_n) < \mu_c + \frac{1}{n}$. Logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} A(f_n) = \mu_c$.

Observe que o \mathcal{F}_c é equicontínuo, pois dado $\epsilon > 0$, existe $0 < \delta < \frac{\epsilon}{c}$, tal que $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < c|x - y| < c \cdot \delta < c \cdot \frac{\epsilon}{c} = \epsilon$. Além disso, as funções de \mathcal{F}_c são uniformemente contínuas, pois pertencem ao intervalo $[0, 1]$. Logo, pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, existe uma subsequência f_{n_i} que convergente uniformemente para f_c em \mathcal{F}_c , em $[-1, 1]$, pois $\lim_{n \rightarrow \infty} A(f_{n_i}) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(f_n) = \mu_c = A(f_c)$, valor mínimo de $A(f)$ para $f \in \mathcal{F}_c$.

Como é possível perceber, a influência da constante c está na inclinação m da reta secante, dada por $m = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$, que se pode comparar à $\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq c$. Desse modo, tem-se os gráficos nos casos de $0 < c < 1$, $c = 1$ e $c > 1$, a seguir:

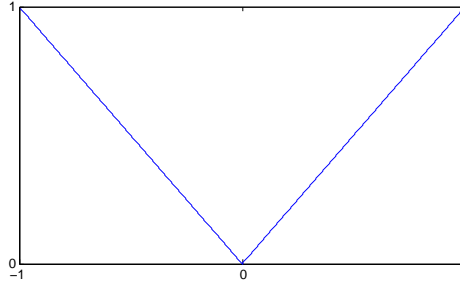


Figura 5.2: **Gráfico do caso $c = 1$**
Fonte: Autora, 2016.

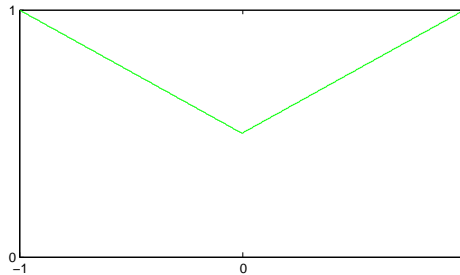


Figura 5.3: **Gráfico do caso $0 < c < 1$**
Fonte: Autora, 2016.

Desse modo, é interessante observar que, inicialmente, quando a sequência de funções não era equicontínua, não existia a garantia de uma função uniformemente convergente que satisfazia as condições dadas, fazendo com que esse seja mais um exemplo de que a sequência de funções apenas ser uniformemente limitadas, não basta, a equicontinuidade é necessária. Outra observação a ser feita, é que, quanto maior o valor de c , menor a área abaixo da curva da f_c , pois c grande, implica em uma maior distância entre $f(x)$ e $f(y)$, mesmo quando $|x - y|$ for pequeno.

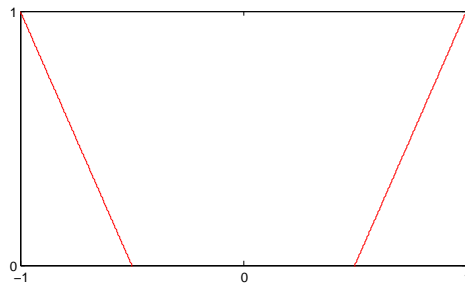


Figura 5.4: Gráfico do caso $c > 1$
Fonte: Autora, 2016.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como já mencionado, na disciplina de Análise Matemática I do curso de Licenciatura em Matemática, são estudadas as sequências e séries numéricas, obtendo resultados importantes, como o Teorema de Bolzano-Weierstrass, o objetivo do trabalho consistiu em conhecer as sequências e séries de funções e suas propriedades, bem como analisar a existência de um teorema análogo ao de Bolzano-Weierstrass aplicado à sequências cujos termos são funções.

Por meio dessa problemática, foi possível realizar um estudo sobre a sequências de funções, analisando dois tipos de convergência: a simples (pontual) e a uniforme, em que a convergência uniforme implica na convergência simples, porém, por meio de um contraexemplo, concluiu-se que a recíproca não é verdadeira. Além disso, verificou-se que a diferença entre esses dois tipos de convergência está na determinação do índice n_0 . Na convergência simples, n_0 depende de ϵ e de x , e na uniforme, apenas de ϵ .

Embora os resultados de séries de funções não tenham colaborado diretamente para o entendimento do Teorema de Arzelà-Ascoli, foi interessante reconhecer em suas propriedades, resultados análogos estudados nas séries numéricas durante a graduação.

Ainda se tratando de analogia, no estudo do Teorema de Arzelà-Ascoli, verificou-se, por meio de um contra-exemplo e da aplicação ao fim do trabalho, a importância de se acrescentar a equicontinuidade como hipótese na obtenção de um teorema análogo ao de Bolzano-Weierstrass para sequências de funções, visto que sem ela, não existe a garantia da existência de uma subsequência convergente, o que pode impedir a resolução de alguns problemas da Matemática, como apresentado na aplicação do teorema.

Além disso, com a pesquisa e o estudo do tema, foi possível adquirir maior maturidade para lidar com demonstrações, visto que, algumas das que foram apresentadas nesse trabalho, não estavam feitas nos livros utilizados. Desse modo, conclui-se que os objetivos do trabalho foram cumpridos, visto que houve um aproveitamento acerca do tema, tanto para a compreensão do Teorema de Arzelà-Ascoli, quanto para o amadurecimento acadêmico, o que auxiliará em outras etapas de construção do conhecimento.

REFERÊNCIAS

BARONI R. L. S.; OTERO-GARCIA, S. C. *Aspectos da história da análise matemática de Cauchy a Lebesgue*. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2014.

FIGUEIREDO, D. G. d. *Análise I*. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

LIMA, E. L. *Análise Real*. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 1993. v. 1.

LIMA, E. L. *Curso de Análise*. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2014. v. 1.

LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2015.