UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CAMPUS TOLEDO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JACKSON LUIS WILLE

POSSIBILIDADES DE USO DA MATEMÁTICA DA MESOPOTÂMIA NO ENSINO BÁSICO

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

TOLEDO
2016

JACKSON LUIS WILLE

POSSIBILIDADES DE USO DA MATEMÁTICA DA MESOPOTÂMIA NO ENSINO BÁSICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Toledo, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Dra. Barbara Winiarski Diesel Novaes.

TOLEDO
2016

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

O Trabalho de Conclusão de Curso intitulado "**POSSIBILIDADES DE USO DA MATEMÁTICA DA MESOPOTÂMIA NO ENSINO BÁSICO**" foi considerado **APROVADO** de acordo com a ata nº __ de 01/12/2016.

Fizeram parte da banca examinadora os professores:

Professora Orientadora: Profa. Dra. Barbara Winiarski Diesel Novaes

Professor: Prof. Ms. Renato Francisco Merli

Professor: Prof. Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan

TOLEDO

2016

Agradecimentos

Tenho como certo que com essas poucas palavras não serei capaz de agradecer devidamente a todos que de alguma forma contribuíram para que este trabalho pudesse ser concluído. Ainda assim, eu gostaria de explicitar minha mais sincera gratidão a algumas pessoas que de forma mais próxima me acompanharam durante toda minha vida acadêmica.

Primeiramente eu gostaria de agradecer a minha esposa Danieli do Pilar Rostirolla Wille por estar sempre ao meu lado, pelo amor, pela paciência e compreensão nesta etapa de nossas vidas, onde sua presença foi imprescindível para a minha graduação. Por me emprestar o seu computador, pois o meu vivia com problemas, sendo de papel fundamental para a finalização deste trabalho e, por entender todas as vezes que estive ausente ou fiquei estudando até mais tarde.

Gostaria de agradecer imensamente a professora Dra. Barbara Winiarski Diesel Novaes, por quem tenho grande admiração, por sua orientação e pela paciência ao tentar entender os meus caprichos para com este trabalho pois, sei que nem sempre me fiz entender e, ainda assim, procurou me auxiliar sempre que possível.

Agradeço aos professores Ms. Renato Francisco Merli e Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan que constituem a banca examinadora, pelos quais tenho muito apreço e, estiveram presentes em grande parte desta caminhada rumo à licenciatura, pela atenção e pelas dicas para a conclusão do trabalho. Aproveito para agradecer ainda todos os demais professores dos quais tive o prazer de ser educando.

Por fim, gostaria de agradecer a todos os amigos que tive o prazer de conhecer durante minha jornada, pois sei que sem eles, com certeza esta caminhada seria bem mais difícil.

RESUMO

A história da matemática vem se consolidando como metodologia no ensino da matemática, talvez, devido ao fato de humanizar uma matéria vista pelos alunos como muito abstrata, mostrando-a como construção humana, seja por meio de fatos históricos, ou ainda, problemas reais da vida prática que necessitavam de solução. O presente trabalho objetiva apontar potencialidades didáticas da História da Mesopotâmia como fonte de estudos e apoio para professores da Educação Básica na elaboração de atividades para as aulas de matemática. Para isso se fez necessária a pesquisa bibliográfica da história da Mesopotâmia (KATZ (2009); BOYER (1974); EVES (2004); ROQUE (2012); GONÇALVES (2012)), bem como, uma análise documental dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), Parâmetros Curriculares do Ensino Médio (PCNEM) e Diretrizes Curriculares Estaduais do Paraná (DCE) no sentido de verificar o que os mesmos dizem sobre a tendência de ensino em questão e a importância da história da matemática na formação dos alunos. A metodologia utilizada faz alusão às Unidades Básicas Problematizadoras (UBP's), teoria esta defendida por MIGUEL e MENDES (2010). Utilizamos as UBP's de forma a explorar, com caráter investigativo, as possibilidades presentes na representação dos tabletes mesopotâmicos e sugerimos quatro atividades para serem utilizadas nas aulas de matemática de acordo com o currículo escolar vigente. Desta forma o professor pode verificar qual tema pretende aprofundar usando estas atividades, tendo autonomia para adaptá-las de acordo com suas necessidades, evitando assim o engessamento das aulas. O estudo aponta possibilidades concretas do uso da História da Mesopotâmia atrelada às metodologias de ensino atuais para o ensino de matemática na educação básica.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; História da Matemática; Mesopotâmia; UBP's.

ABSTRACT

The history of mathematics has been consolidated as a methodology on mathematics teaching, perhaps, by humanizing a theme seen by students as very abstract, showing it as a human construction, through historical facts or real life problems that needed a solution. The present work aims to show the didactic potentialities of the History of Mesopotamia as a source of studies and support to teachers of Basic Education in the preparation of activities for mathematics classes. For that, it was necessary a bibliographical research on Mesopotamia history (KATZ, 2009), BOYER (1974), EVES (2004), ROQUE (2012); GONÇALVES (2012)), as well as a documentary analysis of the National Curricular Parameters (PCN), National Curriculum Parameters for Secondary Education (PCNEM) and the State Curriculum Guidelines (DCE), in the sense of verifying what those documents says about the discussed teaching methodology and the importance of the history of mathematics on the students training. The methodology used here alludes to the Basic Problematization Units (UBPs), defended by MENDES and MIGUEL (2010). We used the UBPs to explore, with investigative character, the possibilities present in the representation of Mesopotamian tablets and we suggest four activities to be used in mathematics classes according to the current school curriculum. On this way, the teacher can verify which theme he/she wants to deepen with these activities, having autonomy to adapt them according to their needs, thus avoiding the plastering of classes. The study points out concrete possibilities of the use of the History of Mesopotamia linked to the current teaching methodologies for mathematics teaching in basic education.

Keywords: Mathematics Teaching; History of Mathematics; Mesopotamia; UBP's.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O pressuposto fundamental que norteia o presente trabalho é considerar a "história como um princípio unificador entre os aspectos cotidianos, escolar e científico da matemática" (MENDES, 2008, p.40). Complementando a ideia, o autor enfatiza que:

> A utilização da História da Matemática surge como uma proposta que procura enfatizar **o caráter investigatório do processo de construção do edifício matemático**, podendo levar os estudiosos dessa área de pesquisa à elaboração, testagem e avaliação de atividades de ensino centradas na utilização de informações históricas relacionadas aos tópicos que pretendem investigar. Ultimamente, o interesse pela História como ferramenta de ensino tem crescido bastante em virtude da busca de contextualização e inserção da Matemática em um meio e em uma época bem definida (MENDES, 2008, p.40, **grifo nosso**)

Neste sentido, as atividades históricas devem ser elaboradas de modo a imprimir maior significação à matemática escolar. O conhecimento histórico, por exemplo, pode estar implícito nos problemas suscitados na atividade ou explícito nos textos históricos resgatados de fontes primárias (textos originais, documentos ou outros artefatos históricos) ou secundárias (informações de livros de História da Matemática ou de livros paradidáticos) (MENDES, 2008, p.40).

As pesquisas sobre a utilização da História da Matemática no ensino possuem autores reconhecidos no Brasil, como Mendes (2008, 2015), Miguel et al (2009), Miguel e Mendes (2010), Mendes e Silva da Silva[1] (2013) mas estes aparentemente não são divulgados com a mesma proporção dos trabalhos com outras tendências, principalmente quando se trata de propostas de ensino com o uso da história da matemática. Verifica-se que tanto as Diretrizes Curriculares Estaduais do Paraná (DCE) quanto os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de matemática apresentam pouco mais do que quatro parágrafos sobre a tendência de ensino História da matemática, o que, quando comparado com as demais tendências descritas nesses documentos, os outros possuem cerca de uma a duas páginas para cada. Por outro lado em vários trechos dos PCN (1997 a), PCNEM (1997 b) e DCE (2008) há alusão a importância da História da Matemática, por exemplo, nos temas transversais, na constituição dos blocos de conteúdos/conteúdos estruturantes ou na formação de habilidades e competências matemáticas na contextualização sócio-cultural no que se refere a "relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade" (BRASIL, 1997b, p.46).

[1] Gostaríamos de agradecer a profa. Dra. Circe Mary Silva da Silva por nos ter indicado o site do Instituto Max Planck por meio do qual tivemos acesso a Biblioteca Cuneiforme Digital (http://cdli.ucla.edu/). Acesso em: 11 de nov. de 2016.

Segundo os PCNEM "a importância da história das Ciências e da Matemática, contudo, tem uma relevância para o aprendizado que transcende a relação social, pois ilustra também o desenvolvimento e a evolução dos conceitos a serem aprendidos" (BRASIL, 1997b, p.54)

Os PCN destacam que

> Ao verificar o alto nível de abstração matemática de algumas culturas antigas, o aluno poderá compreender que o avanço tecnológico de hoje não seria possível sem a herança cultural de gerações passadas. Desse modo, será possível entender as razões que levam alguns povos a respeitar e conviver com práticas antigas de calcular, como o uso do ábaco, ao lado dos computadores de última geração (BRASIL, 1997a, p.42-43)

Nas DCE há uma seção destacando a importância da dimensão histórica da disciplina de matemática e da história da educação matemática no Brasil (PARANÁ, 2008, p.38-46). O recurso a História da Matemática nas aulas de matemática é "componente necessário de um dos objetivos primordiais da disciplina, qual seja, que os estudantes compreendam a natureza da Matemática e sua relevância na vida da humanidade" (PARANÁ, 2008, p. 66).

Dentre os vários episódios e usos da matemática ao longo dos tempos, ficamos seduzidos pelos primeiros registros escritos dos povos babilônios da antiga Mesopotâmia. A geometria do recorta e cola, as primeiras escritas numéricas, o sistema sexagesimal, a resolução de problemas práticos, são alguns notáveis exemplos. Sem querer emitir julgamento, nos questionamos: Como conseguiram estruturar tão bem a matemática em tempos tão remotos? Segundo os PCN (BRASIL, 1997a, p. 132):

> A compreensão da relação entre as unidades de tempo hoje utilizadas fica mais clara quando se retomam alguns aspectos históricos das medidas: em 2000 a.C. os babilônios já adotavam seu ano, como período de 360 dias. Eles escolheram como base do seu sistema de numeração o número 60 (divisor de 360), e isso se mantém até hoje na nossa contagem de tempo: 1 hora eqüivale a 60 minutos e 1 minuto a 60 segundos.

Sendo assim, procuraremos explorar um pouco sobre as práticas matemáticas da região da Mesopotâmia. Segundo Gonçalves (2012) há milhares de tabletes cuneiformes espalhados nos museus[2] em várias partes do mundo, entre eles vários matemáticos que

> são provenientes, em sua maior parte, de estratos arqueológicos que datam do período babilônico antigo[3] (2000-1600 a.E.C[4].). Os tabletes que datam de outros

[2] Para maiores informações sobre os tabletes acessar a Biblioteca Digital Cuneiforme em: http://cdli.ucla.edu/ . Acesso em: 17 nov. de 2016.

[3] De diversas cidades, como Babilônia, Uruk, Larsa e Nipur (GONÇALVES, 2012, p.323)

[4] Alguns autores utilizam a.E.C. (antes da era comum) e outros a.C (antes de Cristo).

> períodos, desde o terceiro milênio até o período selêucida, guardam muitas semelhanças com os paleo-babilônicos. Assim, no texto que segue, quando quisermos nos referir a tabletes e à matemática do período babilônico antigo, falaremos de ‘tabletes babilônicos’ e ‘matemática babilônica’. Quando quisermos enfatizar uma certa estabilidade das práticas matemáticas na região da Mesopotâmia ao longo dos três milênios a.E.C., usaremos o adjetivo ‘mesopotâmico’.

Desta forma, como não nos prendemos ao período babilônico, nossa opção foi utilizar o termo Matemática Mesopotâmica. Nos propusemos a problematizar atividades para as aulas de matemática da educação básica utilizando a matemática Mesopotâmica e que pudessem ser adaptadas de forma conveniente pelo professor.

A partir dos pressupostos balizadores da pesquisa como a História da Matemática, o ensino da Matemática por meio de atividades, os PCN, PCNEM e DCE, a questão norteadora do trabalho é: Quais as potencialidades didáticas da História da Mesopotâmia como fonte de estudos e apoio para professores da Educação Básica na elaboração de atividades para as aulas de matemática?

Com base na questão norteadora, tem-se como objetivo geral, apontar potencialidades didáticas da História da Mesopotâmia como fonte de estudos e apoio para professores da Educação Básica na elaboração de atividades para as aulas de matemática.

Para alcançar o objetivo geral, cumprimos os seguintes objetivos específicos:

- Realizar uma pesquisa documental sobre a Matemática Mesopotâmica visando embasar teoricamente as atividades de ensino.
- Utilizar os tabletes matemáticos da Mesopotâmia para elaborar atividades matemáticas a serem utilizadas por professores como fonte de estudos e apoio didático nas aulas de matemática.

1.1 JUSTIFICATIVA PESSOAL

Sempre gostei das “aulas diferentes” de matemática, pois apesar de me identificar com a matéria pensava que passado algum tempo ela se tornava exaustiva e maçante com suas pequenas definições e exercícios infindáveis. Sendo assim, parecia que faltava algo que chamasse a atenção para me motivar a estudá-la de novo.

Além das aulas de matemática, também me interessava muito pela história, principalmente os conteúdos que estudavam a antiguidade. Eram meus capítulos favoritos do livro. O meu gosto pela história antiga era tanto que em certo momento fiquei realmente em dúvida sobre qual curso superior deveria fazer.

Gradualmente passou a ser meu passatempo buscar em livros de outras matérias pequenos trechos históricos sobre os conteúdos estudados ou que estudávamos para lê-los. Geralmente eles vinham em forma de apêndices descritos como curiosidades e que dificilmente eram abordados pelos professores em sala de aula. Era comum no começo do ano eu pegar todos os livros para procurar tais curiosidades e também os quadrinhos presentes principalmente nos livros de português. Isso não era diferente com a matemática. Muitos livros traziam pequenas historinhas sobre matemáticos famosos, seus feitos ou supostos feitos, tendo em vista que não se tem certeza de que certos personagens realmente tenham existido. Foi assim que passei a conhecer a história de Arquimedes e a coroa do rei; a sociedade secreta dos pitagóricos; entre outras passagens da história da matemática. Também me interessavam muito os vestígios históricos, não somente sobre a matemática, mas qualquer coisa que poderia indicar a forma de pensamento das sociedades antigas. Alguns exemplos disso são os papiros do Egito e os tabletes de argila encontradas na região da Mesopotâmia que de certa forma viriam a fazer parte deste trabalho de conclusão de curso.

O tema matemática da Mesopotâmia foi escolhido principalmente pelo gosto e admiração pela mesma. Dificilmente o tema é lembrado e abordado em sala de aula, ainda que a civilização mesopotâmica tenha contribuído de forma significativa para a matemática e outras áreas, apesar do peso histórico das contribuições deste povo para o desenvolvimento do que entendemos hoje por Matemática.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho foi dividido basicamente em cinco partes, sendo a primeira delas a introdução que buscou principalmente evidenciar a temática, os objetivos e justificá-lo, como já fora visto.

A segunda parte denominada “Potencialidades didáticas da história da Mesopotâmia” trata basicamente do referencial teórico necessário sobre a história da matemática mesopotâmica. Começamos o capítulo procurando apresentar e situar a região mesopotâmica e discorremos brevemente ainda sobre os objetos que possibilitam os estudos sobre os mesopotâmicos e a forma como vêm sendo interpretadas ao longo do último século.

Como subtópicos, apresentamos inicialmente as características da escrita mesopotâmica, seu sistema numérico e um exemplo de tábuas comumente utilizadas no dia a dia e como aconteciam as operações de multiplicação e divisão. Em seguida, explicitamos algumas aplicações geométricas encontradas nos tabletes, comparando métodos de resolução destes problemas com as nossas atuais fórmulas. Falamos ainda um pouco sobre o gerador de tantas dúvidas sobre a natureza das resoluções mesopotâmicas, o conteúdo que atualmente poderia ser traduzido como equações quadráticas e sistemas de equações, mostrando também os métodos utilizados para a resolução dos mesmos. Por fim, escrevemos um pouco sobre o cálculo de raízes quadradas o que muitos consideram como a mais icônica tábua mesopotâmica, a Plimpton 322.

A terceira parte deste trabalho remete ao que diz respeito às opções metodológicas em relação à história da matemática utilizadas na construção das atividades propostas no quarto capítulo.

Pesquisamos também o que dizem os parâmetros curriculares e as diretrizes em relação à História da Matemática enquanto tendência metodológica.

A quarta parte deste trabalho traz as atividades por nós pensadas considerando as opções metodológicas deste trabalho, totalizando ao todo quatro atividades.

Por fim, temos no quinto capítulo, as nossas considerações finais sobre toda a pesquisa e elaboração das atividades, além de, alguns pensamentos acerca de como a história da matemática influencia no aprendizado e no decorrer das aulas.

2. POTENCIALIDADES DIDÁTICAS DA HISTÓRIA DA MESOPOTÂMIA

Neste capítulo procuramos expor os principais aspectos da matemática praticada pela civilização mesopotâmica, que vieram a servir como inspiração na criação das posteriores atividades. Obviamente ainda não se sabe tudo sobre este povo, pois segundo Gonçalves (2012) tábuas continuam sendo encontradas e traduzidas, porém, buscamos o que em consenso com diferentes livros já se pode considerar conhecido.

Verificamos quão grandioso era o conhecimento e a habilidade com a matemática presente no povo que residia nesta região, levando em consideração a época cronológica. Possivelmente, mesmo o Egito não teria se desenvolvido matematicamente, ou nas demais áreas, tanto quanto a mesopotâmia, a ponto de por muito tempo se acreditar que os mesmo utilizavam de algo tão contemporâneo como a álgebra.

2.1 HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA DA MESOPOTÂMIA

Considerada uma das mais antigas da humanidade, a civilização mesopotâmica se desenvolveu entre os rios Tigre e Eufrates em algum momento no quinto milênio a.C. (KATZ, 2009, p.10). Esta região, hoje, corresponderia ao Iraque. Usualmente a população que habitava a Mesopotâmia é denominada como babilônica[5] porém como diz Eves (2004, p.59): "Deve-se entender que se usa o termo descritivo babilônico meramente por conveniência, pois além dos babilônios, como os sumérios, os acadianos, os caldeus, os assírios e outros povos antigos habitaram a área".

[5] Lembrando que Gonçalves (2012) define o período babilônico antigo entre (2000-1600 a.E.C.). Analisando as DCE e os PCN verificamos que os dois documentos só fazem referência a matemática do povo Babilônio.

-

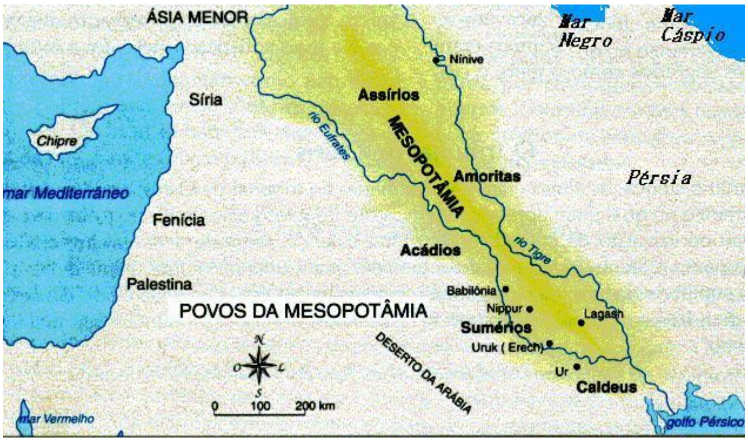


Figura 1- Região Mesopotâmica

Fonte: Google imagens[6].

O desenvolvimento da escrita na região da Mesopotâmia segundo Katz (2008) teria acontecido ao mesmo tempo em que na região do Egito durante o quarto milênio a.C. Segundo Boyer (1974, p.18) o "tipo de escrita cuneiforme desenvolvido pelos sumérios durante o quarto milênio, muito antes dos dias de Abraão, pode ser a mais antiga forma de comunicação escrita". Para Katz (2008, p.11) a escrita se inicia com a necessidade de contabilidade, de gravar para recordar, e gerir trabalhos e fluxo de mercadorias.

Diferente dos egípcios que utilizavam o papiro[7] que facilmente se perdiam devido às mais diversas causas, é possível se ter mais dados quanto à escrita e a matemática dos povos da Mesopotâmia. Isso se dá porque estes povos utilizavam tabletes para fazer seus registros que eram "mais ou menos do tamanho de uma mão e é feito de argila em geral não cozida" (AABOE, 2013, p.2). Entre as centenas de milhares de tabletes encontrados há alguns milhares de tabletes matemáticos (GONÇALVES, 2012, p. 323). Katz (2008) diz que somos afortunados por estes tabletes serem quase indestrutíveis já que é nossa única fonte sobre a matemática da Mesopotâmia. Na Figura 2, podemos observar o tablete denominado Plimpton 322.

---

[6] Disponível em: <http://www.jurassico.com.br/wp-content/uploads/2010/03/imagem2.jpg>, Acessado em 19 nov. de 2016.

[7] Planta cujas folhas eram sobrepostas e trabalhadas para que pudessem ser usadas para registrar textos em contas do império.

Figura 2 - Exemplo de tablete mesopotâmico

Fonte: Biblioteca Digital Cuneiforme em: http://cdli.ucla.edu/.[8]

Mas afinal, onde podemos encontrar estes tabletes? Segundo Roque (2012, p.36-37):

> Os tabletes que nos permitem conhecer a matemática mesopotâmica encontram-se em museus e universidades de todo o mundo. Eles são designados por seu número de catálogo em uma determinada coleção. Por exemplo, o tablete YBC 7289 diz respeito ao tablete catalogado sob o número 7289 da coleção da Universidade Yale (Yale Babilonian Collection). Outras coleções são: AO (Antiquités Orientales, do Museu do Louvre); BM (British Museum); NBC (Nies Babylonian Collection); Plimpton (George A. Plimpton Collection, Universidade Columbia); VAT (Vorderasiatische Abteilung, Tontafeln, Staatliche Museen, Berlim).

Uma discussão bastante pertinente em relação a recepção da Matemática da Mesopotâmia pela historiografia é pensar que ela não é livre de interpretações. Segundo Roque (2012, p.34):

> Em trabalhos renomados, como os de O. Neugebauer, nos anos 1930 e 40, e de B.L. van der Waerden, nas décadas de 1950 a 1980[9], chegou-se a postular que as receitas aritméticas usadas pelos mesopotâmicos eram uma álgebra e podiam ser facilmente traduzidas por equações. Tal interpretação se baseia em uma tradução anacrônica de seus procedimentos, anacronismo que também se verifica em relação aos egípcios.

Em pesquisas recentes, Gonçalves (2012) apresenta algumas indicações sobre esta recepção e divide-o em três tempos. O autor primeiramente explicita que o modelo de interpretação criado por Otto Neugebauer (1935-1937) e por François Thureau-Dangin

[8] Acessado em: 17 de novembro de 2016.

[9] Para verificar a lista completa de obras publicadas por estes autores ver GONÇALVES (2012).

(1938), na qual defende-se que os textos matemáticos cuneiformes possuem uma linguagem algébrica foi por muito tempo aceito como correto. Porém, na década de 1990 uma nova vertente passou a ganhar força, onde uma nova interpretação que não recorre à linguagem algébrica para o entendimento dos textos desenvolveu-se e tornou-se por fim predominante. Esta interpretação, após anos de estudo, partiu de uma compreensão mais aprofundada das línguas em que os mesopotâmios haviam expressado seus conhecimentos matemáticos e entendendo que, as resoluções encontradas nos tabletes possuem alto teor geométrico. Neste sentido os principais defensores da nova interpretação, Jens Hoyrup e Joran Friberg, criaram os termos "geometria do recorta e cola[10]" e "tradução conforme", sendo o primeiro referentes às movimentações de entes geométricos para a resolução de problemas que outrora foram entendidos como algébricos. O segundo faz alusão à forma de se lidar com os textos, em que se mantêm na linguagem moderna as características e evidências do pensamento matemático utilizado pelos escribas mesopotâmicos. Atualmente o campo da história da matemática mesopotâmica segue três direções, ou tempos.

O primeiro tempo seria referente à ampliação do conhecimento técnico e de linguagem que já se tem dos tabletes matemáticos. O segundo tende a caminhar para o entendimento do corpo textual matemático, articulando primeiramente com suas características e, em um segundo momento, com outros corpos textuais.

A terceira vertente atual de estudo dos textos matemáticos mesopotâmicos busca não os entender como uma unidade indissolúvel, mas como um conjunto de práticas que tiveram variações regionais. Nesta linha de raciocínio se encontram atualmente o próprio Gonçalves (2012), além de, o projeto de pesquisa *Mathematical Sciences in the Ancient World* (SAW 2012), financiado pelo *European Reseach Council*.

Esclarecidos os pressupostos e opções teóricas iniciais, nas próximas subseções elegemos algumas histórias e situações da matemática Mesopotâmica que consideramos ter grande potencial de exploração nas aulas de matemática.

2.1.1 A ESCRITA E AS TÁBUAS DE MULTIPLICAÇÃO

Segundo Katz (2008, p.12) os mesopotâmios utilizavam, por vezes, diferentes sistemas de números, porém o sistema padrão utilizado pelos antigos escribas da "Antiga Babilônia" era um sistema de base sexagesimal posicional, agrupados em grupos de base 10 para representar os números até 59 conforme figura 3.

[10] O termo foi criado para que não fosse confundido com a geometria euclidiana (ROQUE, 2012).

Figura 3- Sistema de base sexagesimal

Fonte: ROQUE (2012, p.49)

Eves (2011) diz que mesmo as tábuas mais antigas mostram grande habilidade com operações aritméticas, o que deixaria evidente que o sistema sexagesimal posicional já estava estabelecido e consolidado de longa data. Segundo Roque (2012, p.46) “o sistema sexagesimal posicional usado no período babilônico, deve ter surgido da padronização desse sistema numérico, antes do final do terceiro milênio a.C”.

A escrita dos mesopotâmicos, assim como os números, é chamada de cuneiforme devido à forma literalmente de cunha.

Figura 4 – Escrita em forma de cunha.

Fonte: KATZ (2009, p. 13)

Os símbolos são feitos com marcações simples em formato de cunha sobre um tablete enquanto ele ainda estava úmido (AABOE, 2013, p.2). Assim temos uma cunha vertical para representar 1 e, outra um pouco mais inclinada para representar 10 , então, os números até 59 são representados através do agrupamento destas cunhas.

A partir do número 59 os babilônios utilizavam um sistema de posição, onde os números multiplicavam potências de base 60, sendo esta, para Roque (2012, p.50) uma grande diferença entre o sistema numérico desta civilização e o nosso, pois, os babilônios "empregavam um sistema aditivo para formar combinações distintas de símbolos que representam os números de 1 a 59" passando então a utilizar o sistema de posição "enquanto o nosso utiliza símbolos diferentes para os números de 1 a 9 e, em seguida, passa a fazer uso de um sistema posicional" (ROQUE, 2012, p.50). Portanto, usando o sistema de numeração decimal, no número 125, o algarismo 1 representa 100, enquanto o 2 representa 20 e, por fim, o 5 representa 5, o que pode ser traduzido como $1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0 = 125$, o mesmo raciocínio vale para os número que além de uma parte inteira contenham uma parte fracionária, como por exemplo o número 12,5, que pode ser escrito como $1 \times 10^1 + 2 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1}$. De forma geral, qualquer número N decimal pode ser escrito da seguinte forma:

$$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_0 10^0 + a_{-1} 10^{-1} + \cdots a_{-m} 10^{-m} \ldots$$

Significando então "$a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_0 10^0$" a parte inteira, e "$a_{-1} 10^{-1} + \cdots a_{-m} 10^{-m}$ ..." a parte fracionária, onde as reticências no final indicam que o número pode não ter representação finita, como por exemplo, uma dízima periódica.

Neste sentido, Roque (2012, p.50-51) diz que, para representarmos um número qualquer N em uma base qualquer b, escrevemos:

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_0 b^0 + a_{-1} b^{-1} + \cdots a_{-m} b^{-m} \ldots$$

Onde "$a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_0 b^0$" será a parte inteira deste número e "$a_{-1} b^{-1} + \cdots a_{-m} b^{-m}$ ..." a parte fracionária, geralmente no sistema decimal, separados pelo símbolo ",".

Portanto para entendermos o funcionamento do sistema utilizado pelos mesopotâmicos basta considerar $b = 60$. Como na base 60, pode-se ter em cada posição algarismos de 1 a 59, para facilitar a compreensão na notação moderna utilizaremos o símbolo "," para separar as posições inteiras e, o símbolo ";" para representar as posições fracionárias. Por exemplo, o número 13.329 seria escrito da seguinte forma, $3 \times 60^2 + 42 \times$

$60^1 + 9 \times 60^0$, o que em notação atual podemos representar como 3,42,09 (KATZ, 2008, p.12).

Segundo Katz (2008, p.12) os babilônios antigos não utilizavam um símbolo para representar o zero, porém costumavam deixar um pequeno espaço interno caso o número não necessitasse de uma potência em particular. Isto poderia gerar algumas confusões pois não haviam espaços no fim do número, por exemplo, ficava muito difícil de diferenciar o número $3 \times 60^1 + 42 \times 60^0$ (3,42) do número $3 \times 60^2 + 42 \times 60^1 + 0 \times 60^0$ (3,42,00). Katz (2008) ainda afirma que somente às vezes, os babilônios colocavam uma palavra específica logo após o número que indicaria exatamente a qual posição ele pertencia. Já Roque (2012, p.41) faz a seguinte afirmação:

> O segundo período babilônico de que temos evidências ocorreu por volta do ano 300 a.E.C.,época do império selêucida, no qual a astronomia estava bastante desenvolvida e empregava técnicas matemáticas sofisticadas. Isso mostra que o conhecimento da matemática da antiga Babilônia não foi perdido desde o ano 1600 a.E.C. até perto do início da nossa era. [...] Os astrônomos selêucidas, talvez pela necessidade de lidar com números grandes, chegaram a introduzir um símbolo para designar o zero, ou melhor, uma coluna vazia. No caso de 3.601, escrevia-se 1; separador; 1. O separador era simbolizado por dois traços inclinados. (ROQUE, 2012, p.41)

Por outro lado para Katz (2008) esta civilização nunca utilizou um símbolo para representar o zero no sentido de "nada" enquanto quantidade, o que na notação moderna é muito comum e pode ser considerado sinônimo de ausência de algo, ou, coisa nenhuma.

Os povos mesopotâmicos teriam escrito diversas tábuas com conteúdos matemáticos diferentes, dentre elas podemos citar tabletes contendo tabelas de multiplicação, de recíprocos, problemas, e o que posteriormente seria chamada de triângulos pitagóricos, porém segundo Katz (2008, p.12) não existe nenhuma tábua contendo métodos aditivos, o que significaria que os escribas os saberiam bem o suficiente para que escrevessem facilmente as respostas quando necessário. Ele ainda afirma que como o sistema era sexagesimal os tabletes de multiplicação costumavam ser bastante extensos.

O que nos interessou inicialmente neste trabalho são os tabletes de multiplicação e de recíprocos. Então, como seriam estes tabletes? Visualizemos na figura 5:

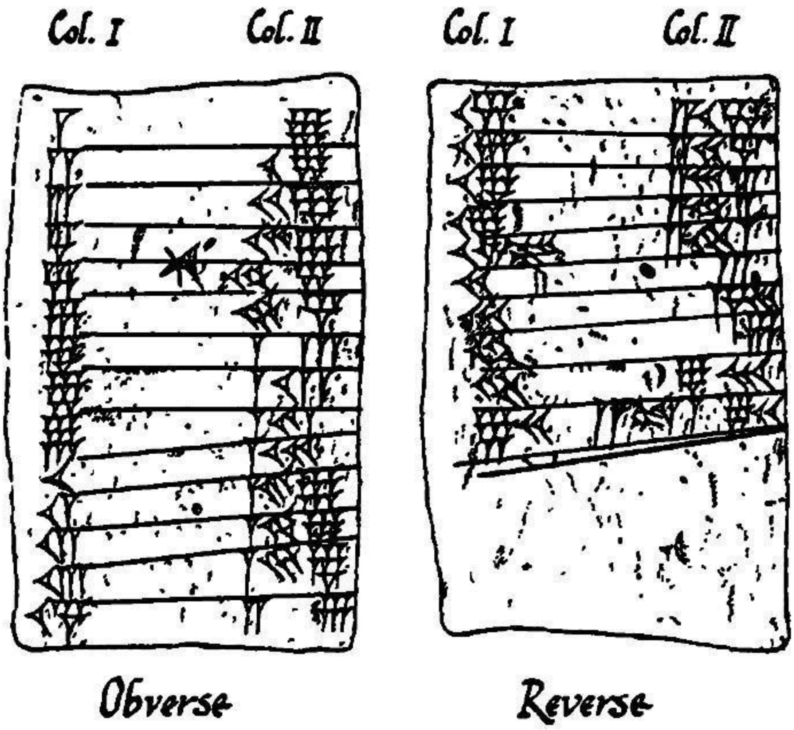


Figura 5 - Tablete de multiplicação

Fonte: KATZ (2009, p. 13)

Após uma rápida análise do tablete acima se verifica que na coluna I encontra-se os números de 1 à 19, depois temos em sequência os números 20, 30, 40, 50. Já a coluna II inicia-se com o número 9, depois 18 e seguem em múltiplos de 9. Conclui-se que o tablete se trata de uma tabela da multiplicação por 9, onde na primeira coluna temos os números a serem multiplicados e na segunda coluna temos os resultados da multiplicação. O fato de na coluna I encontrarmos os números de 1 a 19 e depois os números 20, 30, 40 e 50 pode dever-se ao fato de que como a base utilizada é a base 60, o conteúdo do tablete seria muito extenso. Além do que, para encontrarmos o resultado da multiplicação de 56 por 9 por exemplo, basta sabermos o resultado da multiplicação de 50 por 9 e de 6 por nove, pois quando os somamos, encontramos o resultado inicialmente pretendido. Este raciocínio ajuda a diminuir o conteúdo dos tabletes e é razoável, pois como já fora dito anteriormente os babilônios não tinham dificuldades com a soma.

Além das tábuas de multiplicação, existiam vários tabletes de recíprocos. Assim como os tabletes de multiplicação, os recíprocos também eram compostos por duas colunas de números sexagesimais regulares cujo dois números de cada linha quando multiplicados resultam em 1, o que na numeração babilônica pode representar qualquer potência de 60. Por exemplo, o recíproco de 2 é 30, pois 60 dividido por 2 tem como resultado 30, assim como o recíproco de 3 é 20 pois, 60 dividido por 3 resulta em 20 e assim por diante. Por outro lado não há determinado em nenhuma tábua o recíproco de 7 pois, como foi dito antes, as tábuas de recíprocos continham números sexagesimais regulares, o que não é o caso de 7, pois não há representação sexagesimal regular para este número.

Um exemplo de como se comportaria uma tábua de recíprocos cujos números estão em base sexagesimal pode ser verificado na seguinte tabela:

1	1
2	30
3	20
4	15
5	12
6	10
8	7;30
9	6;40

Quadro 1- Tabela com recíprocos.
Fonte: Os autores.

As tábuas de multiplicação e de recíprocos eram utilizadas juntas para realizar divisões (KATZ, 2008, p.14). O que é verificado ao olharmos para as tábuas de recíprocos é outra fonte de confusão para os tradutores, uma vez, que os babilônios também trabalhavam com números muito pequenos, tendo que ser estes entendidos de forma semelhante à multiplicação, porém, como divisões por potências de base 60. O grande problema é que os mesopotâmicos não tinham um símbolo para diferenciar um número que deveria ser multiplicado por potências de base 60 ou dividido por potências de 60 e escreviam esses números de tal forma que uma mesma sequência de símbolos poderia representar dois números completamente distintos, cabendo então ao tradutor identificar o contexto e descobrir o número que está representado.

2.1.2 APLICAÇÕES GEOMÉTRICAS

Segundo Eves (2004, p.60) a geometria babilônica estaria intimamente ligada à mensuração prática. Sendo assim, esta civilização desenvolveu diversos procedimentos para o cálculo de áreas e volumes de diversas formas de figuras utilizando seu sistema de numeração sexagesimal (KATZ, 2009, p.14). Ainda Eves (2004, p. 60) diz que por volta de 2000 a.C. à 1600 a.C. os babilônios já estavam familiarizados com as regras gerais do cálculo da área do triângulo retângulo e isósceles, da área de um trapézio retângulo, e ainda, do volume do paralelepípedo reto-retângulo e do prisma de base trapezoidal.

Porém, Katz (2009, p.16) afirma que, assim como os egípcios, os babilônios não tinham nenhum documento onde se explicitava a fórmula para o cálculo do volume de uma pirâmide mesmo sabendo que os mesmos construíram estruturas piramidais. De toda sorte, havia em algumas tábuas problemas que envolviam uma grande pilha no formato aproximado de uma pirâmide retangular com o topo alongado, como se fosse um telhado (Figura 6).

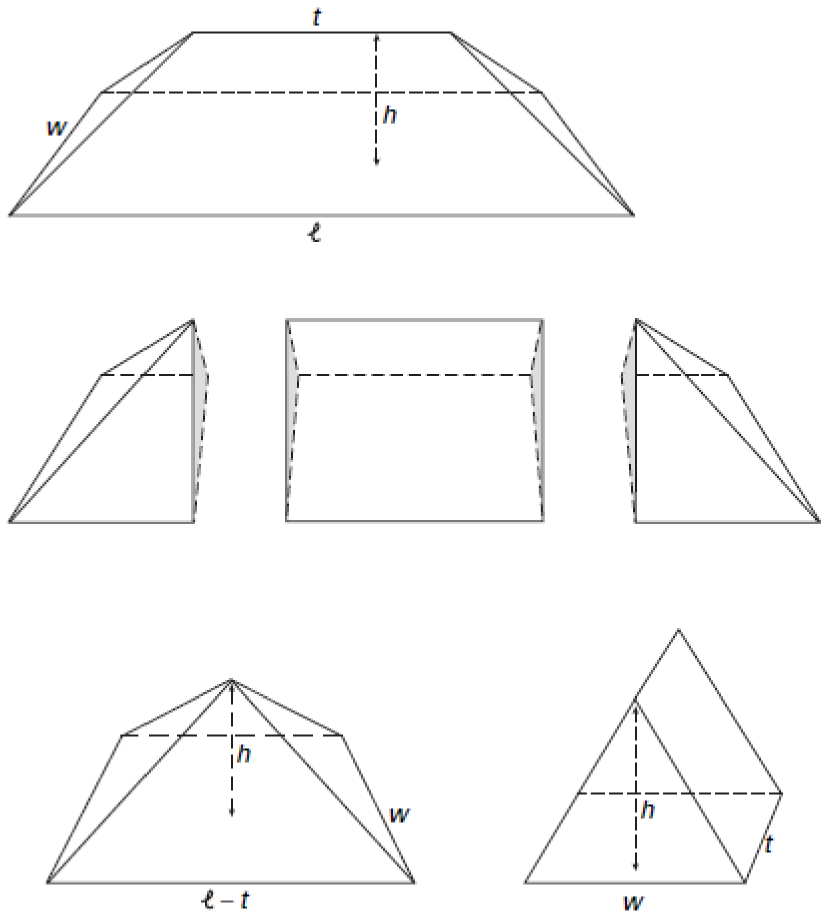


Figura 6 - Pilha no formato de telhado.

Fonte: KATZ (2009, p. 17)

O método de resolução empregado corresponde a atual fórmula:

$$V = \frac{hw}{3}(l + \frac{t}{2})$$

onde, l é o cumprimento do sólido, w é a largura, h é a altura e, t é o comprimento do topo. Esta fórmula poderia ser obtida quebrando este sólido em um prisma triangular e, duas metades de uma pirâmide retangular em cada lado. Assim, o volume deste sólido era calculado como o volume de um prisma triangular somado o volume de uma pirâmide retangular. Assume-se assim que os babilônios tinham total conhecimento da fórmula do cálculo do volume de uma pirâmide.

Em seu livro Katz (2009, p.17), diz que esta conclusão é ainda mais convincente por que existe uma tábua dando a fórmula correta para se calcular o tronco de uma pirâmide de base quadrada de área a^2, topo quadrado de área b^2, e altura h na forma $V = \left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right] h$.[11] Para se ter então a fórmula para o cálculo da pirâmide completa, basta se considerar $b = 0$.

Existem ainda algumas tábuas onde o tronco da pirâmide é calculado pela seguinte regra $V = 1/2(a^2 + b^2)h$, que é uma simples, porém errada, generalização para o cálculo da área do trapézio.

Além disso, segundo Eves (2004, p.61), outras conjecturas já haviam sido feitas:

> Considerava-se uma circunferência como o triplo de seu diâmetro e a área do círculo como um duodécimo da área do quadrado de lado igual a circunferência respectiva (regras corretas para π =3) e se obtinha o volume de um cilindro circular reto como o produto da base pela altura. O volume de um tronco de cone e o de um tronco de pirâmide quadrangular regular eram calculados erroneamente como o produto da altura pela semi soma das bases. Os babilônios também tinham conhecimento de que os lados correspondentes de dois triângulos retângulos semelhantes são proporcionais, que a perpendicular baixada do vértice de um triângulo isósceles em que incidem os lados congruentes divide ao meio a base e que um ângulo inscrito numa semicircunferência e reto. E também conheciam o teorema de Pitágoras. Há uma tabula recentemente descoberta na qual se usa 3 1/8 como estimativa para π. (EVES, 2004, p.61).

Segundo Roque (2012, p. 85):

> Seria um tremendo anacronismo dizer que os povos mesopotâmicos e egípcios já possuíam uma estimativa para π, pois esses valores estavam implícitos em operações que funcionavam, ao invés de serem expressos por números considerados constantes universais, como em nossa concepção atual sobre π.

Falando mais sobre o círculo (KATZ, 2009, p. 15), atualmente tomamos o raio r como componente da circunferência e, a partir dele, aplicamos fórmulas para o cálculo da área, em

[11] Retirada de KATZ (2009, p. 17).

termos de r. Porém, os babilônios tomavam a circunferência como componente do círculo, ou seja, encontravam a área e os demais componentes do círculo partindo do comprimento da circunferência, atribuindo para ele dois coeficientes fixos, 0;20[12], o equivalente a $(1/3)$, para os diâmetro e, 0;05, o equivalente a $(1/12)$, para a área. Sendo assim, o primeiro coeficiente significaria que o diâmetro corresponde a um terço da circunferência, enquanto o segundo significaria que a área é um doze avos do quadrado da circunferência.

KATZ (2009, p.16) ainda afirma que os babilônios teriam coeficientes para outras figuras formadas por arcos circulares, como por exemplo, o que em inglês seria conhecido como "*barge"*, formado por dois quartos de circunferência, e ainda, a figura conhecida como olho de touro, formada por dois arcos formados pela terço de uma circunferência, respectivamente representados na figura 7.

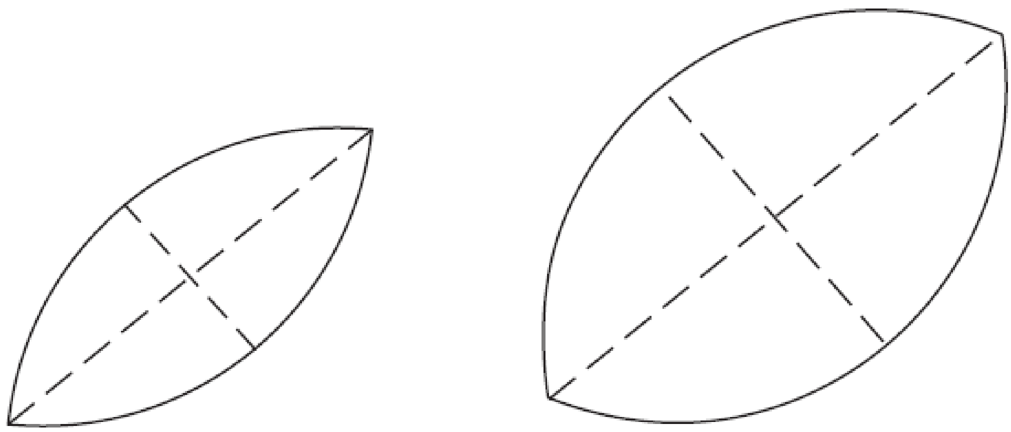


Figura 7 – Barge e Olho de Touro respectivamente.

Fonte: (KATZ, 2009, p. 16)

De forma análoga ao círculo, os componentes que definiram essas figuras foram arcos que geram os lados. O coeficiente utilizado para o cálculo da área do "*barge*" é 0;13,20 $(2/9)$, enquanto o do "olho de touro" é 0;16,52,30 $(9/32)$. Desta forma, a área destas duas figuras são calculadas como $(2/9)a^2$ e $(9/32)a^2$ respectivamente, onde, a corresponde ao comprimento do arco. Neste caso os resultados são precisos, desde que se assuma que a área do círculo é dada por $C^2/2$ e que $\sqrt{3} = 7/4$ (KATZ, 2009, p.16).

Segundo KATZ (2009,p.16), de forma bastante semelhante, o coeficiente da área do quadrado côncavo é 0;26,40 $(4/9)$, onde, o componente que o define é um dos quatro quartos de círculo, formando assim a fronteira da região (figura 7).

12 Notação na Base sexagesimal.

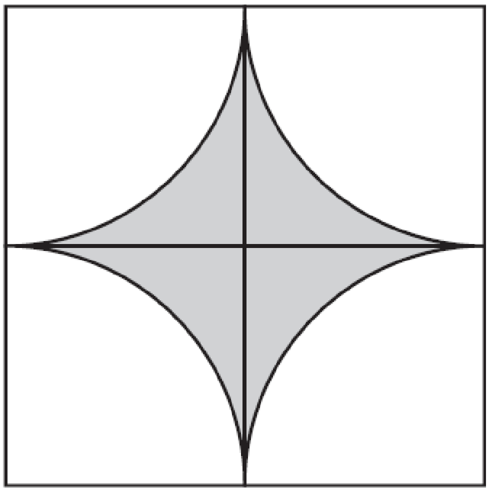


Figura 8- Quadrado côncavo

Fonte: (KATZ, 2009, p. 16)

Katz (2009, p.16) afirma que, "o uso destes coeficientes mostra que os escribas perceberam que estes comprimentos de linhas particulares em dadas figuras eram proporcionais ao comprimento do componente que as define"[13], e ainda que, "a área era proporcional ao quadrado deste componente"[14].

2.1.3 RESOLUÇÕES DE EQUAÇÕES

Segundo KATZ (2009) os babilônios desenvolveram um procedimento para a mensuração de campos ou projetos de obras públicas chamado de "*cut-and-paste*" a qual chamaremos de corta e cola[15], no qual, por meio da manipulação de retângulos e quadrados não somente se fez possível o cálculo de raízes quadradas e equações, mas também o que mais tarde viria ser chamado de triplas pitagóricas.

Katz (2009) ainda afirma que problemas que atualmente recaem em equações são frequentes em tabletes babilônicos. Os problemas que podem ser hoje entendidos como equações lineares do tipo $ax = b$, eram facilmente resolvidos utilizando as tábuas de inversos, porém, há ainda registros de problemas um pouco mais complexos que recaem em

[13] Versão original: the use of these coefficients shows that the scribes recognized that lengths of particular lines in given figures were proportional to the length of the defining component.
[14] Versão original: the área was proportional to the square of that component
[15] J. Høyrup, nos anos 1990, com base em novas traduções dos termos que aparecem nos registros. Ele mostrou que a "álgebra" dos babilônicos estava intimamente relacionada a um procedimento geométrico de "cortar e colar". Logo, tal prática não poderia ser descrita como álgebra, sendo mais adequado falar de "cálculos com grandezas" (ROQUE, 2012, p.39).

um sistema de duas equações lineares, onde assim, como os egípcios, os babilônios usavam o método do falso *pivot*.

Este método consiste em assumir valores falsos para a solução e depois ajustá-los de forma que se encontre o resultado correto, como podemos ver no problema seguinte, adaptado de Katz (2009, p.22).

Um de dois campos rende 2/3 *sila per sar*, o segundo rende 1/2 *per sar*, onde *sila* e *per sar* são unidades de medida de capacidade e de área respectivamente o rendimento do primeiro campo é 600 *sila* a mais que o segundo; a área dos dois campos juntos é 1950 *sar*. Quão grande é cada campo?

Este problema pode ser atualmente traduzido em um sistema de duas equações e duas incógnitas onde x e y podem representar as áreas desconhecidas:

$$\begin{cases} 2/3x - 1/2y = 600 \\ x + y = 1950 \end{cases}$$

Uma das formas modernas de se resolver este problema poderia ser isolar o valor de x na segunda equação e substituir na primeira. Porém, os babilônios assumiam inicialmente que os valores de x e y eram iguais a 975. Eles então calculavam $2/3 \times 975 - 1/2 \times 975 = 162{,}5$. A diferença entre o desejado 600 e o encontrado 162,5 foi de 437,5. Para ajustar a resposta os escribas babilônios provavelmente perceberam que a cada unidade acrescida em x deveria ser retirada do valor de y, o que resultava em um aumento na "função" $2/3x - 1/2y$ de $2/3 + 1/2 = 7/6$. Eles agora apenas teriam que resolver a equação $7/6s = 437{,}5$ para ter o incremento necessário $s = 375$. Adicionando 375 a 975 temos o valor de $x = 1350$ e subtraindo temos $y = 600$, que são as respostas corretas.

Katz (2009. p.23) afirma que as tábuas envolvendo sistemas de equações eram um tanto quanto raras, porém, existem várias que podem ser traduzidas em equações quadráticas.

Os procedimentos utilizados para efetuar as mensurações pretendidas eram totalmente verbalizados, uma vez que, os babilônios não tinham nenhum símbolo que representasse as operações, ou ainda, quantidades desconhecidas. Portanto, não se pode afirmar que esta civilização fizesse uso de "álgebra", ou ainda, que a matemática babilônica tivesse natureza algébrica, como defendem alguns pesquisadores, mas sim, ela teria cunho, ou natureza geométrica, o que daria origem ao que chamamos anteriormente de geometria do corta e cola, realizada por meio de sequências de procedimentos que, mesmo podendo ser traduzidos para linguagem algébrica moderna, ainda poderia nos parecer estranha, como por exemplo[16]:

> Procedimento: "A superfície e a minha confrontação acumulei: obtive 0,45" (Estaria suposto que o objetivo era encontrar a confrontação: o lado da superfície, que é um quadrado.)
> Solução:
> (i) 1 é a projeção
> (ii) quebre 1 na metade (obtendo 0,30) e retenha 0,30, obtendo 0,15
> (iii) agregue 0,15 a 0,45
> (iv) 1 é o lado igual
> (v) retire do interior de 1 os 0,30 que você reteve
> (vi) 0,30 é a confrontação.
> Essa versão motiva uma nova interpretação do procedimento, de natureza geométrica. Em primeiro lugar, faz-se uma projeção de 1, que permite interpretar a medida do lado procurado, suponhamos *l*, concretamente como um retângulo de lados 1 e *l*. Os babilônios transformavam, por meio de uma projeção, essa linha de comprimento *l* em um retângulo com um lado dado por *l* e o outro medindo 1. Ou seja, eles projetavam o lado *l* para que se tornasse o lado de um retângulo com área igual a *l*. (ROQUE, 2012, p.66)

O que pode ser traduzido geometricamente (figura 8) como:

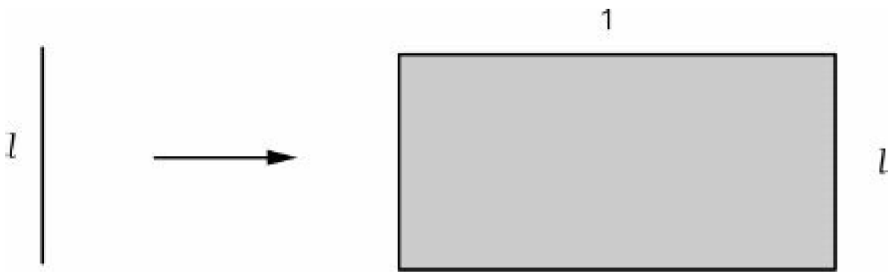


Figura 9 - Procedimento (i), projeção do lado (ii).

Fonte: Roque (2012, p. 66)

Para representar ao que se refere "A superfície e a minha confrontação acumulei", temos (figura 9):

[16] O exemplo citado encontra-se na coleção do *British Museum*, na placa BM 13901 (ROQUE, 2012; GONÇALVES, 2012). Esta é uma nova tradução proposta por J. Hoyrup.

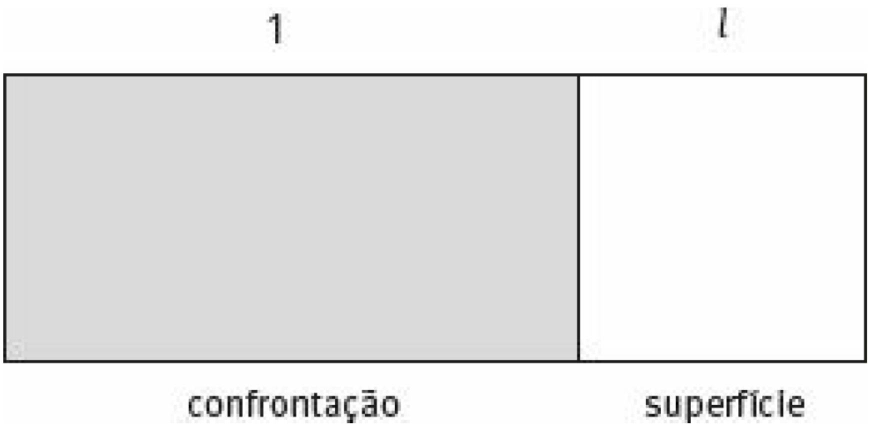


Figura 10 - Acumulação da superfície e sua confrontação.

Fonte: Roque (2012, p. 67)

Segundo Roque (2012, p.67), no segundo passo, quebramos na metade o lado de medida 1, dividindo o retângulo inicial em duas partes e, arrumando as duas partes do retângulo obtemos a figura a seguir que contém a área igual a inicialmente dada (0,45).

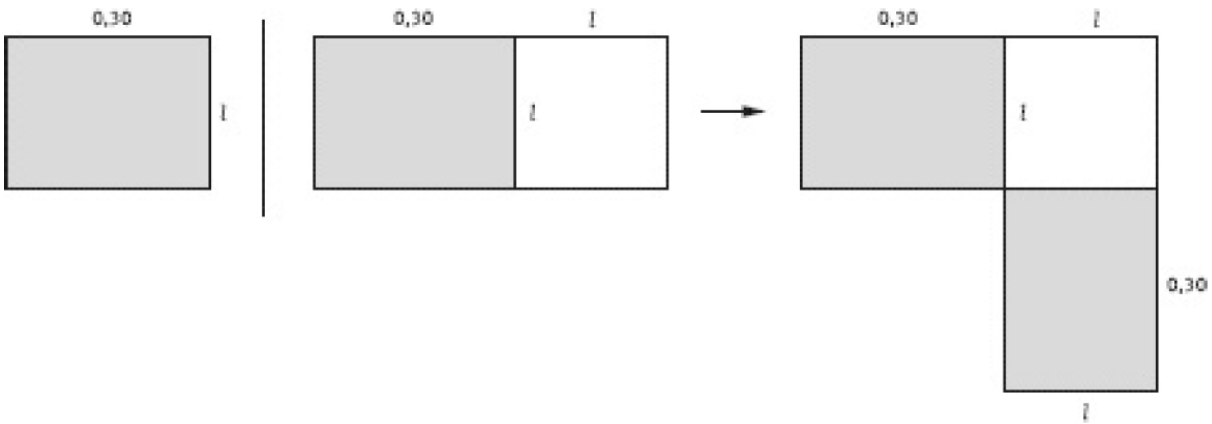


Figura 11 - Quebrando 1 na metade.

Fonte: Roque (2012, p. 67)

Quanto ao terceiro e quarto passo, segundo Roque (2012, p.67), os lados ditos “quebrados” no final da figura (parte que falta para completar o quadrado) determina, um quadrado de lado (0,30) ao qual “retenho” (multiplico por ele mesmo), tendo assim a área de um novo quadrado (0,15). Esta área por fim pode ser juntada a figura formando assim um quadrado maior de área 1.

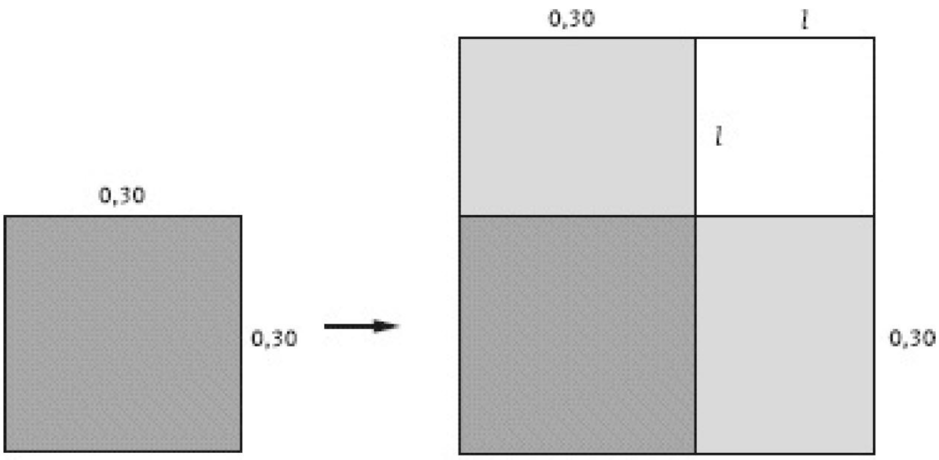


Figura 12 - Passos (iii) e (iv), reter 0,30 e agregar a 0,45.

Fonte: Roque (2012, p. 68)

Sendo assim (figura 11), como “1 é o quadrado de 1, 1 é o lado igual. Desse lado, retiro o lado do quadrado menor (0,30). Obtenho, assim, o lado procurado, que é $1 - 0{,}30 = 0{,}30$” (ROQUE, 2012, p.68).

Este é um dos exemplos que utilizam da geometria do “corta e cola” e que poderia facilmente ser traduzido atualmente como a solução de uma equação do segundo grau do tipo $ax^2 + bx = c$.

Segundo Gonçalves (2012, p.333):

> as teias de significados que cada interpretação usa para seus elementos são muitos diferentes: x e x ao quadrado são objetos matemáticos cujos significados pertencem ao campo da álgebra simbólica, enquanto confrontações e superfícies têm seus significados no domínio da geometria. Escolher uma ou outra opção corresponde a pensar maneiras radicalmente diferentes de abordar a matemática babilônica e suas ferramentas.

2.1.4 AS RAÍZES QUADRADAS E AS TRIPLAS PITAGÓRICAS

Segundo EVES (2004) os mesopotâmicos desenvolveram aproximações incrivelmente interessantes para as raízes quadradas de números não quadrados perfeitos como, por exemplo, a raiz de 2 que foi aproximada usando a notação moderna como 1;24;51;10 o que representa 17/12 = 1,4142155 presente na Tábua 7289 de *Yale*, e que data de 1600 a.C. (figura 12). Ficamos impressionados com esta aproximação!

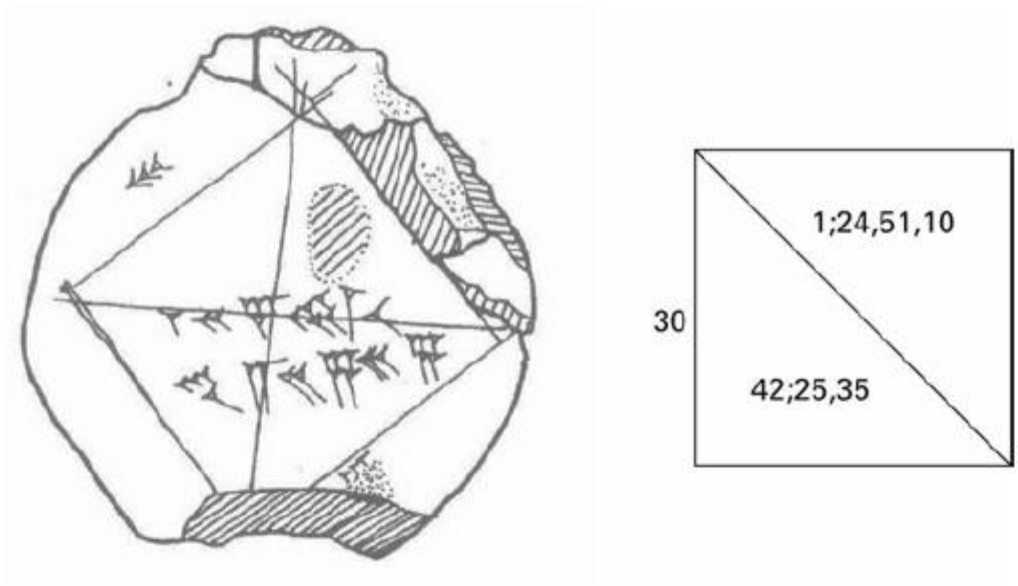


Figura 13 - Tábua 7289 - aproximações para raízes quadradas

Fonte: Katz (2009, p. 18)

Segundo EVES (2004, p.63) e ROQUE (2012, p.61-62) talvez eles utilizassem algo parecido com a seguinte fórmula para realizar as suas aproximações: $\sqrt{a^2+b} \approx a + \mathrm{b}/2\mathrm{a}$, o que pode ser representado geometricamente por (figura 13):

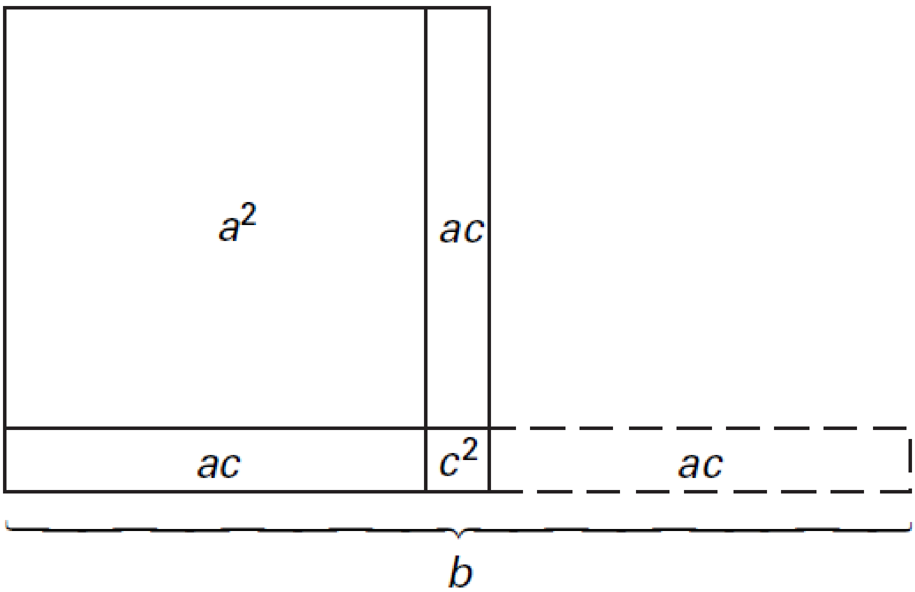


Figura 14 - Procedimento para cálculo da raiz quadrada

Fonte: Katz (2008, p. 19)

O que se conclui é que esta civilização era muito hábil em relação aos cálculos e é impressionante a diversidade e elaboração dos problemas considerados por eles.

Porém, a implicação de os mesopotâmios calcularem a raízes quadradas desta forma talvez seja a tábua mais controversa e notável de toda a matemática babilônica, a chamada *Plimpton 322* (figura 14).

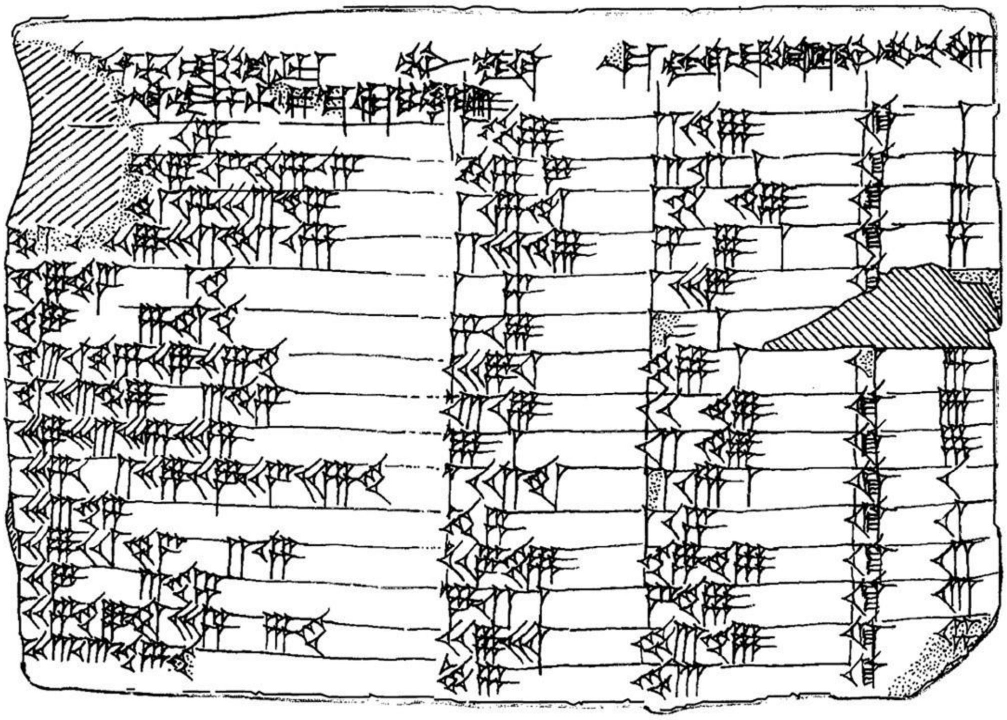


Figure 1. Plimpton 322 (obverse). Drawing by the author.

Figura 15- Desenho da *Plimpton 322* pelos autores do site Biblioteca Digital Cuneiforme.

Fonte: Biblioteca Digital Cuneiforme em: http://cdli.ucla.edu/ . [17]

Segundo EVES (2004, p.64) o tablete contém três colunas praticamente completas e uma quarta incompleta. A coluna da extrema direita teria como função apenas enumerar as linhas. As próximas duas colunas da direita para a esquerda parecem, em um primeiro momento, totalmente aleatórias, porém logo se descobre que na verdade, exceto por quatro casos, se tratam da hipotenusa e de um cateto de um triângulo retângulo de lados inteiros.

[17] Acesso em: 19 de NOV de 2016.

As três primeiras linhas da tábua em questão ficariam traduzidas em notação atual, colocando-se os registros corretos e, no caso de os originais não estarem corretos ao lado entre parênteses, da seguinte forma (figura 16):

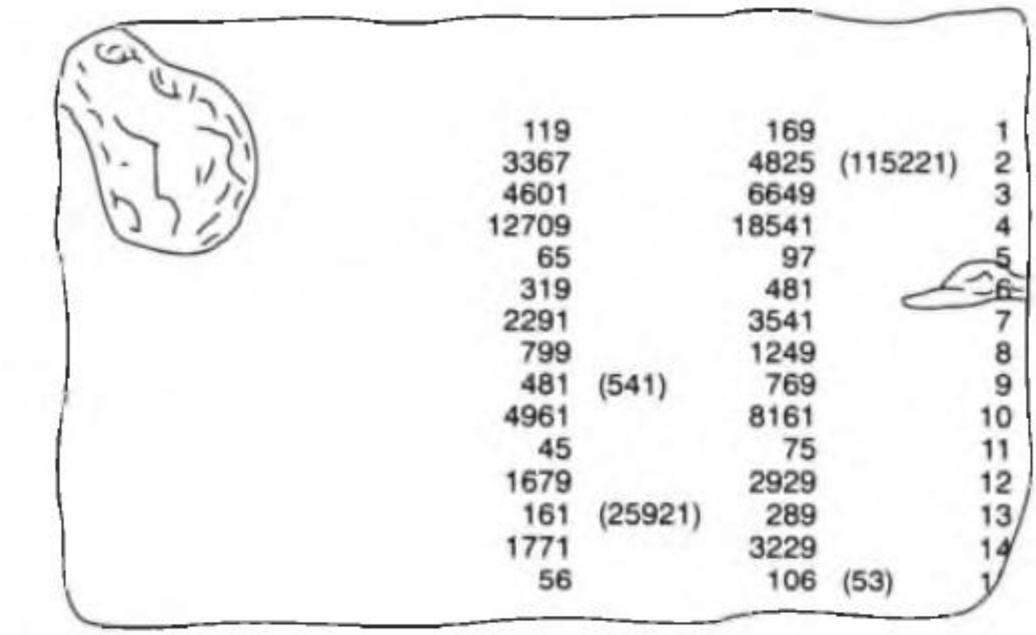


Figura 16 - Tradução do tablete Plimpton 322 em notação moderna

Fonte: EVES (2004, p.64)

EVES (2004, p.64) afirma que “é difícil explicar a exceção da segunda linha”, mas que nos outros casos pode se ser facilmente explicada como sendo um mero lapso cometido ao escrever esses números em escrita cuneiforme, uma vez que, 481 e 541 aparecem como (8,1) e (9,1) no sistema sexagesimal, sendo assim, apenas uma cunha a mais gravada.

O que chama a atenção na *Plimpton 322* é o fato de que, os números nela representados são conhecidos como triplas, ou ainda, ternos pitagóricos que só foram mostrados pelos gregos muitos séculos depois, EVES (2004) explica.

> Um terno de números inteiros, como (3,4,5), cujo os termos são lados de um triângulo retângulo, é chamado *terno pitagórico*. Se o único fator inteiro positivo comum aos elementos de um terno pitagórico é a unidade, então esse terno se diz *primitivo.* Assim, (3,4,5) é um terno pitagórico primitivo, ao passo que (6,8,10) não é. Um dos grandes feitos matemáticos dos gregos, posterior muitos séculos à tabua Plimpton 322, foi mostrar que todos os ternos pitagóricos primitivos (a,b,c) são dados parametricamente por
> $a = 2uv$, $b = u^2 - v^2$ e $c = u^2 + v^2$

> Onde u e v são primos entre si, um é par o outro é impar e $u > v$. Assim, para $u = 2$ e $v = 1$, obtemos o terno primitivo $a = 4, b = 3$ e $c = 5$ (EVES, 2004, p.64).

Olhando para este tablete, caso calculássemos o outro cateto a dos triângulos retângulos de lados inteiros presentes nesta mesma tábua, sendo c a hipotenusa e b o cateto nela representado, encontraríamos os seguintes ternos pitagóricos, utilizando o sistema sexagesimal (figura 16):

a	b	c	u	v
120	119	169	12	5
3456	3367	4825	64	27
4800	4601	6649	75	32
13 500	12 709	18 541	125	54
72	65	97	9	4
360	319	481	20	9
2700	2291	3541	54	25
960	799	1249	32	15
600	481	769	25	12
6480	4961	8161	81	40
60	45	75	2	1
2400	1679	2929	48	25
240	161	289	15	8
2700	1771	3229	50	27
90	56	106	9	5

Figura 17- Ternos pitagóricos na base sexagesimal

Fonte: EVES (2004, p.65).

Segundo EVES (2004, p.66) percebe-se que, fora as linhas 11 e 15 todos os outros termos são primitivos. Foram incluídos também os termos u e v que levam a estes termos pitagóricos para facilitar os exames. O autor ainda afirma que, "parece evidente que os babilônios desse remoto período tinham ciência da representação paramétrica geral dos ternos pitagóricos primitivos" (EVES, 2004, p.66), sendo reforçado quando percebemos que u e v são números sexagesimais regulares.

A escolha dos valores de u e v parecem provir de algum método subsequente da divisão, pois os números regulares já estavam presentes em algumas tábuas de inversos multiplicativos que serviriam para reduzir a divisão à multiplicação. Analisando a quarta e, um tanto quanto destruída, coluna, encontrar-se-ia a resposta, pois, percebe-se que ali se encontram os valores para $(c/a)^2$ para os diferentes triângulos. Segundo EVES (2004, p.66), para se realizar esta divisão o lado a e, portanto u e v, devem ser regulares.

É ainda mais importante analisar esta quarta coluna, pois segundo EVES (2004, p.66), obviamente se trata de uma tábua que traz “o quadrado da secante do ângulo B oposto ao lado b do triângulo retângulo”. Uma vez que a é regular, $sec\ B$ tem representação finita em base sexagesimal e, os valores representados na tábua, na forma como estão organizados, trazem exatamente em ordem decrescente os valores para a secante dos ângulos de 45º até 31º. Segundo o mesmo autor seria completamente plausível pensar que existiam ainda tábuas para as secantes dos ângulos variando de 0º a 15º, e ainda, de 16º a 30º.

Quanto a *Plimptom 322*, EVES (2004) ainda traz a seguinte reflexão:

> A análise da *Plimpton 322* mostra o exame minucioso a que algumas tábuas matemáticas babilônicas devem ser submetidas. Em épocas anteriores, essa tábua poderia ter sido sumariamente desprezada como sendo um mero registro comercial. (EVES, 2004, p.66)

Ao olharmos para a matemática mesopotâmica ficamos espantados com quão avançados eles estariam com seus cálculos, cujos conhecimentos se tornaram imprescindíveis, sendo ainda hoje utilizados, como por exemplo, a divisão do círculo em 360 graus. Isso mostra o quão rico era a cultura desta civilização e destaca o motivo de ela merecer ser mais estudada e conhecida. Para Roque (2012, p.89):

> O contexto prático, ligado à administração de bens, foi uma das motivações para a invenção da matemática, mas os sistemas de numeração, bem como as técnicas para realizar operações, se transformaram de acordo com questões diversas. Mesmo nas culturas antigas havia motivações técnicas para o desenvolvimento da matemática e cuidados com a exposição, a fim de que exprimisse certa regularidade e generalidade dos procedimentos usados. Aliás, é justamente por terem organizado suas práticas de modo sistemático, de forma a possibilitar sua transmissão, que se pode considerar que os mesopotâmicos e os egípcios criaram uma matemática, ou melhor, duas matemáticas.

3. A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO METODOLOGIA DE ENSINO

Com o intuito de aprofundar e expandir nosso entendimento sobre a Matemática Mesopotâmica, num primeiro momento, fizemos uma pesquisa de cunho bibliográfico em diferentes livros sobre história da matemática, tendo como principais referências os autores Katz (2009), Eves (2004), Boyer (1974), Roque (2012) e Gonçalves (2012) , de forma a contribuir como referencial teórico para a elaboração de propostas de atividades adequadas aos conteúdos da educação básica. A escolha dos temas matemáticos mesopotâmicos foi intencional pois escolhemos aqueles que consideramos ter um certo potencial pedagógico e que estão previstos nos PCN, PCNEM e DCE.

Realizamos pesquisa no banco de teses e dissertações da Capes com o objetivo de mapear propostas de ensino que por utilizem a história da matemática na mesopotâmia, além de artigos em periódicos e eventos da área. Três delas (PEREIRA, 2014; SOARES, 2011, TAVARES, 2016); , que utilizam as Unidades Básicas Problematizadoras (UBP´s) serviram de inspiração para estruturar as atividades propostas para ensinar matemática na educação básica.

A UBP, propostas por Mendes e Miguel (2010).

> é um flash discursivo memorialístico que descreve uma prática sociocultural situada em um determinado campo de atividade humana, e que teria sido de fato realizada para se responder a uma necessidade posta a uma comunidade de prática, em algum momento do processo de desenvolvimento dessa atividade na história.[18] (MENDES; MIGUEL, 2010, p.386, tradução nossa).

Segundo os mesmos autores:

> O conjunto de UBP's é produzido de forma a problematizar os mobilizadores das práticas culturais da matemática escolar, contrastando-as com as maneiras que a cultura matemática poderia ter sido (ou foi) implantada em outras atividades humanas. (MENDES, 2010, p. 387, tradução nossa).[19]

[18] Versão original: a discursive memory flash which describes a situated practice in a determined field of human activity, and it would actually have been used to answer the necessary piece of a community of practice at some point in the development of that activity in history.
[19] Versão original:The set of BPU is produced in order to problematize mobilizing school practices of mathematics culture, contrasting them with ways that mathematics culture could have been (or has been) mobilized in other human activities.

Nesta seção, também discorremos sobre a opção metodológica da História da Matemática no ensino, tendo como autores principais Mendes e Miguel (2010), Mendes (2008).

Por fim, foram elaboradas propostas de atividades, que chamamos de episódios, com o tema matemática da mesopotâmia, pensadas de forma a explorar a matemática desta civilização de forma investigativa, utilizando principalmente as unidades básicas de problematização (UBP's).

Segundo TAVARES (2016, p. 2) as UBP's se enquadram metodologicamente em uma vertente chamada de metodologia ativa e para ela as "metodologias ativas são práticas que estimulam o ensino e a aprendizagem baseada nas habilidades por meio do pensamento crítico-reflexivo, no qual o professor está inserido e se compromete com o aprendizado do aluno". A autora ainda afirma que as metodologias ativas desenvolvem a habilidade de estudo em grupo e estimula o estudo individual no ritmo de cada estudante

Assim, as UBP's se aproximam tanto dos princípios da investigação matemática quanto da resolução de problemas, mas não é estritamente nenhuma das duas de fato. O que acontece é uma problematização de um fato histórico, fictício ou não, que pode ou não ter sido abordado na época com caráter matemático, levando em consideração os aspectos socioculturais do momento da história em que o mesmo teria acontecido, e a matematização desta determinada situação.

Os conteúdos trabalhados em nossas propostas serão a multiplicação e a divisão que, fazem parte de toda a caminhada escolar, além de problemas pertinentes à geometria, a introdução à álgebra e a aproximações para números irracionais. As propostas envolveram conteúdos da educação básica trabalhados a partir dos tabletes mesopotâmicos, disponíveis principalmente em formas de fotos colhidas de livros, ou ainda, do site *Cuneiform Digital Library* .

Uma considerável parte da relutância dos alunos quanto ao ensino de matemática, ou de qualquer outra matéria, tem sido desencadeado pela falta de motivação dos mesmos para com a matéria.

> Talvez, dos problemas mais corriqueiros que o professor enfrenta em sala de aula, o mais difícil de solucionar seja o da falta de motivação dos alunos. Consequentemente, este problema produz atitudes de resistência àquilo que está sendo ensinado (CHAGAS, 2004, p.244).

Sendo assim, a história da matemática pode ser usada como fator motivacional para as “aulas de matemática” de forma a chamar a atenção dos alunos e desmistificar a ideia de que a matemática é totalmente abstrata e que é praticamente indecifrável. Mostrando, por exemplo, como aconteceram os avanços e retrocessos no seu desenvolvimento e os obstáculos encontrados, tentando de certa forma "humanizá-la", contribuindo assim para que os alunos mudem sua visão quanto a esta matéria, e possam se identificar com ela. Porém, segundo Miguel (1997) não se pode esperar ingenuamente que a história seja auto motivadora, fazendo-se necessário a intervenção do professor.

O papel do professor deve ser de “resgatar” o processo histórico da construção dos tópicos matemáticos a serem abordados em sala de aula, para que o aluno compreenda o significado dessas ideias e sua importância para o desenvolvimento de toda a matemática, a partir do significado histórico e conceitual desses tópicos básicos levados pelo professor pelas atividades em sala. (MENDES, 2008)

Segundo D'AMBROSIO (1989) esse estudo está intimamente ligado com a etnomatemática. A partir da utilização dessas atividades de ensino, o professor pode verificar as possíveis relações existentes entre a História da matemática e a Etnomatemática, uma vez que, segundo as DCE’s (2008) esta segunda propõe que os programas educacionais enfatizem as matemáticas produzidas pelas outras culturas. Esses aspectos ficam cada vez mais evidentes quando se trata de verificarmos o desenvolvimento dessas noções matemáticas ao longo do tempo, em diferentes contextos sociais, políticos e culturais. Além disso, essas relações implicam na ressignificação dessa história no contexto atual.

Fica mais evidente a relação entre as tendências de ensino História da Matemática e Etnomatemática quando verificamos que ao estudar e compreender os métodos matemáticos de um povo antigo está se valorizando também a cultura desta civilização e reconhecendo que não há somente um conhecimento matemático, mas vários, sendo todos importantes.

As DCE’s do Paraná dizem que "a história da matemática é um elemento orientador na elaboração de atividades, na criação de situações-problema, na busca de referências para compreender melhor os conceitos matemáticos"(PARANÁ, 2008, p.66). Sendo assim, a história da matemática se mostra bastante flexível para o trabalho com qualquer outra tendência de forma a auxiliar na compreensão dos alunos, e propiciar ambientes educativos mais estimulantes.

A história da matemática também tem o papel de facilitar o entendimento e proporcionar um aumento na aprendizagem dos conteúdos. Segundo D’ambrósio (1989, p.17): "Esta linha de trabalho parte do princípio de que o estudo da construção histórica do conhecimento matemático leva a uma maior compreensão da evolução do conceito, enfatizando as dificuldades epistemológicas inerentes ao conceito que está sendo trabalhado". Assim, através da visualização de como os conteúdos se desenvolveram, os alunos podem compreendê-los melhor e ter melhor domínio do objeto matemático em questão. Neste sentido Miguel (1997) diz:

> é no desenvolvimento histórico da matemática que podemos perceber as diferentes formalizações de um mesmo conceito. E, como numa aprendizagem significativa é desejável que o estudante tenha uma visão destas diferentes formalizações, então, a história passaria a ser um recurso indispensável. (MIGUEL, 1997, p. 83)

Por fim, temos que uma proposta de ensino investigativa utilizando a História da Matemática pode facilmente servir como uma ponte para o trabalho com outras tendências matemáticas.

Mendes (2008) sugere algumas etapas para uma atividade de matemática que se utilize da história da matemática:

> •Nome da atividade (usar títulos criativos!)
> •Os objetivos da atividade
> •O conteúdo histórico (elemento gerador e motivador)
> •O material a ser utilizado nas atividades (improvisação)
> •A operacionalização da atividade
> •Fases da atividade (Manipulação / experimentação ; Verbalização/ comunicação oral e Simbolização/abstração).
> •Os desafios propostos em cada atividade (MENDES, 2008, p.42-44)

Os desafios estão presentes em textos históricos originais, em fontes secundárias como os livros de História da Matemática, livros didáticos antigos, paradidáticos e aqueles que abordam contos de tradição oriental ou similares como os trabalhos de Malba Tahan.

Porém, mais importante que um desafio proposto nesse tipo de atividade é desenvolver nos estudantes um espírito explorador, indagador e ao mesmo tempo de análise e síntese, pois é dessa maneira que eles alcançarão um crescimento intelectual mais significativo. (MENDES, 2008, p.44)

A história da matemática nos PCN é tratada como recurso didático. Já nas DCE está associada aos procedimentos metodológicos, porém ambas concordam em um ponto, que a história é de grande valia para o ensino da Matemática.

Segundo as DCE's (PARANÁ, 2008, p.66), a história da Matemática é componente importante para que os alunos entendam a natureza da Matemática e sua relevância para a humanidade. Para os PCN de matemática (BRASIL, 1997, p.34) quando se revela a matemática como uma criação humana, mostrando as necessidades e preocupações de diferentes culturas, em várias ocasiões da história e se compara os conceitos matemáticos antigos aos novos o professor pode possibilitar aos alunos uma maior compreensão do conhecimento matemático. Sendo assim, para que haja uma compreensão do passado as DCE (2008, p.66) dizem que a "abordagem histórica deve vincular as descobertas matemáticas aos fatos sociais e políticos, às circunstâncias históricas e às correntes filosóficas que determinaram o pensamento e influenciaram o avanço científico de cada época". Neste sentido, os PCN (BRASIL, 1997, p.34) consideram a história da Matemática como "um instrumento de resgate da própria identidade cultural".

Para as DCE a elaboração de atividades e a criação de situações problema podem ser orientadas por meio da história da Matemática. Vemos então esta tendência, procedimento metodológico, ou ainda, recurso didático, como uma abertura para o trabalho em conjunto entre diferentes tendências de ensino, possibilitando, ao serem unidas, propiciar uma maior facilidade de aprendizagem.

Tanto PCN quanto DCE veem a história da Matemática como uma forma de esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelos alunos a partir de situações e necessidades reais, podendo assim, responder alguns "por quês" por meio da atribuição de um sentido para certo estudo de forma a promover uma "aprendizagem significativa" e ainda um olhar mais crítico para o conhecimento.

3.1 ATIVIDADES

Nesta seção do trabalho propomos atividades inspiradas na matemática mesopotâmica, inclusive, algumas delas são releituras de exemplos clássicos encontrados nos tabletes matemáticos. Procuramos elaborá-las de forma a se aproximar do nosso referencial teórico, ou seja, das unidades básicas problematizadoras (UBP’s), apelando para o caráter investigativo e usando elementos históricos.

A cada episódio buscamos identificar o nível de ensino ao qual o mesmo pode ser aplicado segundo as DCE e PCN, além de, explicitar que todas as atividades podem ser modificadas pelo professor para serem utilizadas em outros níveis de escolaridade.

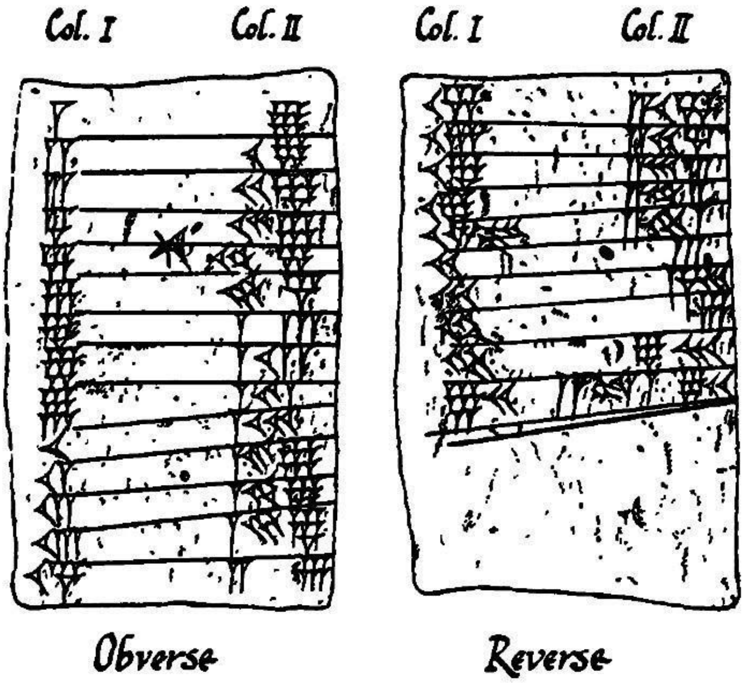
Também buscamos elaborar enunciados diferentes, tentando, quando possível, contextualiza-los com a mesopotâmia, ou ainda, com a atual região que antigamente fazia parte da mesopotâmia.

3.1.1 Atividade 1 - Rabiscos na pedra.

A seguinte atividade pode ser utilizada nos anos iniciais e finais do ensino fundamental, podendo ainda ser modificada de forma conveniente pelo professor, de forma que seja possível trabalhá-la em qualquer etapa da educação básica. O intuito desta atividade é explorar e investigar por meio de questões norteadoras um tablete matemático da mesopotâmia. Os alunos poderão ser dispostos em grupos para que a coletividade possa ser trabalhada e a discussão da atividade entre os alunos aconteça. O último tópico da atividade necessita que o professor prepare antes da aula um pouco de argila, porém, assim como os demais tópicos, fica a cargo de o professor realizar ou não.

O povo mesopotâmico teria começado a viver na região entre os rios Tigres e Eufrates por volta de 5000 a.C. Este povo em específico registrava os dados do dia a dia, entre outras coisas, em tabletes feitos de argila do tamanho de uma mão. Os símbolos utilizados por eles eram chamados de cuneiformes, pois, apresentavam o formato de uma cunha.

Certo dia um jovem iraquiano chamado Omar, perambulava pelo deserto em busca de pastagem para suas cabras. Ele tinha o costume de ir jogando pedras pelo caminho, para testar sua força e ver o quão longe conseguia arremessá-las e, neste dia, não diferente de outros, ao longo do trajeto pedras iam sendo arremessadas. Ao juntar uma pedra, meio chata e, aproximadamente do tamanho de sua mão, percebeu que havia alguns rabiscos de ambos os lados, sendo aproximadamente como está sendo representado a seguir:



Fonte: KATZ (2008, p. 13).

De todas as pedras as quais ele já havia arremessado nunca havia percebido nada parecido. Lembrou-se então que o professor de matemática certa vez contou-lhe que a muito tempo atrás vivera ali uma civilização muito importante, o povo mesopotâmico, e eles rotineiramente utilizavam tabletes de argila para registrar as mais diversas atividades. Omar então ficou curioso e começou a se questionar sobre a tal pedra rabiscada. Será que podemos ajudá-lo a descobrir mais sobre ela?

1. *O que parece estar representado na primeira coluna? E na segunda?*
2. *O que representa o seguinte símbolo presente na primeira linha, coluna I?*

3. *Sabendo o que representa o símbolo anterior, o que representaria o seguinte símbolo, presente na décima linha, coluna I?*

4. *Qual é a relação entre a coluna I e a coluna II, ou seja, do que se trata este tablete?*
5. *Em sua opinião, qual seria a importância deste tablete para os mesopotâmicos? Quem provavelmente o usava?*
6. *Sabendo do que se trata este tablete, o que deveria estar representado na linha 7, coluna II? Como está representado?*

7. *O que representa agora o símbolo*  *, um pouco mais a frente dos demais na linha 7 e na coluna II?*
8. *Qual era a base numérica utilizada por este povo? Será que também a utilizamos em nosso dia a dia? Onde?*
9. *Qual poderia ser o motivo para que esta base fosse utilizada, uma vez que, estamos admitindo que ela seja diferente da que usamos atualmente?*
10. *Porque será que na primeira coluna, na parte de trás do tablete, temos a sequência dos números até o 20 e, em seguida esta sequência é interrompida, passando então para os números 30, 40 e 50?*
11. *Que número poderia estar representado na primeira coluna e última linha?*
12. *Faça você agora o seu tablete.*

Para a questão oito, caso não se torne rapidamente evidente a base numérica e/ou a utilização no cotidiano de tal base, o professor pode levar alguns questionamentos como " A partir de que número os algarismos voltam a se repetir?" e "Em que lugar nós vemos que passados 60 alguma coisa, os números voltam a se repetir?". Espera-se neste caso a associação com os minutos e as horas relógio sejam evidentes.

Caso os alunos tenham problemas com a questão nove, o professor pode intervir levantando questionamentos que levem o aluno a pensar sobre a quantidade de divisores por exemplo. Lembrando que não se chegou a nenhum consenso de que este seria o motivo de a base utilizada ser sexagesimal.

A questão dez abre espaço para que o professor possa trabalhar com cálculos mentais. Neste sentido, o professor pode começar apresentando métodos de cálculos mentais para a multiplicação de um número com dois algarismos, por exemplo, $9 \times 21 = 9 \times 20 + 9 \times 1 = 180 + 9 = 189$.

3.1.2 Atividade 2 - E o lado?

A seguinte atividade é uma adaptação de um dos problemas babilônios que estaria ligado ao atual conteúdo de equações quadráticas, presente no livro "INTRODUÇÃO À HISTÓRIA DA MATEMÁTICA" do autor Howard Eves (2004). O nível escolar ao qual esta atividade pode ser aplicada é, inicialmente, os anos finais do ensino fundamental, porém, pode ser adaptada pelo professor de forma a atender as especificidades de outro nível escolar, ficando a critério do professor a alteração das atividades.

Segundo EVES (2004) "A geometria babilônica se relaciona intimamente com a mensuração prática". O autor ainda afirma que há vários exemplos concretos de que em cerca de 2000 a.C. a 1600 a.C. os babilônios estavam familiarizados com o cálculo da área de certos polígonos, dentre eles, o retângulo e, em especial, o quadrado.

> *"Um problema babilônico pede o lado de um quadrado se a diferença entre a área desse quadrado e seu lado é o número (sexagesimal) 14,30. A resolução do problema é descrita como se segue: "Tome metade de 1, que é 0;30; multiplique 0;30 por 0;30, o que dá é 0;15; some 0;15 a 14,30 obtendo 14,30;15. Este último é o quadrado de 29;30. A seguir some 0;30 a 29;30; o resultado é 30, que é o lado do quadrado"(EVES, 2004, p.78).*

1. *Como ficaria esta mesma frase transformando os números que estão na base sexagesimal em números na base decimal? Lembrando que ",'" separa as partes inteiras que multiplicam potências de base 60, e ";" separa as partes fracionárias, por exemplo, 2,2;30 em números decimais seria 122,5 pois,* $2{,}2;30 = 2 \times 60^1 + 2 \times 60^0 + 30 \times 60^{-1} = 120 + 2 + \ 0{,}5 = 122{,}5$.
2. *Os babilônios desenvolveram diversos métodos para resolver seus problemas, como o que vimos acima, porém, não chegaram a desenvolver uma álgebra formal como conhecemos hoje. Sendo assim, utilize seus conhecimentos algébricos e traduza o problema proposto em uma equação.*
3. *Tendo como base a descrição da resolução do problema, tente construir uma expressão algébrica, ou ainda, uma equação, que traduz o que foi descrito.*
4. *Esta expressão encontrada se assemelha com a fórmula resolutiva conhecida para a resolução de uma equação do segundo grau?*
5. *Mostre por meio de manipulações algébricas que a equação que traduz atualmente a resolução do problema proposta pelos babilônios corresponde à parte positiva da fórmula resolutiva que conhecemos hoje,* $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

A questão dois é um tanto quanto trabalhosa, mas numericamente falando o que temos é a seguinte situação em casa passo:

- ½ = 0;30
- $(0;30)^2$=0;15
- 14,30+0;15=14,30;15
- $\sqrt{14{,}30;15} = 29;30$
- 29;30+0;30=30

  De forma genérica, dado um número b que multiplica o lado do quadrado x e c a diferença entre a área e o lado multiplicado por b.

- $\frac{b}{2}$.
- $(\frac{b}{2})^2$.
- $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$.
- $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$.
- $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} + \frac{b}{2}$

Para a resolução da questão três podemos pensar que como estamos falando de lados de em quadrado os quais não conhecemos, podemos chamar esta medida de lado da “x”. Portanto a diferença entre a área do quadrado e seu lado pode ser $x^2 - x$, como temos que esta diferença tem como resultado 14,30, a equação que atualmente resumiria este problema seria $x^2 - x = 14{,}30$. Ainda podemos converter este número para a base decimal, ficando $x^2 - x = 870$.

Para a resolução da quarta questão, basta realizarmos algumas operações da generalização encontrada na segunda questão.

3.1.3 Atividade 3 - Escada quebrada

Este é outro problema clássico dos antigos babilônicos adaptado do livro “INTRODUÇÃO À HISTÓRIA DA MATEMÁTICA” do autor Howard Eves (2004). Segundo os PCN e as DCE do Paraná, esta atividade é referente ao conteúdo estruturante “Grandezas e medidas”, tendo como conteúdo básico as relações “métricas no triângulo retângulo” trabalhado no 9º ano do ensino fundamental.

Seu Omar era dono de um comércio por volta de 1800 a.C na antiga Babilônia. Para evitar os eventuais furtos de sua mercadoria ele costumava guarda-la no sótão de sua loja cujo acesso era pela lateral do seu estabelecimento. Para poder entrar no sótão ele usava uma escada de madeira presa verticalmente à parede. Porém, certo dia a sua escada estava muito velha e acabou por quebrar, fazendo com que seu Omar tivesse que comprar uma nova. Acontece que o tamanho da escada antiga era menor que o padrão e se vendia somente escadas com 0;30 de comprimento. A escada antiga ficava presa à parede, mas a nova, tem de escorregar verticalmente, ao longo da parede, uma distância de 0;6. Para tomar a decisão de compra ou não seu Omar pegou um de seus tabletes matemáticos que o auxilivam em situações como esta.

1. *Como ficaria este enunciado transformando as medidas que estão em números sexagesimais em números decimais? Lembrando que ";" separa a parte inteira da fracionária e, cada posição é resultante da multiplicação do número por uma potência de base 60, por exemplo, 0;45*$= 0 \times 60^0 + 45 \times 60^{-1}$. *Lembrando também que,* $60^{-1} = \frac{1}{60}$.
2. *A que conteúdo matemático lhe parece remeter esta situação?*
3. *Suponha que a loja do seu Omar e a do seu vizinho estejam a 0;10 de distância, seria viável seu Omar comprar esta escada? Para resolver este problema mostre qual seria a tradução moderna desta situação em termos algébricos e resolva.*
4. *Supondo que seu Omar comprou a escada e queira que os pés dela encostem-se à parede da loja vizinha, por questão de segurança, o que ele deverá fazer com escada para que isso aconteça?*

3.1.4 Atividade 4 - Será que rende?

Este episódio tem como conteúdo sistemas de equações com duas incógnitas e pode ser utilizado tanto no ensino fundamental para o 8º ano como atividade de fixação, quanto no médio como atividade de revisão para o conteúdo de sistemas lineares, ficando a critério do professor as devidas alterações necessárias para a sua utilização. Inicialmente a atividade foi pensada para ser realizada como forma de fixação do conteúdo, porém, pode ser utilizada para a introdução do mesmo.

Os babilônios costumavam resolver problemas de mensuração de áreas como o seguinte, encontrado em uma das tábuas matemáticas desta época a VAT 8389:

> *Um de dois campos rende 2/3 sila por sar, o segundo rende 1/2 sila por sar , onde sila e sar são medidas de capacidade e área respectivamente. O rendimento do primeiro campo foi 500 sila a mais que o segundo. As áreas dos dois campos juntos é 1800 sar. Qual é a área de cada campo?*
> *(KATZ, 2009, p. 22) (tradução nossa).*

Para resolver o problema, os babilônios assumiam inicialmente que ambas as áreas eram iguais, portanto, como a soma é 1800, temos que as medidas deveriam ser iguais a 900. Então eles multiplicavam pelas frações dos rendimentos as quais sabemos que a diferença entre elas é de 500. Ficamos então com 2/3(900)-1/2(900)= 150. Ora, a diferença entre o que desejávamos (500) e o resultado encontrado (150) é de 350. É necessário ajustar os valores para que se encontrem os valores certos. Para isso sabe-se que para que a soma das áreas continue sendo 1800, a mesma quantidade que somarmos a um valor devemos retirar do outro, sendo necessário então encontrar esse valor. Como a soma das frações dos campos é 2/3+1/2=7/6 e a diferença encontrada foi de 350, portanto, temos que encontrar um número que multiplicado pela fração 7/6 seja igual à diferença encontrada, ou seja, 350. O valor encontrado deve ser aumentado de uma área e diminuído de outra. Neste caso descobrimos que este valor é 300, portanto, o valor da área do primeiro campo é 900+300=1200, enquanto o valor da área do segundo campo é de 900-300=600.

1. *Qual, em sua opinião, é o conteúdo matemático apresentado no problema?*
2. *Qual seria o método atual que se assemelha ao utilizado para resolver este problema? Pode ser considerado como sendo este método?*
3. *Sabemos que os babilônios tinham diversos métodos para resolver problemas, porém, não desenvolveram nenhuma álgebra (não havia nenhum símbolo que representasse qualquer valor desconhecido). Seria possível transcrever o problema acima por meio de uma expressão algébrica? Qual seria?*
4. *Como poderíamos traduzir a resolução do problema utilizando expressões algébricas atuais?*
5. *Resolva o mesmo problema anterior, utilizando os métodos que conhece.*
6. *Resolva pelo método babilônico o seguinte problema:*
   Um de dois campos rende $\frac{2}{3}$ sila per sar, o segundo rende $\frac{1}{2}$ per sar, onde sila per sar são unidades de medida de capacidade e de área respectivamente o

rendimento do primeiro campo é 600 sila a mais que o segundo; a área dos dois campos juntos é 1950 sar. Quão grande é cada campo?

7. *Qual dos dois métodos lhe parece mais fácil? Se for o mesmo comente por que, caso contrário diga qual seria o motivo de não se usar o outro método?*

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Consideramos que a história da matemática pode ser trabalhada de forma a motivar os alunos a buscar o conhecimento matemático e, auxiliar na compreensão do mesmo.

O tema matemática da mesopotâmia foi escolhido principalmente pelo nosso gosto e admiração pela mesma, porém, dificilmente o tema é lembrado e abordado em sala de aula, ainda que a civilização mesopotâmica tenha contribuído de forma significativa para a matemática, astronomia, dentre outras áreas.

Por meio do estudo bibliográfico da história da matemática mesopotâmica pudemos vislumbrar o quão impressionantes eram os estudos dos escribas e matemáticos daquela época. Verificamos que a matemática realizada por esta civilização tinha cunho prático e, buscava principalmente resolver problemas cotidianos, podendo ser este também um fator motivacional ou, pelo menos, humanizador desta matéria, motivo este que justificaria a utilização desta abordagem em sala de aula.

Neste sentido, o estudo da história da matemática mesopotâmica vai de encontro à forma como estudamos a matemática de outras civilizações, como por exemplo, muitos historiadores da matemática "tradicional" apresentam a grega. Em muitos casos, na matemática apresentada no ensino básico, os professores deixam de lado em grande parte a praticidade, fazendo com que ela pareça cada vez mais abstrata, tendendo a serem estudados apenas os pensadores da época como forma de enaltecer suas intelectualidades. Nota-se que, apesar das incríveis descobertas do povo mesopotâmico, em nenhum momento falamos de um pensador matemático, pelo contrário, segundo o canal BBC[20], grande parte dos registros matemáticos conhecidos atualmente provavelmente não passava de exercícios escolares de futuros escribas, esse seria o motivo de a maioria dos tabletes matemáticos conterem problemas de aplicação prática e em seguida a "receita" para solução, mostrando assim que a solução de problemas nesta época poderia ser realizada por qualquer estudante.

Quanto ao uso das UBP's como recurso metodológico, apesar de relativamente novas, entendemos que tendem a facilitar a criação da ponte entre a tendência de ensino história da matemática com as demais, uma vez que, consideramos que quando olhamos para o passado de uma civilização e buscamos problematizar matematicamente alguma situação presente nela, estamos levando em consideração também as suas características étnicas. Reforçando ainda o caráter transversal das unidades básicas problematizadoras, relembramos a definição proposta por Miguel e Mendes (2010) onde a UBP seria a um flash discursivo sociocultural

[20] Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=1ZtwBVW9GhI >. Acesso: 1 NOV de 2016.

em um determinado campo da atividade humana, não sendo necessário a priori cunho matemático. Neste sentido, evidenciamos também uma de suas principais características que é o caráter investigativo presente na forma como as atividades são elaboradas, podendo também levar a resolução de um problema clássico da época em estudo.

Utilizamos as UBP's de forma a explorar, com caráter investigativo, as possibilidades presentes na representação dos tabletes mesopotâmicos e sugerimos quatro atividades para serem utilizadas nas aulas de matemática de acordo com o currículo escolar vigente. Desta forma o professor pode verificar qual tema pretende aprofundar usando estas atividades, tendo autonomia para adaptá-la de acordo com suas necessidades, evitando assim o engessamento das aulas. O estudo aponta possibilidades concretas do uso da História da Mesopotâmia atrelada às metodologias de ensino atuais para o ensino de matemática na educação básica.

A primeira atividade teve como foco principal trabalhar com caráter investigativo as operações aritméticas e o entendimento de bases numéricas. Este conteúdo é trabalhado principalmente nos anos finais do ensino fundamental, porém, contém tópicos que exigem maior abstração e que abrem espaço para a intervenção do professor no sentido de gerar discussões sobre o tema.

Segunda atividade pretendeu trabalhar com a conversão de bases numéricas e com o que hoje consideramos como a solução de equações do segundo grau. Assim como a atividade anterior, contém tópicos que exigem maior entendimento matemático, que pode abre espaço para a intervenção do professor, lembrando que elaboramos propostas de atividades para serem utilizadas em sala, e não necessariamente individualmente pelos alunos.

Como terceira atividade, elencamos como conteúdo o que era conhecido como ternos pitagóricos. Procuramos criar uma situação prática e que inicialmente não deixa claro qual o conteúdo presente na atividade, deixado isso a cargo de quem a estiver realizando. Sua resolução envolve também a mudança da base sexagesimal para a base decimal, e o exercício do pensamento algébrico, pois, mesmo que não faça sentido falar em álgebra neste momento histórico, para a aula contemporânea onde esta atividade vai ser realizada faz.

A quarta atividade trata da mensuração de dois campos de tamanhos distintos baseados em seus rendimentos. Este problema é uma transliteração do tablete VAT 8389 e fizemos questão de apresentar como eram resolvidos na época, e em seguida problematiza-lo de forma que possam ser trabalhados os dois métodos, o mesopotâmico e o atual.

As atividades foram propostas de forma que a História da Matemática pudesse trazer maior significação para o conteúdo matemático trabalhado, porém, não nos prendemos a somente trabalhar com a matemática presente nesta civilização antiga, pois não entendemos que seja este o intuito das UBP’s. É importante conhecermos e respeitarmos as culturas e formas de pensamento de outros povos, mas, não podemos assumi-las como unicamente correto e esquecermos as demais inclusive a nossa própria. Este foi o principal motivo de, mesmo se baseando em problemas de origem mesopotâmica, buscamos mesclar com a matemática contemporânea que é atualmente ensinada nas escolas.

5. REFERÊNCIAS

AABOE, Asger (1964). Episódios da História Antiga da Matemática/ Aaboe Asger; tradução de João Bosco Pitombeira.- Rio de Janeiro: SBM, 2013. 191 p.

BBC. A História da Matemática- BBC Legendado-Cap-1- A Linguagem do Universo 3/6.avi. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=1ZtwBVW9GhI>. Acesso em: 01 de nov. de 2016.

BOYER, Carl D (1906). História da Matemática. Trad. sob a direção de Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática* (1º e 2º ciclos do ensino fundamental). v. 3. Brasília: MEC, 1997a. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 1 nov. 2015

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio). Brasília: MEC, 2000. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 15 de nov. de 2016

CHAGAS, Elza M. P. F. Educação Matemática na Sala de Aula: Problemáticas e Possíveis soluções. Repositório Científico do Instituto Politécnico de Viseu. Revista Millenium, RE – Numero 29, 2004 (p.240-248). Disponível em < http://hdl.handle.net/10400.19/577 > .Acessado em: 20 set. de 2015.

D'AMBROSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates. SBEM. Ano II. N2. Brasilia. 1989. P. 15-19.

EVES, Howard. Introdução à história da matemática. Trad, sob a direção de Hygino H. Domingues, 5 ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

GONÇALVES, Carlos Henrique Barbosa. Notas sobre a Recepção da Matemática Mesopotâmica na Historiografia. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.14 n.3, pp.322-335, 2012.

KATZ, Victor J. **A history of mathematics** 3 ed. New York: Pearson Education, 2009, 976 p.

MENDES, Iran Abreu. Tendências metodológicas no ensino da matemática. Belém: Ed. UFPA, 2008

MENDES, Iran Abreu. Publicações sobre história da matemática com indicações bibliográficas e videográficas comentadas / Iran Abreu Mendes, Circe Mary Silva da Silva, - São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.

MENDES, Iran Abreu. História da matemática no ensino: entre trajetórias profissionais, epistemologias e pesquisas / Iran Abreu Mendes, - São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015. (Coleção História da Matemática para professores).

MIGUEL, Antonio. As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. Zetetiqué, São Paulo, v. 5, n. 8, p. 73-89, jul./dez. 1997.

MIGUEL, Antonio; BRITO; Arlete; CARVALHO, Dione; MENDES, Iran. História da matemática em atividades didáticas. 2. Ed. Ver. – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

MIGUEL, Antonio; MENDES, Iran Abreu. Mobilizing histories in mathematics teacher education: memories, social practices, and discursive games. *ZDM*, 2010, 42.3-4: 381-392.

PARANÁ.Secretaria de Estado da Educação do Paraná. Diretrizes Curriculares da Educação Básica-Matemática. Curitiba: 2008. Disponível em <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf>. Acesso em: 01 set. de 2015

PEREIRA, Daniele E. Correspondências científicas como uma relação didática entre história e ensino de matemática: O exemplo das cartas de Euler a uma princesa da Alemanha. 2014, 280 p. Tese de Doutorado- Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Rio Grande do Norte, 2014.

ROQUE, Tatiana História da Matemática – Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012

SOARES, Evanildo C. Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula. 2011, 141 p. Dissertação - Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Rio Grande do Norte, 2011.

TAVARES, Mariana O. A UBP e sua inserção no ensino de matemática: uma proposta inicial a partir da obra matemática lúdica. XII Encontro Nacional de Educação matemática. São Paulo, 2016. Disponível em: < http://sbempe.cpanel0179.hospedagemdesites.ws/enem2016/anais/pdf/5654_3141_ID.pdf>. Acesso em: 01 de ago. de 2016.