

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CAMPUS TOLEDO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

PABLO CHANG

APLICAÇÃO DA SÉRIE DE FOURIER COMO ANÁLISE ACÚSTICA
DE INSTRUMENTOS MUSICAIS

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

TOLEDO
NOVEMBRO/2016

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CAMPUS TOLEDO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

PABLO CHANG

APLICAÇÃO DA SÉRIE DE FOURIER COMO ANÁLISE
ACÚSTICA DE INSTRUMENTOS MUSICAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Toledo, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Adriano Gomes de Santana

TOLEDO
NOVEMBRO/2016

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM
MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

O Trabalho de Conclusão de Curso intitulado “Aplicação da Série de Fourier Como Análise Acústica de Instrumentos Musicais” foi considerado **APROVADO** de acordo com a ata nº __ de __/__/----

Fizeram parte da banca examinadora os professores:

Professor Orientador Me. Adriano Gomes de Santana

Professora Ma. Dione Ines Christ Milani 1

Professor Ma. Marcia Regina Piovesan 2

TOLEDO

2016

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

À UTFPR, pelo ambiente criativo e amigável que proporciona.

Ao meu orientador, Prof. Me. Adriano Gomes de Santana, pelo empenho dedicado à elaboração deste trabalho, pelo conhecimento ensinado de uma maneira criativa e bem-humorada, como também pelas suas palavras sábias e aconselhadoras nas quais levarei pela minha vida adiante.

A todos os professores, servidores e colegas da universidade, pela contribuição no meu processo de formação profissional, pelo companheirismo durante este período, de tanto que se dedicaram a mim e me valorizaram. Em especial, agradeço aos professores Marcelo Fernandes e Douglas José Coutinho pelas contribuições e ensinamentos sobre o conhecimento da física das ondas sonoras, ao técnico audiovisual Marcelo da Silva Fernandes pelo suporte tecnológico durante as gravações e às professoras Dione Ines Christ Milani e Marcia Regina Piovesan pela participação em minha banca.

Aos meus pais, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação.

Meus agradecimentos!

RESUMO

A música sempre fez parte da história da humanidade, a origem dela foi sensorial e rítmica. Mais tarde, graças a uma organização sistemática e lógica dos sons, foram inventadas as notas musicais. Desde séculos, o estudo do som vem ganhado cada vez mais espaço por meio de propriedades físicas das ondas sonoras e teorias matemáticas como, em especial, as séries de Fourier. Dessa forma, este trabalho tem por objetivo realizar uma pesquisa bibliográfica acerca das ondas sonoras, das definições e convergência da série de Fourier e da análise de Fourier. Como aplicação, será apresentada uma análise acústica dos instrumentos musicais. Foram gravados áudios de um violino e de uma flauta. Para analisar o timbre da caixa acústica do violino, foi gravado o áudio de um monocórdio, este construído especificamente para simular o violino sem a sua caixa acústica. Após isso, foram calculadas as suas séries de Fourier para representar as aproximações das ondas em funções trigonométricas e analisado o timbre dos instrumentos por meio dos gráficos de espectro. Além disso, buscou-se diminuir os ruídos dos áudios por meio de métodos experimentais. Assim, foi constatado que a série e a análise Fourier indicaram um método eficiente para caracterizar o timbre sonoro.

Palavras-chave: Séries de Fourier, Ondas sonoras, Instrumentos musicais.

ABSTRACT

Music has always been part of the history of humanity, its origin was sensorial and rhythmic. Later, because of a systematic and logical organization of the sounds, the musical notes were invented. For centuries, the study of sound has gained more and more space through the physical properties of sound waves and mathematical theories, especially the Fourier series. Thus, this work aims to perform a bibliographic research about sound waves, definitions and convergence of the Fourier series and Fourier analysis. As an application, an acoustic analysis of the musical instruments will be presented. Audios of a violin and a flute were recorded. To analyze the violin's acoustic box, the audio was recorded from a monochord, this one built specifically to simulate the violin without its acoustic box. After that, their Fourier series were calculated to represent the approximations of the waves in trigonometric functions and the timbre of the instruments was analyzed through the spectrum graphs. In addition, we sought to decrease audio noise by means of experimental methods. Thus, it was found that the series and the Fourier analysis indicated an efficient method to characterize sound timbre.

Keywords: Fourier series, Sound Waves, Musical Instruments.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

2.1	(a) Movimento de uma onda ocasionado por uma corda esticada quando se desloca para cima e para baixo, representando uma onda transversal. (b) Movimento de uma mola quando é esticada e provocado um pulso para frente ou para trás, representando as ondas longitudinais.	13
2.2	A onda de pressão e a representação do gráfico.	14
2.3	Instantâneo de um elemento de corda.	15
2.4	Representação de x em função do tempo para o movimento.	20
2.5	Ondas estacionárias em uma corda, esticada entre dois suportes.	23
2.6	Ondas sonoras de dois instrumentos musicais distintos, emitindo a mesma frequência, porém, de diferente timbre.	24
2.7	Decomposição de uma onda sonora de 440 Hz, em que o timbre do som gerado é a onda resultante dos harmônicos.	25
4.1	Espectro da função f	36
5.1	Instrumentos musicais utilizados para o experimento. (a) Violino. (b) Monocórdio para simular o violino sem a caixa de ressonância. (c) Flauta doce.	38
5.2	Tela de Audacity com uma gravação de áudio de uma flauta.	39
5.3	Violino à 261,63 Hz.	40
5.4	Onda sonora do som gravado do violino em 523,25 Hz.	41
5.5	Onda sonora do som gravado do monocórdio em 261,63 Hz.	42
5.6	Onda sonora do som gravado da flauta em 523,25 Hz.	42
5.7	Função $f(x)$ qualquer definida no intervalo de $-L$ a L	43
5.8	Onda sonora do violino em 523,25 Hz gerado pela série de Fourier	44
5.9	Onda sonora da flauta em 523,25 Hz gerado pela série de Fourier.	45
5.10	Funções f e g e sua diferença. (a) Função f com 336 elementos da amostra. (b) Função g com 756 elementos da amostra. (c) Função $f - g$	46
5.11	Espectro da função com 523 Hz como frequência fundamental e 700 Hz como a frequência do ruído.	47
5.12	Aproximação do espectro em nota Dó de 261,63 Hz. (a) Do violino. (b) Do monocórdio.	48
5.13	Aproximação do espectro da flauta doce em nota Dó de 523,25 Hz.	48
5.14	Filtro do áudio de 523,25 Hz do violino e da flauta doce pela análise de Fourier por meio de, respectivamente, 30 e 90 termos da série.	49

LISTA DE TABELAS

- 2.1 Algumas notas musicais da segunda e da terceira oitava e suas frequências. 26

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES	7
LISTA DE TABELAS	8
1 INTRODUÇÃO	11
2 ONDAS SONORAS	13
2.1 A FÍSICA DO SOM	13
2.2 EQUAÇÃO DA ONDA UNIDIMENSIONAL	14
2.3 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DAS ONDAS NA CORDA ESTICADA DE COM- PRIMENTO L	16
2.4 OSCILAÇÕES HARMÔNICAS	20
3 SÉRIES DE FOURIER	27
3.1 CONVERGÊNCIA	27
3.2 DEFINIÇÃO	31
4 ANÁLISE DE FOURIER	35
5 APLICAÇÃO NOS INSTRUMENTOS MUSICAIS	38
5.1 COLETA DE DADOS	38
5.2 SÉRIES DE FOURIER DOS ÁUDIOS	40
5.2.1 ADAPTAÇÃO DA SÉRIE DE FOURIER	40
5.2.2 GRÁFICOS DAS SÉRIES DE FOURIER	43
5.2.3 ALGUMAS OBSERVAÇÕES DOS RESULTADOS OBTIDOS	44
5.3 ANÁLISE DE FOURIER DOS ÁUDIOS	45
5.3.1 ADAPTAÇÃO DA TRANSFORMADA DE FOURIER	45
5.3.2 ESPECTROS SONOROS	47
5.4 MANIPULAÇÃO DOS ÁUDIOS	48
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	50
REFERÊNCIAS	50
APÊNDICES	52
Apêndice A	53

Apêndice B	54
Apêndice C	55
Apêndice D	56

1 INTRODUÇÃO

O som sempre foi considerado como o elemento primordial da natureza ao se manter presente na convivência do ser humano. Aliás, pode ser manifestado como barulho ou até como um conjunto de vários sons com algum significado. Desde a pré-história, o homem primitivo já havia descoberto a noção do ritmo com o andar, correr, cavalgar ou realizar qualquer tarefa com movimentos repetitivos. À vista disso, a origem da música foi sensorial e vocal. Bastava usar o próprio corpo, como a garganta, e objetos da natureza, como uma concha, o homem primitivo produzia a sua música corporal rítmica (FREDERICO, 1999).

Mais tarde, segundo Frederico (1999), utilizando-se de ossos e da cana de bambu, eles conseguiram construir flautas a partir de pequenos furos. Pois ao tampar cada furo, reproduzia um som diferente, na qual a sua sequência de sons resultavam em melodia. Assim, algumas formas musicais foram comuns em toda humanidade.

Por volta do ano 2500 a.C, os chineses já conheciam as relações entre a terça e a quinta de uma nota musical. Após isso, conseguiram formar uma escala com 5 notas diferentes aplicando a relação de quinta sequencialmente. Foi um sábio chinês Ling Lun que ordenou e sistematizou a escala pentatônica chinesa (FREDERICO, 1999).

Através dos Pitagóricos, no século VI a.C, e de uma corda de comprimento L esticada pelas extremidades com uma tensão fixa, os gregos descobriram várias frações entre intervalos que geravam sons consonantes com ótimo grau de harmonia. Segundo Simonato e Dias (2009), Pitágoras observou que, ao pressioná-la contra uma saliência em auto relevo, foi possível por em vibração apenas uma parte da corda, como por $1/2$, $2/3$ ou $3/4$ de seu comprimento total.

Em 1596, o príncipe chinês Chu Tsai-Yu escreveu um trabalho sobre o cálculo dos comprimentos de cordas para um instrumento, onde uma escala a oitava era dividida em intervalos iguais de mesmas proporções (RATTON, 2006). Já Andreas Werkmeister, em 1691, usou logaritmos para melhorar o valor destes intervalos ao longo das doze notas musicais (REGINATTO; MENONCINI, 2010).

Em termos de física, o som pode ser descrito como uma sensação fisiológica do ouvido recebido pelas frentes das ondas sonoras. E uma das referências em relação às ondas com as cordas vibrantes foi a série de Fourier. Foi no século XIX, que o matemático francês Jean Baptiste Joseph Fourier encontrou, em seu trabalho intitulado *Théorie mathématique de la chaleur* (Teoria matemática de condução do calor), um conjunto de soluções para a equação do calor e que estas soluções podem ser adaptadas também como soluções para a equação da onda, nos quais se constituem em séries de funções trigonométricas (SPIEGEL, 1976).

As séries de Fourier podem ser aplicadas em diversas áreas, como em processamento de imagens, condução de calor, sistemas de comunicação, processamento de áudio, entre demais áreas que desempenham naturezas ondulatórias.

Neste trabalho, será apresentado um estudo do comportamento do som gerado pelos instrumentos musicais utilizando-se dos conceitos da física e da análise de Fourier. No Capítulo 2, será fundamentado sobre as propriedades físicas da onda sonora, a equação da onda e algumas das soluções da onda. O estudo da série de Fourier, que é uma das condições da solução da onda, será detalhado no Capítulo 3, apresentando a sua definição e convergência da série. Em relação à transformada de Fourier e da sua inversa, que é um método de grande importância, será abordado no Capítulo 4 sobre a análise de Fourier.

Por conseguinte, o capítulo final será exposto uma aplicação experimental da série e da transformada de Fourier por meio de amostras de sons de instrumentos musicais. Será descrito acerca das características gerais dos dois instrumentos analisados, que é um violino e uma flauta doce, apresentando os gráficos das séries de Fourier encontradas e feito a análise de Fourier dos áudios por meio de gráficos de espectros. Posteriormente, será apresentado um método para a filtragem sonora, diminuindo os ruídos contidos nos áudios e, por fim, uma conclusão acerca do trabalho experimental com base na fundamentação teórica estudada.

2 ONDAS SONORAS

2.1 A FÍSICA DO SOM

Uma onda é qualquer perturbação de caráter físico que se propaga, seja no meio material ou em um campo de vetores, como os campos elétrico e magnético. Segundo a direção de perturbação (Figura 2.1), há ondas transversais, em que são aquelas que a perturbação do meio é perpendicular à direção de propagação da onda. Enquanto as ondas longitudinais são aquelas em que a direção que percorre a perturbação é paralela à direção da propagação da onda.

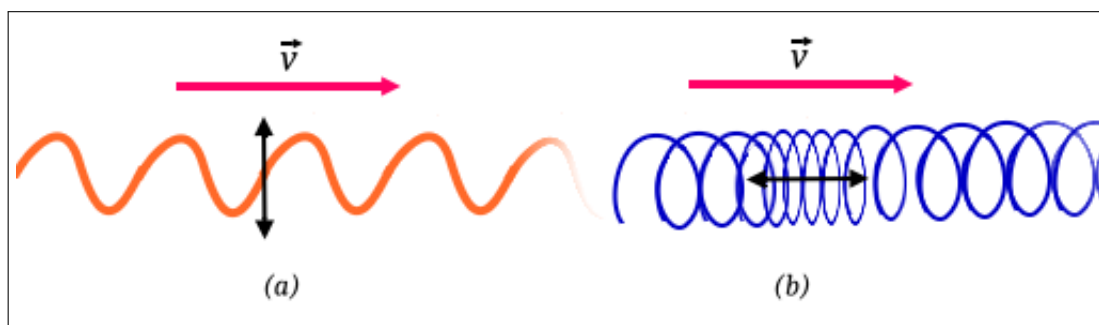


Figura 2.1: (a) Movimento de uma onda ocasionado por uma corda esticada quando se desloca para cima e para baixo, representando uma onda transversal. (b) Movimento de uma mola quando é esticada e provocado um pulso para frente ou para trás, representando as ondas longitudinais.

Fonte: Do autor, 2016.

As ondas sonoras no ar são o resultado de várias regiões de alta e baixa pressão que ocorrem em torno de um objeto em vibração como uma corda de um instrumento musical ou a película de um alto falante ou tambor. Por meio disso, uma onda sonora é definida genericamente como qualquer onda mecânica longitudinal. Para entender mais especificamente, considera-se uma onda sonora produzido por um êmbolo em um tubo de ar. Ao movimentar o êmbolo para a direita, por exemplo, empurra as moléculas do ar para a direita, aumentando a pressão do ar nessa região. Enquanto ao deslocar o êmbolo bruscamente para a esquerda, reduz a pressão do ar nessa região (HALLIDAY, 2009).

Em outras palavras, uma onda é uma função de duas variáveis

$$y = y(x, t) \quad (2.1)$$

que associa o nível a cada ponto x do espaço e cada instante de tempo t à pressão do ar y naquele ponto e instante (Figura 2.2). Em uma análise unidimensional x , pode ser

entendido como um número ao invés de um vetor posição.

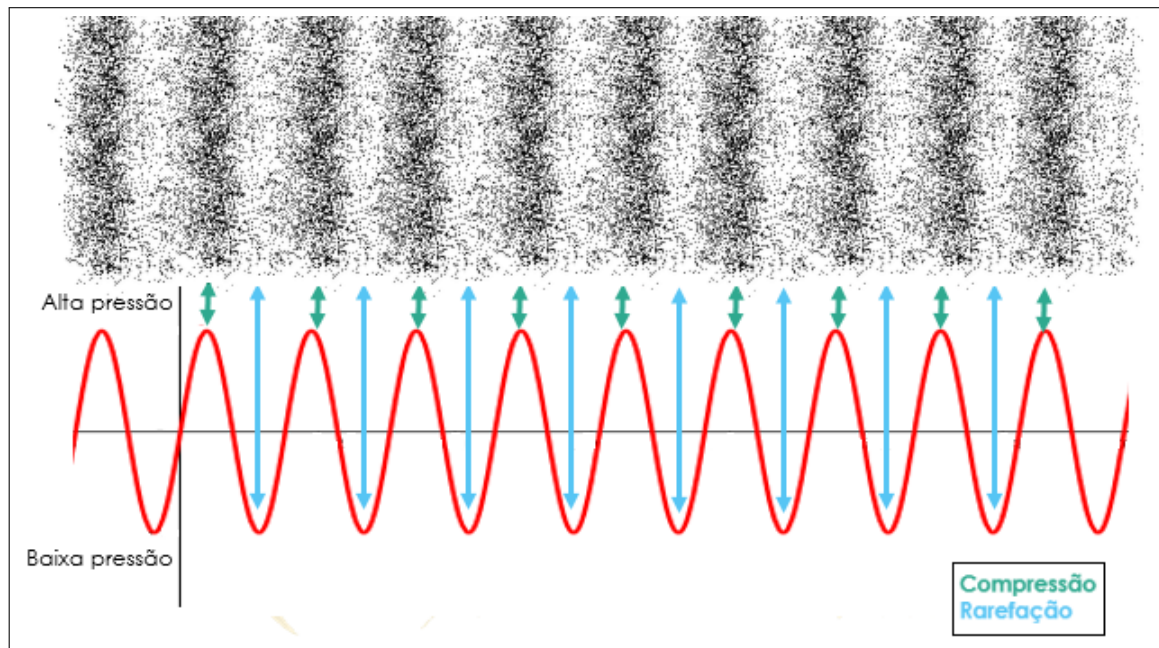


Figura 2.2: A onda de pressão e a representação do gráfico.
Fonte: Do autor, 2016.

2.2 EQUAÇÃO DA ONDA UNIDIMENSIONAL

Pelas leis da física, a função y da Equação (2.1) deve satisfazer

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + h(x, t, y) \quad (2.2)$$

onde $h(x, t, y)$ descreve a ação de forças externas ao meio sobre a onda e v a velocidade da onda. Por consequência, no caso das vibrações livres, a Equação (2.2) se torna

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.3)$$

Para demonstrar esta equação, supõe-se que uma onda passa por um elemento de uma corda esticada, em que o elemento se move perpendicularmente à direção de sua propagação. Pela Figura 2.3, o item (a) representa um elemento da corda, de massa dm e comprimento l , quando uma onda qualquer se propaga em uma corda esticada de massa específica μ ao longo de um eixo x horizontal. As forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 atuam sobre as extremidades esquerda e direita, ocasionando uma aceleração \vec{a} com uma componente vertical \vec{a}_y . Enquanto o item (b), representa a força na extremidade direita do elemento, em que se dirige ao longo de uma reta tangente (HALLIDAY, 2009).

Com a aplicação da segunda lei de Newton às componentes y ($F_{res,y} = ma_y$),

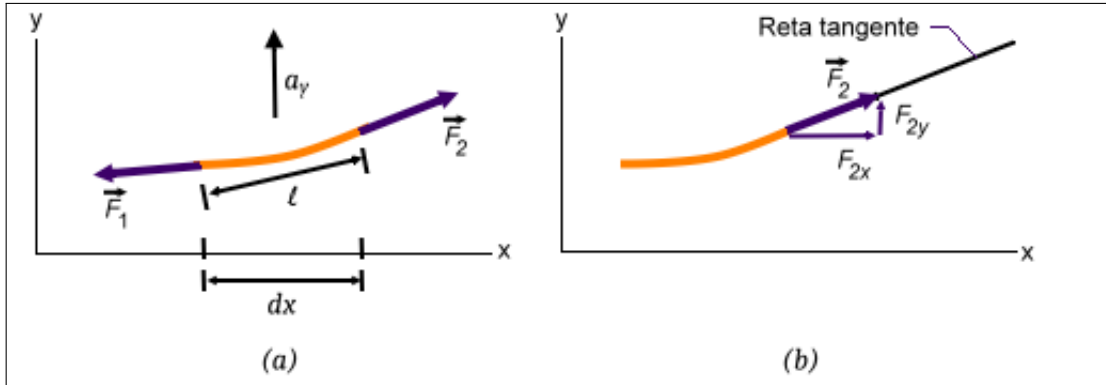


Figura 2.3: Instantâneo de um elemento de corda.
Fonte: Do autor, 2016.

segue-se que

$$F_{2y} - F_{1y} = dm a_y. \quad (2.4)$$

Analisando esta equação por partes, a massa dm do elemento pode ser escrita em termos de massa específico e do comprimento l do elemento como $dm = \mu l$. Aproximando a inclinação do elemento tanto quanto pequeno, isto é, $l = dx$, tem-se que:

$$dm = \mu dx. \quad (2.5)$$

A aceleração a_y da Equação (2.4) é a derivada segunda do deslocamento, isto é,

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} \quad (2.6)$$

Além disso, como a força \vec{F}_2 é tangente à corda na extremidade direita do elemento, pode-se relacionar a inclinação S_2 da extremidade direita da corda com os seus componentes da força da seguinte maneira:

$$\frac{F_{2y}}{F_{2x}} = S_2 \quad (2.7)$$

A força \vec{F}_2 possui um módulo igual à tensão τ na corda. Assim, é válido relacionar as componentes ao módulo $F_2 (= \tau)$ como se segue:

$$F_2 = \tau = \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2} \quad (2.8)$$

Assim, substituindo na Equação (2.7), apresenta-se:

$$F_{2y} = \tau S_2 \quad (2.9)$$

$$F_{1y} = \tau S_1 \quad (2.10)$$

De modo consequente, substituindo as Equações (2.5), (2.6), (2.9) na Equação (2.4,) obtém-se:

$$\begin{aligned}\tau S_2 - \tau S_1 &= (\mu dx) \frac{d^2 y}{dt^2} \\ \frac{S_2 - S_1}{dx} &= \frac{\mu}{\tau} \frac{d^2 y}{dt^2}.\end{aligned}\quad (2.11)$$

Apesar do elemento da corda ser curto, as inclinações S_1 e S_2 possuem uma diferença de valor infinitesimal dS , sendo S a inclinação em qualquer ponto da corda, isto é,

$$S = \frac{dy}{dx}.\quad (2.12)$$

Portanto, substituindo $S_2 - S_1$ na Equação (2.11) e utilizando a Equação 2.12, obtém-se o seguinte:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dx} &= \frac{\mu}{\tau} \frac{d^2 y}{dt^2} \\ \frac{d(dy/dx)}{dx} &= \frac{\mu}{\tau} \frac{d^2 y}{dt^2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{\mu}{\tau} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.\end{aligned}\quad (2.13)$$

Por fim, como a velocidade da onda é descrita como $v = \sqrt{\tau/\mu}$, a equação diferencial geral que governa a propagação de ondas de todos os tipos é apresentada como

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\quad (2.14)$$

2.3 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DAS ONDAS NA CORDA ESTICADA DE COMPRIMENTO L

Agora, suponha-se que a Equação (2.34) descreva uma onda que se propague em uma corda esticada de comprimento L fixa nas extremidades. Nesta situação, temos que

$$y(0, t) = y(L, t) = 0 \text{ para } t \geq 0.\quad (2.15)$$

Matematicamente, o que interessa é o deslocamento inicial da corda, sendo representado por $y(x, 0)$, e o modo de como ela é abandonada nesta posição, isto é, a velocidade inicial $\partial y(x, 0)/\partial t$. Contudo, as condições iniciais ficam

$$y(x, 0) = f(x), \text{ para } 0 \leq x \leq L,\quad (2.16)$$

$$\frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = g(x), \text{ para } 0 \leq x \leq L.\quad (2.17)$$

Segundo Figueiredo (2000), as condições acima é um caso de um problema de valor inicial e de fronteira. Este problema relaciona, em caso especial, as vibrações das cordas de uma harpa ou de um cravo, onde depois de solta para começar a sua vibração, a corda é deslocada. Assim, $f(x) \neq 0$ e $g(x) = 0$.

Assim, as equações

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \text{ em } \mathfrak{R}, \\ y(0, t) &= y(L, t) = 0, \text{ para } t \geq 0, \\ y(x, 0) &= f(x), \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x), \text{ para } 0 \leq x \leq L, \end{aligned} \quad (2.18)$$

descrevem a propagação de uma onda mecânica em uma corda de comprimento L e as extremidades fixas. Onde \mathfrak{R} é a semifaixa $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < L, t \geq 0\}$.

Para obter as soluções para o problema de valor inicial e de fronteira acima, utiliza-se o método da forma

$$y(x, t) = F(x)G(t) \quad (2.19)$$

e satisfazendo a Equação (2.18). Assim, substituindo na equação das ondas, tem-se que

$$\frac{F''}{F} = \frac{G''}{v^2 G}. \quad (2.20)$$

O lado esquerdo da igualdade acima depende somente de x , e o lado direito depende apenas de t . Portanto, são iguais a uma constante σ , isto é,

$$\frac{F''}{F} = \frac{G''}{v^2 G} = \sigma. \quad (2.21)$$

Logo, obtêm-se

$$F'' - \sigma F = 0 \quad (2.22)$$

e

$$G'' = \sigma v^2 G. \quad (2.23)$$

Observa-se que as condições de fronteira implicam em

$$F(0) = F(L) = 0$$

Portanto, nosso problema se resume a encontrar uma constante ∂ tal que

$$F'' - \sigma F = 0, \quad 0 < x < L, \quad (2.24)$$

$$F(0) = F(L) = 0, \quad (2.25)$$

possua solução não nula.

Conforme Junior (1981), um valor de σ para o qual a Equação (2.18) admite soluções não triviais é chamado um autovalor da Equação (2.18). Enquanto soluções não triviais correspondentes são denominadas de autofunções. Dessa forma, por se tratar de uma Equação Diferencial de Segunda Ordem Homogênea, existem três casos para o valor de σ :

i) Se $\sigma > 0$, a solução geral da Equação (2.24) é expressa como

$$F(x) = c_1 e^{\sqrt{\sigma}x} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}x} \quad (2.26)$$

Entretanto, se F satisfazer a condição da Equação (2.25), o par (c_1, c_2) deverá ser solução do sistema

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 e^{\sqrt{\sigma}L} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}L} &= 0 \end{aligned}$$

Como a única solução possível para esse sistema é $c_1 = c_2 = 0$, então implica que $F \equiv 0$, o que não interessa.

ii) Se $\sigma = 0$, então a solução geral da Equação (2.24) é expressa por

$$F(x) = c_1 x + c_2,$$

contudo, para satisfazer às condições expressas pela Equação (2.25), é necessário que

$$\begin{aligned} c_2 &= 0 \\ c_1 L + c_2 &= 0, \end{aligned}$$

o que resulta novamente em $c_1 = c_2 = 0$ e $F \equiv 0$.

iii) Se $\sigma < 0$, fazendo $\sigma = -\lambda^2$ então a solução geral da Equação (2.24) é expressa por

$$F(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \operatorname{sen} \lambda x. \quad (2.27)$$

Para satisfazer a condição da Equação (2.25), é necessário que

$$\begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_2 \operatorname{sen} \lambda L &= 0. \end{aligned}$$

Como a intenção é que $c_2 \neq 0$, então $\operatorname{sen}(\lambda L) = 0$, o que torna $\lambda L = n\pi$, sendo n um inteiro não-nulo. Dessa forma, pela solução geral (Equação (2.27)) e substituindo

$-\sigma = \lambda^2$, segue-se que

$$\lambda_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad (2.28)$$

em que são os autovalores do problema dado. Além disso, as funções

$$F_n(x) = \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (2.29)$$

são as autofunções do problema dado.

Da mesma forma, tendo em vista a segunda equação diferencial apresentada na Equação (2.23), pelo caso iii), a sua solução geral é da forma

$$G_n(t) = a_n \cos \frac{n\pi vt}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi vt}{L}, \quad (2.30)$$

Portanto, com as substituições das Equações (2.29) e (2.30) na Equação (2.19), obtém-se o seguinte, que satisfaz à Equação (2.14) e às condições de fronteira da Equação (2.18):

$$\begin{aligned} y_n(x, t) &= \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \left(a_n \cos \frac{n\pi vt}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi vt}{L} \right) \\ &= a_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi vt}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \text{sen} \frac{n\pi vt}{L} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Segundo Figueiredo (2000), se $u(x, t)$ e $v(x, t)$ forem soluções da Equação (2.14), então qualquer função da forma $au(x, t) + bv(x, t)$ com a e b constantes, também será uma solução da Equação (2.14). Isto é, uma combinação linear de soluções é também uma solução. Dessa forma, qualquer expressão da forma

$$\sum_{n=1}^N c_n y_n(x, t), \quad (2.32)$$

onde c_n são as constantes e os y_n as funções definidas na Equação (2.31) e soluções que satisfazem às condições da Equação (2.18). Este é o princípio da superposição de soluções.

Dessa forma, o candidato à solução $y(x, t)$ do problema de valor inicial e de fronteira exposto na Equação (2.18) será dado por

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi vt}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \text{sen} \frac{n\pi vt}{L} \right]. \quad (2.33)$$

Embora a solução aqui descrita se restringe a uma corda de comprimento L com extremidades fixas, a mesma solução é válida para outros casos de vibração como a câmara de ar de uma flauta ou a película de um tambor (HALLIDAY, 2009).

2.4 OSCILAÇÕES HARMÔNICAS

Uma solução particular da Equação (2.14) é a função

$$y(x, t) = y_m \text{sen}(kx - \omega t + \phi), \quad (2.34)$$

com y_m , k e ω constantes. Esta senoide (Figura 2.4) define o movimento harmônico simples em x para cada instante de tempo t , ou em t para cada ponto x do espaço. Ela é produzida pelo diapasão (a mais simples). Para este caso, as constantes y_m , k , ω e ϕ são denominadas amplitude, número de onda, frequência angular e fase da onda, respectivamente. Outros elementos que compõe uma onda é a velocidade, o período, comprimento e a frequência, que serão esclarecidas a seguir.

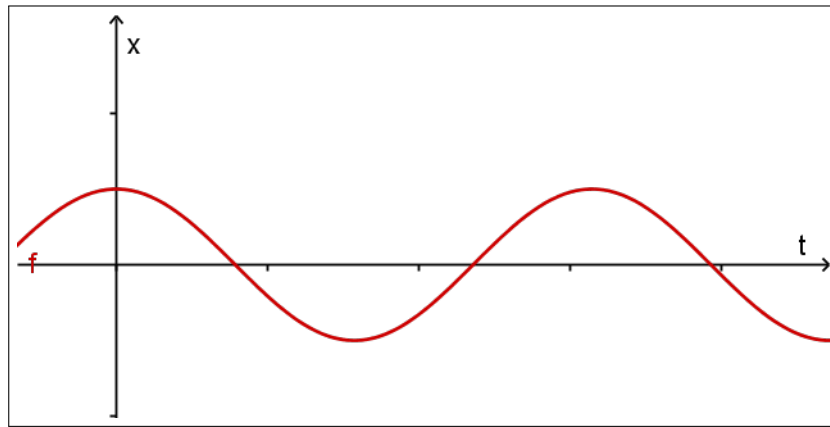


Figura 2.4: Representação de x em função do tempo para o movimento.

Fonte: Do autor, 2016.

Sobre a velocidade da onda, ela se propaga no eixo x . Dado uma variação de tempo Δt , a onda se desloca numa variação de espaço Δx tal que

$$y(x, t) = y(x + \Delta x, t + \Delta t).$$

Dessa forma, é válido que

$$\begin{aligned} y_m \text{sen}(kx - \omega t + \phi) &= y_m \text{sen}(k(x + \Delta x) - \omega(t + \Delta t) + \phi) \\ kx - \omega t + \phi &= k(x + \Delta x) - \omega(t + \Delta t) + \phi \\ k(x - x - \Delta x) &= \omega(t - t - \Delta t) \\ k\Delta x &= \omega\Delta t \\ \frac{\Delta x}{\Delta t} &= \frac{\omega}{k}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Logo, se v é a velocidade da onda no eixo x ,

$$v = \frac{\partial x}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k}. \quad (2.36)$$

Em relação ao período de y , é um intervalo de tempo T , tal que para todo x e t ,

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y(x, t + T) \\ y_m \text{sen}(kx - \omega t + \phi) &= y_m \text{sen}(kx - \omega(t + T) + \phi) \\ kx + \omega t + \phi &= kx + \omega(t + T) + \phi + 2n\pi \quad n \in \mathbb{Z} \\ 0 &= \omega T + 2n\pi \\ T &= -\frac{2n\pi}{\omega}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Para o menor valor possível de T , tomamos $n = -1$ e temos

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Já em relação à frequência f da onda, esta corresponde ao número de oscilações por segundo, isto é,

$$f = \frac{1}{T}$$

O comprimento da onda é o número λ tal que

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y(x + \lambda, t) \\ y_m \text{sen}(kx - \omega t + \phi) &= y_m \text{sen}(k(x + \lambda) - \omega t + \phi) \\ kx - \omega t + \phi &= k(x + \lambda) - \omega t + \phi + 2n\pi \quad n \in \mathbb{Z} \\ 0 &= k\lambda + 2n\pi \\ \lambda &= -\frac{2n\pi}{k}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Assim, novamente, tomando $n = -1$, o menor comprimento de onda é

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Dessa forma, encontra-se a seguinte relação entre as variáveis:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{2\pi} \cdot \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{k} \cdot \frac{\omega}{2\pi} = \lambda \cdot f = \frac{\lambda}{T}.$$

Em todo caso, em relação com a física, a velocidade de uma onda é dada por

$$\frac{\lambda}{T} = v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}},$$

portanto

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{T} \lambda &= \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \\ \lambda &= T \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Outra relação encontrada é apresentada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \lambda f &= \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \\ f &= \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Uma observação relevante é que a Equação (2.40) é usada na afinação de instrumentos musicais de corda. Uma vez que λ e μ são valores fixos, pode-se aumentar a tensão τ da corda para obter-se uma maior frequência.

Segundo Halliday (2009), define-se como ondas estacionárias a interferência mútua produzida por duas ondas senoidais de mesma amplitude e de mesmo comprimento de onda, se propagando em sentidos opostos em uma corda. Para entender mais claramente, supõe-se uma corda de violão, que está esticada entre duas presilhas. Após produzir uma onda senoidal começando com uma extremidade da direita, a sua propagação é refletida quando alcança a extremidade esquerda e retorna à extremidade direita. Por efeito, quando novas ondas vão sendo geradas, esse movimento oscilatório irá ocasionar ondas superpostas que interferem entre si, produzindo as chamadas ondas estacionárias.

De acordo com Figueiredo (2000), na resolução do problema de valor inicial e de fronteira feita na Secção 2.3, as funções encontradas na Equação (2.31) são as ondas estacionárias numa corda fixa de comprimento L . Os pontos x , tal que $n\pi x/L = k\pi$, isto é, $x = kL/n$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ com $\text{sen}(n\pi x/L) = 0$, permanecem parados se a vibração da corda satisfaz as condições iniciais descritas na Equação (2.18). Ou seja, esses pontos x representam os nós da onda estacionária, enquanto os pontos médios entre dois nós consecutivos são os antinós ou ventre.

No entanto, vale ressaltar que as ondas estacionárias não são produzidas sem existir a ressonância. Assim, se a corda é excitada em uma frequência que não é uma das frequências de ressonância, então não se forma uma onda estacionária. Novamente, supondo que uma corda fixada a duas presilhas em um comprimento L . Para expressar as frequências de ressonância, a cada extremidade deve-se apresentar um nó, pois as

extremidades são fixas.

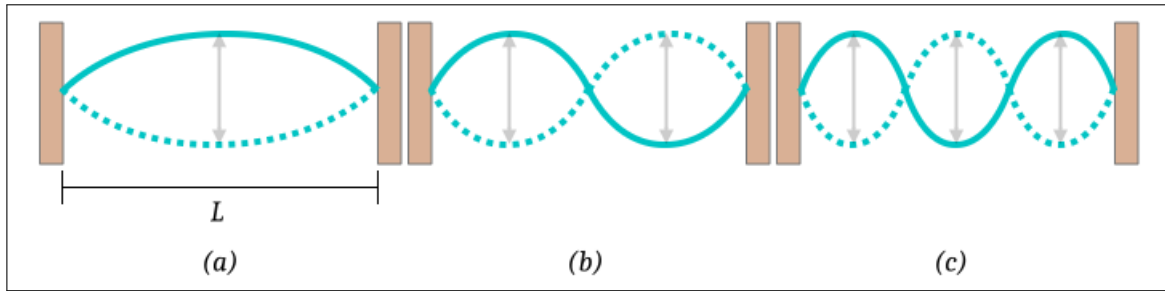


Figura 2.5: Ondas estacionárias em uma corda, esticada entre dois suportes.

Fonte: Do autor, 2016.

No item (a) da Figura 2.5, observa-se que o comprimento da corda é equivalente à metade do comprimento da onda, isto é,

$$L = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2L. \quad (2.41)$$

Em sequência, no item (b), o comprimento da corda é equivalente ao comprimento da onda,

$$L = \lambda = \frac{2\lambda}{2}. \quad (2.42)$$

Além disso, no item (c), o comprimento da corda é $3/2$ do comprimento da onda. Dessa forma,

$$L = \frac{3\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{3}. \quad (2.43)$$

Logo, para todo $n = 1, 2, 3, \dots$ e baseando-se nas Equações (2.41), (2.42) e (2.43), uma onda estacionária pode apresentar modos de oscilações em uma onda de comprimento L satisfazendo a seguinte equação:

$$\lambda = \frac{2L}{n}$$

Já as frequências de ressonância podem ser calculadas sabendo que a velocidade de uma onda progressiva é $v = \lambda f$, isto é,

$$f = \frac{v}{\lambda} = n \frac{v}{2L}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.44)$$

Assim, é chamado de modo fundamental ou primeiro harmônico o modo de oscilação com a menor frequência de ressonância. O segundo harmônico é quando $n = 2$, o terceiro harmônico quando $n = 3$ e assim por diante. A soma de todos os modos de oscilação é denominado de série harmônica, em que n é o número harmônico do n ésimo harmônico (HALLIDAY, 2009).

Dessa forma, mesmo que seja visto mais para frente sobre os coeficientes de Fourier, será adiantado a afirmação de que cada coeficiente da série de Fourier é um harmônico da onda estacionária. A seguir, será apresentado o que é a série de Fourier.

Supondo que $y(x, t) = G(t)F(x)$ e, pela solução obtida anteriormente para a equação da onda, obtém-se

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Isso indica que a onda sonora é nada mais que um somatório de oscilações harmônicas simples onde os números de onda de cada oscilação harmônica é $k = n\pi/L$ e, portanto, os possíveis comprimentos de onda são

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\frac{n\pi}{L}} = \frac{2L}{n}.$$

Isto é, a onda produzida em uma corda esticada terão os comprimentos de onda segundo a sequência

$$\frac{2L}{1}, \frac{2L}{2}, \frac{2L}{3}, \frac{2L}{4}, \frac{2L}{5}, \dots$$

Uma observação é que $2L$ é o harmônico fundamental que define a afinação do instrumento. Enquanto os demais harmônicos definem a propriedade do som denominada timbre.

Segundo Nussenzveig (1997), a característica que distingue um som musical de um ruído é a periodicidade. O que significa que um som musical precisa apresentar um certo período. Apesar disso, dois sons podem apresentar uma mesma intensidade e frequência, porém, de outra qualidade. A explicação física é que o ouvido humano reconhece, como por exemplo, a mesma nota Lá de duas ondas sonoras periódicas de mesma frequência, embora o retrato das ondas correspondentes sejam distintos (Figura 2.6).

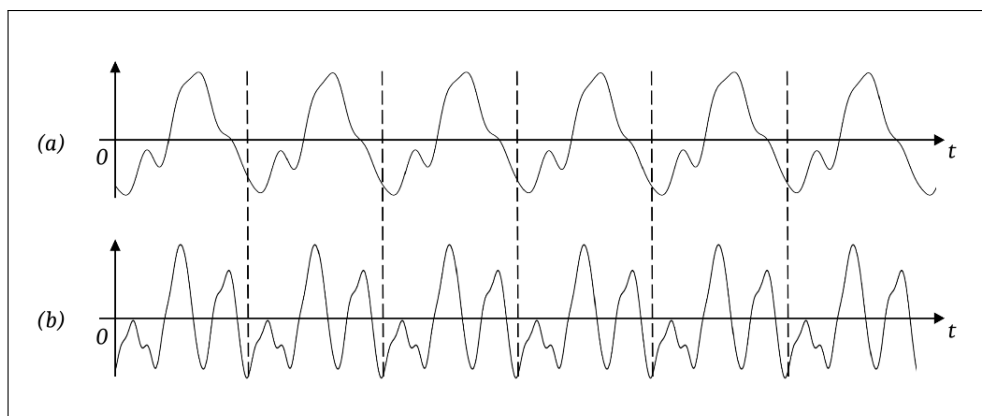


Figura 2.6: Ondas sonoras de dois instrumentos musicais distintos, emitindo a mesma frequência, porém, de diferente timbre.

Fonte: Do autor, 2016.

Vale salientar que o timbre dos instrumentos musicais é composto pela nota fundamental mais os harmônicos. Ou seja, se um som tem um período definido, ele possuirá uma frequência fundamental, que é o menor comprimento de onda, juntamente

com outras ondas envolvidas chamados harmônicos ou parciais harmônicos, estes múltiplos da frequência fundamental (RODRIGUES, 2009).

Para compreender melhor, a Figura 2.7 representa a decomposição de uma onda sonora de 440 Hz. O primeiro harmônico, que é o fundamental, possui a frequência de 440 Hz.

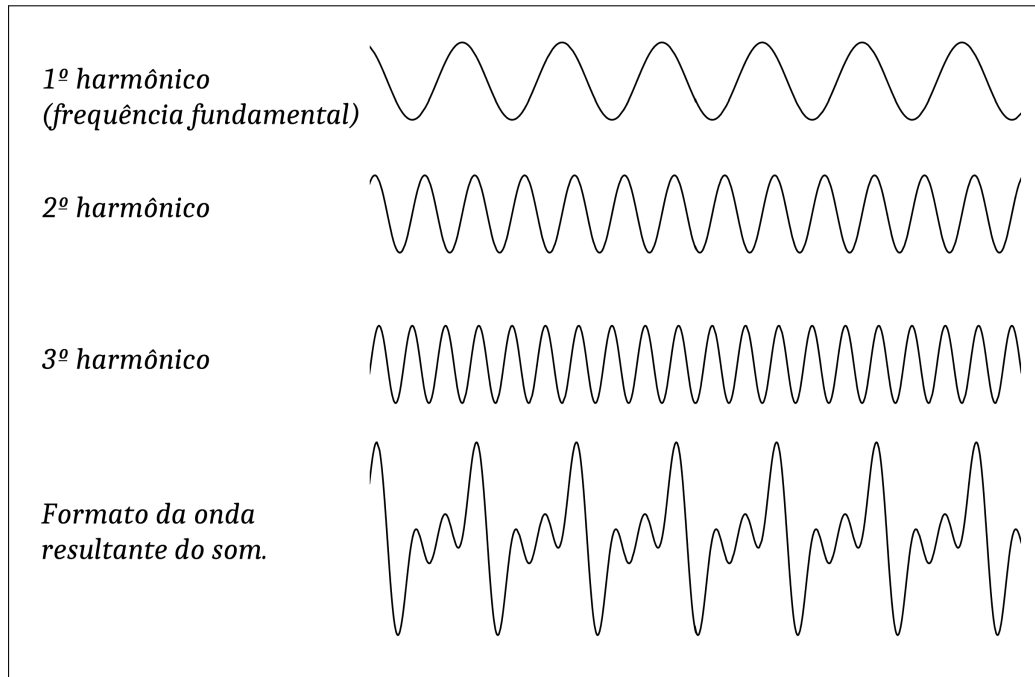


Figura 2.7: Decomposição de uma onda sonora de 440 Hz, em que o timbre do som gerado é a onda resultante dos harmônicos.

Fonte: Do autor, 2016.

Para descobrir a frequência dos demais harmônicos (2° , 3° e assim por diante), basta utilizar a Equação (2.44) do Capítulo 2, sobre a frequência de ressonância, obtendo:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \frac{v}{2L} = f \\
 f_2 &= 2\frac{v}{2L} = 2f \\
 f_3 &= 3\frac{v}{2L} = 3f \\
 f_4 &= 4\frac{v}{2L} = 4f \\
 &\dots \\
 f_n &= n\frac{v}{2L} = nf.
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Logo, para descobrir a frequência de cada harmônico f_n , basta multiplicar o número do harmônico n pela frequência fundamental f . Assim, supondo que a frequência fundamental seja 440 Hz, o segundo harmônico será 880 Hz, o terceiro 1320 Hz e assim por diante.

Notas	Frequências	Notas	Frequências	Notas	Frequências
Dó	261,63 Hz	Fá	349,23 Hz	Lá#	466,16 Hz
Dó#	277,18 Hz	Fá#	369,99 Hz	Si	493,88 Hz
Ré	293,66 Hz	Sol	392,00 Hz	Dó 2	523,25 Hz
Ré#	311,13 Hz	Sol#	415,30 Hz		
Mi	329,63 Hz	Lá	440,00 Hz		

Tabela 2.1: Algumas notas musicais da segunda e da terceira oitava e suas frequências.
Fonte: HÜMMELGEN, 1996.

Portanto, conforme Nussenzveig (1997), o que distingue no timbre de um som do outro está associado às proporções dos harmônicos contidos em cada som, podendo um ser mais rico que outro, mesmo que a frequência fundamental seja a mesma.

Segundo Hummelgen (1996), na escala musical, é possível aumentar a frequência até obter uma nova nota consoante, isto é, uma oitava acima. Fisicamente, isto corresponde a uma frequência dobrada. Por exemplo, a nota oitava acima de 440 Hz da nota Lá corresponde a 880 Hz, que também é nota Lá, porém, mais aguda.

Com o intuito de reforçar os conceitos, as notas musicais podem ser estabelecidas através das frequências das ondas sonoras (Tabela 2.1). Assim, como por exemplo, a nota Lá possui 440Hz, enquanto a nota Dó, 261,63Hz. As frequências mais altas estão associadas às notas musicais mais agudas e vice-versa.

3 SÉRIES DE FOURIER

3.1 CONVERGÊNCIA

Uma observação feita por Nussenzweig (1997), é que quanto maior o número de termos da série, melhor a aproximação. No entanto, a convergência é mais lenta e complicada no ponto de descontinuidade.

Para compreender as noções de convergência da série de Fourier, serão apresentados inicialmente alguns teoremas fundamentais sobre a convergência de seqüências e séries de funções. As demonstrações de cada uma delas poderão ser encontradas nos capítulos 4 e 10 de Lima (2014).

Primeiramente, é necessário definir uma seqüência de Cauchy, onde para todo $\epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}; m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \epsilon$. Assim, os teoremas a seguir relacionam as seqüências convergentes com uma seqüência de Cauchy da seguinte forma:

Teorema 3.1 *Toda seqüência convergente é de Cauchy.*

Lemma 3.2 *Toda seqüência de Cauchy é limitada.*

Teorema 3.3 *Toda seqüência de Cauchy de números reais é convergente.*

Após definir o que é uma seqüência de Cauchy, segue-se para a definição do que é uma seqüência de funções de Cauchy. No entanto, antes disso, é preciso definir uma seqüência de funções convergentes como $(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(n > n_0 \rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon)$. À vista disso, o teorema a seguir expõe os dois tipos de convergência:

Teorema 3.4 *Seja $f_n(x)$ uma seqüência de funções. Dizemos que $f_n(x)$ converge para $f(x)$*

i) Pontualmente se:

$$(\forall x \in D(f)), (\forall \epsilon > 0), (\exists n_0 \in \mathbb{N})(n > n_0 \rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon)$$

ii) Uniformemente:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in D(f))(n > n_0 \rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon)$$

Com isso, uma seqüência de funções de Cauchy é definido como para todo $\epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}; m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f(n)_n(x)| < \epsilon$, para todo $x \in X$.

Definição 3.5 *(Seqüência de funções de Cauchy) Para todo $\epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}; m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon$, para todo $x \in X$.*

Teorema 3.6 *Uma seqüência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente convergente se, e somente se, é uma seqüência de Cauchy.*

Teorema 3.7 *Se $f_n \rightarrow f$ uniformemente em X e todas as f_n são contínuas num ponto $a \in X$, então f é contínua no ponto a .*

Teorema 3.8 *Seja $X \in \mathbb{R}$ compacto. Se uma seqüência de funções contínuas $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ converge monotonamente para uma função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ então a convergência é uniforme.*

Para definir a série de Fourier, segundo Figueiredo (2000), as hipóteses necessárias estão em relação à periodicidade, integrabilidade e integrabilidade absoluta no intervalo $[-L, L]$. Sobre as duas últimas hipóteses, há dois casos a serem considerados. Sejam as funções $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas num intervalo limitado $[a, b]$.

- i) Caso a função f seja limitada, neste caso ela é integrável se o supremo das somas inferiores é equivalente ao ínfimo das somas superiores.
- ii) Caso a função f não seja limitada, a função f é integrável se o intervalo $[a, b]$ puder ser decomposto em um número finito de intervalos I_1, I_2, \dots, I_n , com $I_k = [a_k, b_k]$, tais que, para todos $\delta > 0$ e $\delta' > 0$, a função f é limitada e integrável em $[a_k + \delta, b_k - \delta']$ e os limites abaixo existirem:

$$\int_{a_k}^{b_k} f(x)dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a_k + \delta}^{b_k - \delta'} f(x)dx. \quad (3.1)$$

Dessa forma, a função f será absolutamente integrável se o valor absoluto $|f|$ for integrável em relação aos itens (i) e (ii) acima.

Com isso, de acordo com Figueiredo (2000), uma série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ apenas converge se a sucessão das somas parciais, isto é, das reduzidas, também converge. A sucessão de reduzidas é aquela cujo o termo geral é apresentada da seguinte maneira:

$$A_n = \sum_{j=1}^n a_j \quad (3.2)$$

Dessa forma, uma série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, onde $u_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ são funções reais definidas em um subconjunto I de \mathbb{R} , convergirá pontualmente se, para cada $x_0 \in I$ fixado, a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ convergir. Da mesma maneira, pode-se dizer que para todo $\epsilon > 0$ e $x_0 \in I$, existe um inteiro N , dependendo de ϵ e de x_0 tal que

$$\left| \sum_{j=n}^m u_j(x_0) \right| < \epsilon$$

para cada $n < m$, tais que $n \geq N$.

Por outro lado, uma série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformemente se, para todo $\epsilon > 0$, existir um inteiro N , dependendo apenas de ϵ (e não de x), tal que

$$\left| \sum_{j=n}^m u_j(x) \right| < \epsilon,$$

para cada $m > n \geq N$.

A seguir, será apresentado o teste M de Weirstrass, em que assegura a convergência uniforme, assim como também a convergência absoluta. De fato, uma série $\sum u_n$ convergirá absolutamente se a série $\sum |u_n(x)|$ dos valores absolutos convergir.

Teorema 3.9 *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ uma série de funções $u_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida em um subconjunto I de \mathbb{R} . Suponha que existam constantes $M_n \geq 0$ tais que $|u_n(x)| \leq M_n$, para todo $x \in I$, e que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ convirja. Então a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniforme e absolutamente em I .*

A vantagem de se usar este critério de convergência uniforme é que ele reduz o problema de verificar a convergência de uma série de funções àquele da convergência de uma série numérica. Ademais, a razão para se estudar a convergência uniforme é que essas séries que convergem uniformemente apresentam propriedades pertinentes como apresentadas a seguir.

Proposição 3.1 *Suponhamos que as funções u_n sejam contínuas e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ convirja uniformemente. Então a soma da série $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ é também uma função contínua.*

Proposição 3.2 *Suponhamos que as funções u_n sejam integráveis em um intervalo I e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ convirja uniformemente. Portanto,*

$$\int_I \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I u_n(x) dx. \quad (3.3)$$

Proposição 3.3 *Suponhamos que as funções $u_n(x)$ definidas em um intervalo I sejam continuamente deriváveis e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ das derivadas convirja uniformemente. Suponhamos ainda que, para um dado $x_0 \in I$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ convirja. Então*

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \quad (3.4)$$

Para que a função f garanta a convergência da série de Fourier num ponto fixado x para o valor $f(x)$, isto é, uma convergência pontual para $1/2[f(x+0) + f(x-0)]$,

o teste de Dini pode ser utilizado para obter condições suficientes. A demonstração do teorema abaixo pode ser encontrado no Capítulo 3 de Figueiredo (2000).

Teorema 3.10 (*Teste de Dini*) *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$ e ℓ^1 em $[-L, L]$. Fixado x , em $[-L, L]$, suponha que $f(x+0)$ e $f(x-0)$ existam e que exista $\kappa > 0$ tal que $\int_0^\kappa \left| \frac{g(x,t)}{t} \right| dt < \infty$. Então $s_n(x) \rightarrow [f(x+0) + f(x-0)]/2$, quando $n \rightarrow \infty$, tal que $s_n(x)$ é a série de Fourier.*

Para garantir a convergência uniforme da série de Fourier, o primeiro teorema seguinte mostrará a sua condição.

Teorema 3.11 *Seja f uma função periódica de período $2L$, contínua e com derivada primeira integrável e absolutamente integrável. Então, a série de Fourier de f converge uniformemente para f .*

Observa-se que no teorema acima a condição é que a função seja contínua em toda a reta. No entanto, quanto à derivada primeira permite-se que ela seja descontínua. Assim, se f for descontínua em um ponto x_0 , a série de Fourier não pode convergir uniformemente para f em nenhum intervalo que contenha x_0 (FIGUEIREDO, 2000). Portanto, para se ter uma convergência uniforme da série de Fourier em toda a reta, é necessário que a função f seja contínua.

Teorema 3.12 *Seja f periódica de período $2L$, seccionalmente contínua e tal que a derivada primeira é integrável e absolutamente integrável. Então a série de Fourier de f converge uniformemente para f em todo intervalo fechado que não contenha pontos de descontinuidade de f .*

Esse teorema afirma que, se f for contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, será verdade que a série de Fourier converge uniformemente para f neste intervalo $[a, b]$.

Segundo Figueiredo (2000), pode-se parecer que apenas as séries convergente são úteis, porém, não é a verdade. A divergência de uma série é um tanto relevante para muitos casos matemáticos. Além disso, vale ressaltar que a série de Fourier nem sempre converge no sentido comum. Além disso, quando uma série converge no sentido de que as médias aritméticas das reduzidas converge, dizemos que ela é Cesàro-somável, como é o exemplo da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

.

Por convicção, o teorema de Fejér afirma que a série de Fourier é s-somável, e também diz algo sobre a convergência nos pontos de descontinuidade.

Teorema 3.13 (Teorema de Fojér) *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua, periódica de período $2L$. Então,*

i) para cada x ,

$$\lim \sigma_n(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)].$$

ii) a sucessão (σ_n) converge uniformemente para f em todo intervalo fechado I que não contenha pontos de descontinuidade de f .

3.2 DEFINIÇÃO

Segundo (FIGUEIREDO, 2000), dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$, a série de Fourier de f , quando existe, é descrita como

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (3.5)$$

Este somatório deve ser entendido como convergência de séries.

Observa-se ainda que se a série converge, então f pode ser entendida como a posição inicial da corda no problema de valor inicial e de fronteira da Equação (2.18) (NUSSENZVEIG, 1997).

Supondo que a série (3.5) convirja uniformemente, segundo Lima (2014), a função f deve ser contínua. Integrando ambos os lados desta equação de $[-L, L]$ em x , tem-se

$$\int_{-L}^L f(x)dx = \frac{1}{2}a_0 \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \quad (3.6)$$

e, portanto,

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)dx, \quad (3.7)$$

uma vez que,

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = 0. \quad (3.8)$$

Observa-se ainda que a relação $\langle f, g \rangle = \int_{-L}^L f(x)g(x)dx$ é um produto interno dentro do espaço vetorial das funções contínuas. Além disso, para $n \leq 1$, o conjunto de funções $\cos(n\pi x/L)$ e $\text{sen}(n\pi x/L)$ serão duas a duas ortonormais para este produto interno. Nisso pode ser resumido nas seguintes integrais:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx &= 0 \text{ se } n, m \geq 1; \\ \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= \begin{cases} L & \text{se } n = m \geq 1, \\ 0 & \text{se } n \neq m, \quad n, m \geq 1 \end{cases} ; \\ \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx &= \begin{cases} L & \text{se } n = m \geq 1, \\ 0 & \text{se } n \neq m, \quad n, m \geq 1 \end{cases} ; \end{aligned}$$

A partir disso, multiplicando (3.5) por $\cos m\pi x/L$ para $m \geq 1$ fixado e integrando, obtém-se

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx = a_m L. \quad (3.9)$$

De modo equivalente, obtém-se

$$\int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx = b_m L. \quad (3.10)$$

Logo, por meio das Equações (3.7), (3.9) e (3.10), resultam os coeficientes de Fourier da função f :

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad n \geq 0; \quad (3.11)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \quad n \geq 1; \quad (3.12)$$

Conforme Figueiredo (2000), a exigência da integrabilidade de f é necessária para que (3.11) e (3.12) façam sentido. Ainda em Figueiredo (2000), observa que a condição de f ser absolutamente integrável é suficiente, mas não necessária, para que a Equação (3.5) convirja.

Da Equação (3.5), nota-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a_0 &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \end{aligned} \quad (3.13)$$

quando $n = 0$. É relevante ainda que

$$\begin{aligned}
 a_n \cos \frac{n\pi x}{L} &= \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \cos \frac{n\pi x}{L} \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{1}{2} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \cos \frac{n\pi x}{L} \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{1}{2} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{-n\pi x}{L} dx \cos \frac{-n\pi x}{L},
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

já que $\cos(-x) = \cos(x)$. De modo equivalente,

$$\begin{aligned}
 b_n \sin \frac{n\pi x}{L} &= \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \sin \frac{n\pi x}{L} \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \sin \frac{n\pi x}{L} + \frac{1}{2} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \sin \frac{n\pi x}{L} \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \sin \frac{n\pi x}{L} + \frac{1}{2} \int_{-L}^L f(x) \left(-\sin \frac{-n\pi x}{L}\right) dx \left(-\sin \frac{-n\pi x}{L}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \sin \frac{n\pi x}{L} + \frac{1}{2} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{-n\pi x}{L} dx \sin \frac{-n\pi x}{L},
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

pois $\sin(-x) = -\sin(x)$. Assim, pelas Equações (3.13), (3.14) e (3.15) pode-se escrever a série de Fourier de f como

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \tag{3.16}$$

A série de Fourier também pode ser vista em sua forma complexa. Assim, através da fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \tag{3.17}$$

e suas consequências (FIGUEIREDO, 2000),

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad e \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \tag{3.18}$$

implicam em

$$a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} = \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) e^{in\pi x/L} + \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \right) e^{-in\pi x/L}. \tag{3.19}$$

Portanto, o coeficiente c_n pode ser apresentado como

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \\
 &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\
 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left(\cos \frac{n\pi x}{L} - i \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx.
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

De modo geral, se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ for periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, então a forma complexa da serie de Fourier pode ser escrita como

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}. \tag{3.21}$$

4 ANÁLISE DE FOURIER

Segundo as Equações (3.21) e (3.20), a série de Fourier de uma função f de período $2L$ pode ser dada pela forma complexa

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx e^{in\pi x/L}. \quad (4.1)$$

Fazendo $\xi_n = n\pi/L$, tem-se que $L = n\pi/\xi_n$. Com essa substituição, a Equação (4.1) se torna

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-n\pi/\xi_n}^{n\pi/\xi_n} f(x) e^{-i\xi_n x} dx e^{i\xi_n x} \frac{\xi_n}{2n\pi}. \quad (4.2)$$

Observe que este último somatório possui um caráter semelhante a uma integral imprópria de $-\infty$ até ∞ . Para isso, basta entender que a expressão $\xi_n/n \sim d\xi$. Fazendo $\xi_n = \xi$ e $n \rightarrow \infty$, seria conveniente que a função f satisfizesse a igualdade

$$f(x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx e^{i\xi x} \frac{1}{2\pi} d\xi. \quad (4.3)$$

De fato, a Equação (4.3) é denominada Teorema da Integral de Fourier. Seu enunciado mais preciso é

Teorema 4.1 *Seja $f(x)$ uma função tal que $f(x)$ e $f'(x)$ são seccionalmente contínuas em qualquer intervalo finito. E que $f(x)$ é absolutamente integrável no intervalo $(-\infty, \infty)$. Então, o teorema da integral de Fourier afirma que a Equação (4.3) é válida.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Figueiredo (2000). Formas equivalentes para mesma integral de Fourier são as equações

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \xi(x-u) du d\xi \quad (4.4)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\xi(x-u)} du d\xi \quad (4.5)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi(x-u)} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\xi u} du \quad (4.6)$$

As funções

$$c(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \quad (4.7)$$

e

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} c(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad (4.8)$$

são denominadas, respectivamente, a análise de Fourier (ou transformada de Fourier) e síntese de Fourier (ou transformada inversa de Fourier).

Ao aplicar a transformada de Fourier da Equação (4.7) a uma função f de período $2L$, o resultado gráfico que se obtém é uma função com picos nos pontos da variável independente. O local onde aparecem tais picos representam os números que multiplicam os argumentos das funções trigonométricas dentro das séries de Fourier da função. Já as alturas dos picos, representam os coeficientes dos respectivos termos.

Para uma análise discreta dos harmônicos e dos coeficientes de uma função f periódica de período $2L$, preferimos optar por uma adequação mais razoável da transformada de Fourier a este trabalho. A saber,

$$c(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \left(\int_{-n}^n f(x) \cos(\xi x) dx + i \int_{-n}^n f(x) \text{sen}(\xi x) dx \right) \quad (4.9)$$

Para $f(x) = \text{sen}(x)$ a análise de Fourier é dada por

$$c(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{(-\xi - 1)\text{sen}(n\xi - n) + (\xi - 1)\text{sen}(n\xi + n)}{n(2\xi^2 - 2)} \quad (4.10)$$

que possui um ponto de descontinuidade em $\xi = 1$. Mas $\lim_{\xi \rightarrow 1} c(\xi) = 1/2$, metade do coeficiente para esta função. A outra metade aparece em $\lim_{\xi \rightarrow -1} c(\xi) = -1/2$ conforme a Figura 4.1.

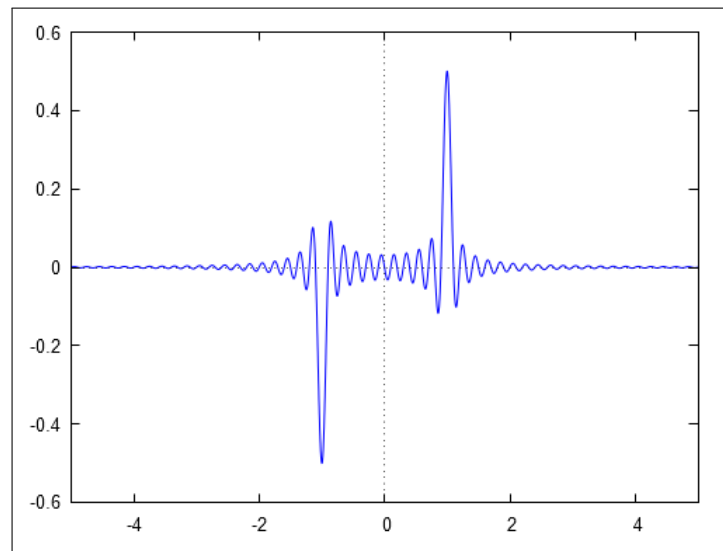


Figura 4.1: Espectro da função f .

Fonte: Do autor, 2016.

Fazendo $\xi = 2\pi\xi$ e $n = nL$ e multiplicando a Equação (4.9) obtemos a expressão

$$c(\xi) = \lim_{nL \rightarrow \infty} \frac{1}{nL} \left(\int_{-nL}^{nL} f(x) \cos(2\pi\xi x) dx + i \int_{-nL}^{nL} f(x) \text{sen}(2\pi\xi x) dx \right) \quad (4.11)$$

cujos picos aparecem exatamente nos lugares relacionados às frequências dos harmônicos que ocorrem nas séries de Fourier. Ao multiplicarmos a expressão por 2, a altura dos picos representará os coeficientes das séries de Fourier. E usaremos essa última expressão para analisar o espectro das séries de Fourier nos capítulos adiante.

5 APLICAÇÃO NOS INSTRUMENTOS MUSICAIS

Um dos objetivos do trabalho é de diferenciar o timbre dos sons gerados por instrumentos musicais. Isso pode ser facilmente observado com os gráficos das Figuras 5.8 e 5.9, gerados pelas séries de Fourier dos áudios captados. Todavia, o trabalho também intenciona em apontar possíveis melhorias nos instrumentos musicais, assim, serão apresentados os gráficos dos espectros de cada áudio e aplicar a transformada de Fourier para diminuir os possíveis sons de ruídos.

Os cálculos serão efetuados a partir do software livre *wxMaxima*. Serão exploradas as noções de convergência das séries e a comparação dos gráficos obtidos. Assim, após encontrar as funções trigonométricas de cada som, serão validados os resultados através do software gratuito *Geogebra*, que possui uma ferramenta de inserir qualquer função e tocar o som da função correspondente.

5.1 COLETA DE DADOS

Foram coletadas amostras de som de dois instrumentos musicais: um emitido por um violino e o outro por uma flauta doce soprano germânica. Os gráficos obtidos por meio de gravações estão em intensidade sonora (decibéis) em relação ao tempo. Para o violino, que é um instrumento musical com uma estrutura física rica em detalhes, será analisada também a influência da caixa de ressonância na composição do timbre do instrumento. Para isso foi construído um monocórdio, utilizando-se de uma corda de violino, para simular o instrumento musical sem a sua caixa de ressonância.

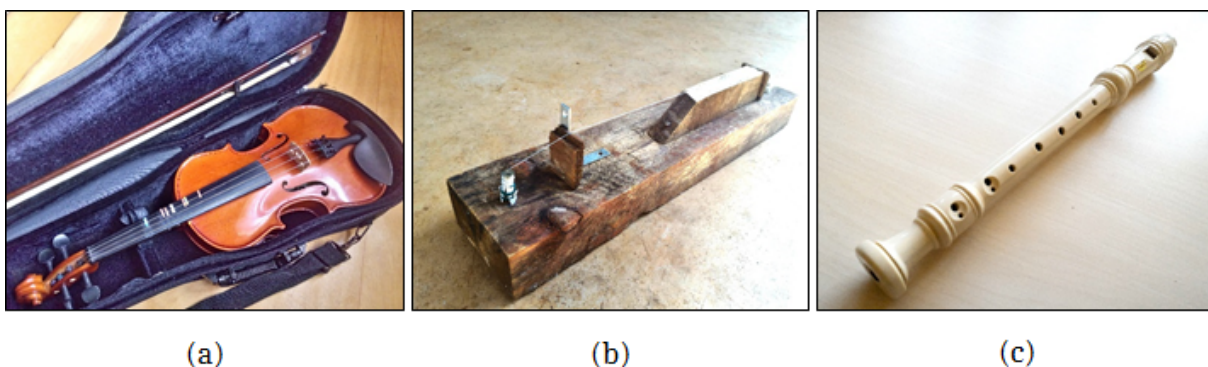


Figura 5.1: Instrumentos musicais utilizados para o experimento. (a) Violino. (b) Monocórdio para simular o violino sem a caixa de ressonância. (c) Flauta doce.

Fonte: Do autor, 2016.

As gravações, assim como a obtenção dos gráficos das ondas sonoras, foram

realizadas através do software gratuito *Audacity* (Figura 5.2). O instrumento de gravação é um fone de ouvido com microfone da marca *Logitech* modelo *H800 Wireless*. De cada gravação, foram obtidas amostras discretas dos elementos das intensidades sonoras separados por intervalos de tempo iguais a $2,26755 \times 10^{-5}$ segundos. A taxa de amostragem durante a gravação foi de 44.100 Hz, o formato de amostragem de 32-bit float e um canal de gravação (mono). As amostras salvas como listas dos elementos das amostras em arquivos no formato *.txt*.

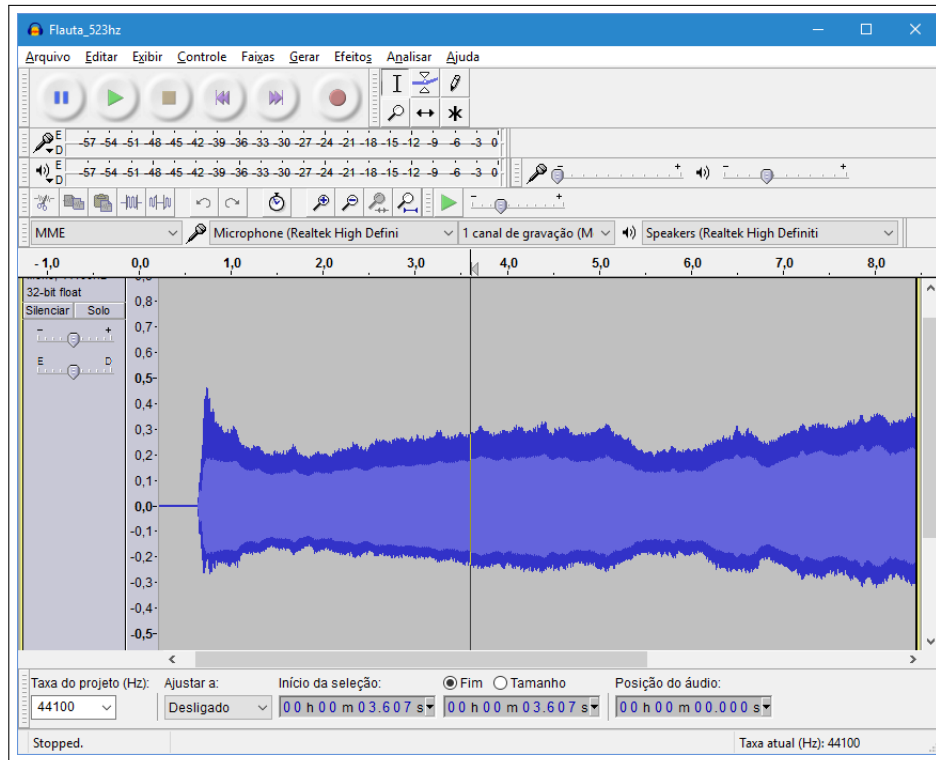


Figura 5.2: Tela de Audacity com uma gravação de áudio de uma flauta.
Fonte: Do autor, 2016.

O violino (Figura 5.1 (a)) empregado para a obtenção dos dados é da marca *Player (Student Model)* e de tamanho 3/4. Foram gravados dois arquivos: um de frequência 261,63 Hz e outro 523,25 Hz, ambos são notas Dó de oitavas distintas.

Nas duas gravações foram utilizados números de elementos da amostra necessários para se completar um múltiplo inteiro do período da afinação do instrumento. Para 261,63 Hz foram utilizados múltiplos de 168 elementos, enquanto para 523,25 Hz, foram utilizados múltiplos de 84 elementos.

As ondas sonoras dos áudios de 261,63 Hz e 523,25 Hz são representadas, respectivamente, pelas Figuras 5.4 e 5.3.

O monocórdio, representado na Figura 5.1 (b) foi construído com madeira, acoplada a uma corda de violino da nota Ré (nome referente à afinação que a corda possui no instrumento), e esticada com extremidades fixas no mesmo comprimento que ocorre no instrumento. Para tocar o monocórdio, utilizamos o arco da mesma forma que

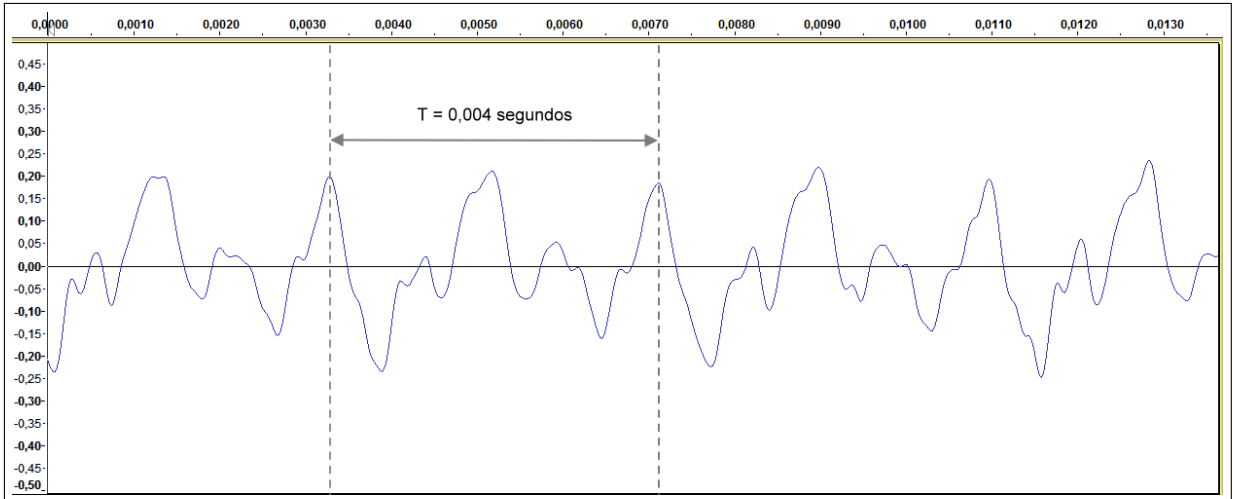


Figura 5.3: Violino à 261,63 Hz.

Gravação do som do violino sobre uma afinação de 261,63 Hz. Por consequência, seu período é $T = 261,63^{-1} = 3,822 \times 10^{-3}$

Fonte: Do autor, 2016.

é tocado o violino.

A onda sonora do monocórdio é apresentada na Figura 5.5. Comparando-se com a Figura 5.3 do violino de mesma frequência, a onda sonora do monocórdio se comporta de uma forma bem discrepante.

A flauta doce soprano germânica, representada na Figura 5.1 (c) é um instrumento de sopro da marca *Dolphin*. Para as amostras, também foram utilizadas as mesmas configurações das anteriores, contudo, foi gravado em 523 Hz. A onda sonora da flauta doce é apresentada na Figura 5.6.

Comparando as Figuras 5.4 e 5.6, que são as ondas do violino e da flauta em mesma frequência, respectivamente, pode-se notar que elas apresentam timbres totalmente diferentes. No entanto, todas essas análises são feitas por meio do seu aspecto visual. Nos próximos tópicos serão comparados as ondas sonoras gravadas por meio da linguagem matemática.

5.2 SÉRIES DE FOURIER DOS ÁUDIOS

Neste tópico, não há interesse de aplicar as séries de Fourier no monocórdio, visto que terá maior destaque em análise de Fourier na criação de espectro da onda sonora.

5.2.1 ADAPTAÇÃO DA SÉRIE DE FOURIER

Considerando que não conhecemos expressões algébricas das funções que representam as ondas sonoras dos instrumentos utilizados, faz-se necessário uma adaptação

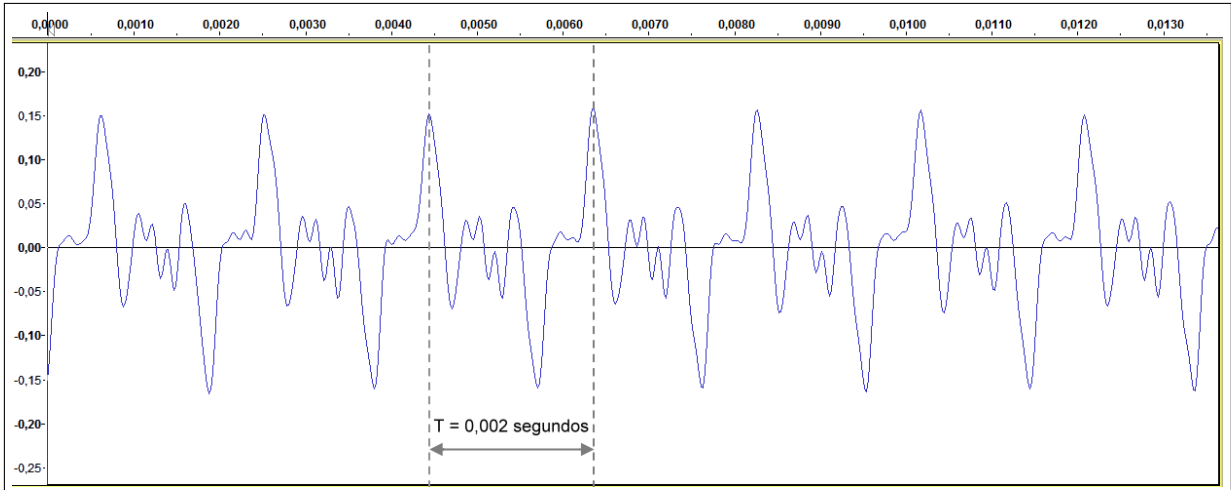


Figura 5.4: Onda sonora do som gravado do violino em 523,25 Hz.

Gravação do som do violino sobre uma afinação de 523,25 Hz. Por consequência, seu período é

$$T = 523,25^{-1} = 1,911 \times 10^{-3}$$

Fonte: Do autor, 2016.

acerca de tais funções para utilizarmos as séries e transformada de Fourier. Neste trabalho, estas funções são aproximadas por funções escada, isto é, definida por partes em intervalos de comprimentos fixos.

Para cada $x \in [-L + (i-1)h, -L + ih]$ define-se a função $f(x)$ delimitado pelo intervalo $[-L, L] \in \mathbb{R}$ dividido em c subintervalos de medida $h = 2L/c$. Seja $h(x) = k_i$ com $k_i = f(x_i)$ para algum $x_i \in [-L + (i-1)h, -L + ih]$ para cada $i = 1, 2, \dots, 2L/h$. Pela Equação (3.11), a adaptação será

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\
 &\cong \frac{1}{L} \int_{-L}^L h(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\
 &= \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{2L/h} \int_{-L+(i-1)h}^{-L+ih} h(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\
 &= \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{2L/h} k_i \int_{-L+(i-1)h}^{-L+ih} \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\
 &= \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{2L/h} \frac{k_i L}{n\pi} \left(\operatorname{sen} \frac{n\pi(-L+ih)}{L} - \operatorname{sen} \frac{n\pi(-L+(i-1)h)}{L} \right)
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Como nossos elementos de amostras começam a partir do instante $x = 0$, não é possível aplicar essa integral no intervalo $[-L, L]$. Entretanto, podemos fazer uma adequação, transladando o intervalo de integração para $[0, 2L]$. Esta adequação requer também uma translação das funções trigonométricas somando-se L aos seus argumentos.

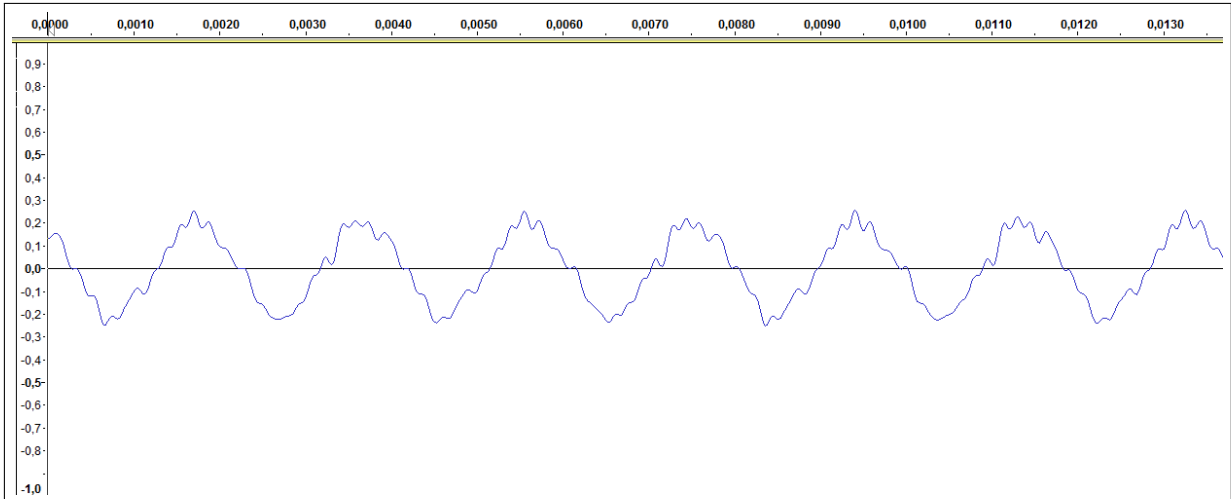


Figura 5.5: Onda sonora do som gravado do monocórdio em 261,63 Hz.

Fonte: Do autor, 2016.

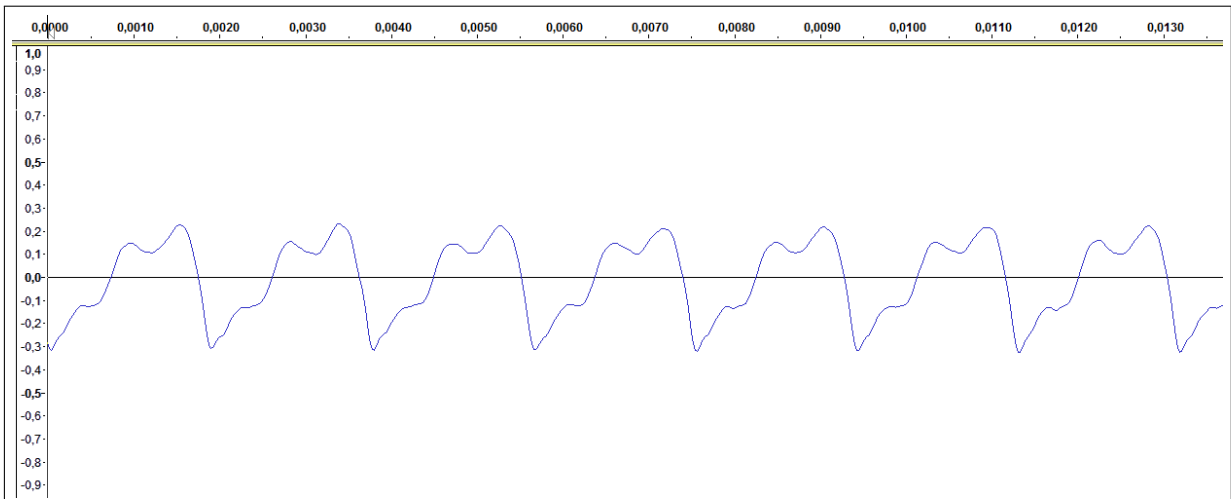


Figura 5.6: Onda sonora do som gravado da flauta em 523,25 Hz.

Fonte: Do autor, 2016.

Entretanto, esta translação resultará numa mudança de sinal nos casos em que n é ímpar. Assim, uma correção necessária é multiplicar $(-1)^n$ dentro do somatório. Portanto, o coeficiente adaptado será:

$$a_n = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{2L/h} (-1)^n \frac{k_i L}{n\pi} \left(\operatorname{sen} \frac{n\pi(-L + ih)}{L} - \operatorname{sen} \frac{n\pi(-L + (i-1)h)}{L} \right) \quad (5.2)$$

Analogamente, pela equação (3.12), ocorre também que

$$b_n = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{2L/h} (-1)^n \frac{k_i L}{n\pi} \left(-\cos \frac{n\pi(-L + ih)}{L} + \cos \frac{n\pi(-L + (i-1)h)}{L} \right) \quad (5.3)$$

As expressões acima são válidas para $n \neq 0$. Para $n = 0$, temos que $a_0 =$

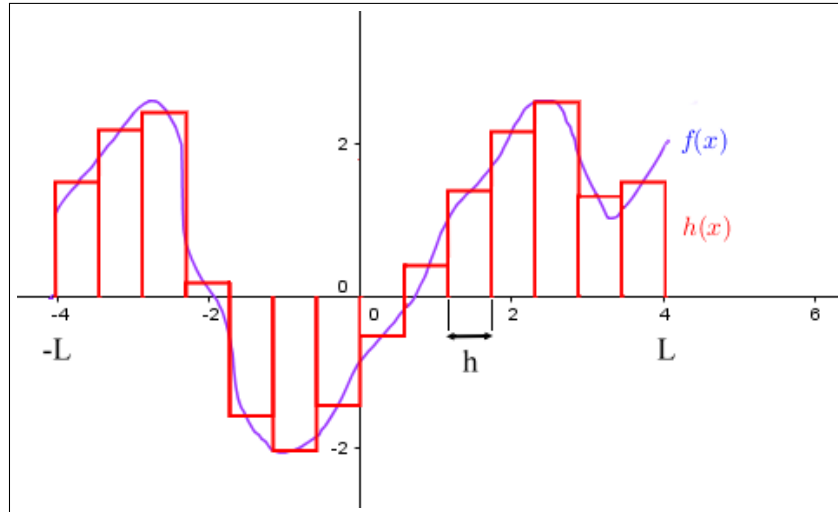


Figura 5.7: Função $f(x)$ qualquer definida no intervalo de $-L$ a L .
Fonte: Do autor, 2016.

$$\sum_{i=1}^{2L/h} h k_i \text{ e } b_0 = 0.$$

Para os cálculos, usa-se uma quantidade m de elementos da amostra que represente um período completo da onda sonora ou um múltiplo deste período. Como o intervalo de tempo que separa cada elemento da amostra é $2,26755 \times 10^{-5}$, então a relação entre o período T e m será $T = m \cdot 2,26755 \times 10^{-5}$. Sendo o período o inverso da frequência, tem-se que $f = (m \cdot 2,26755 \times 10^{-5})^{-1}$. Assim,

$$m = \frac{1}{f \cdot 2,26755 \times 10^{-5}} \quad (5.4)$$

Como m deve ser um inteiro, tomamos a aproximação $\lfloor m \rfloor$.

5.2.2 GRÁFICOS DAS SÉRIES DE FOURIER

Foram calculadas as série de Fourier do violino e da flauta em 523,25 Hz segundo comandos no Apêndice A. Através disso, foram utilizados $8 \cdot 168$ elementos da amostra, o que corresponde a 8 períodos completos nesta frequência, número este obtido pelos cálculos realizados segundo a Equação 5.4.

A Figura 5.8 mostra o gráfico da onda sonora original (a) e os gráficos para os primeiros termos da série de Fourier, a saber com 30, 60 e 90 termos representadas, respectivamente, pelos itens (b), (c) e (d).

Para a série de Fourier da flauta doce, a Figura 5.8 mostra o gráfico da onda sonora original (a) com os gráficos das séries de Fourier, a saber com 10, 20 e 30 termos representadas, respectivamente, pelos itens (b), (c) e (d). Tais termos foram escolhidos por apresentarem diferenças mais visíveis graficamente.

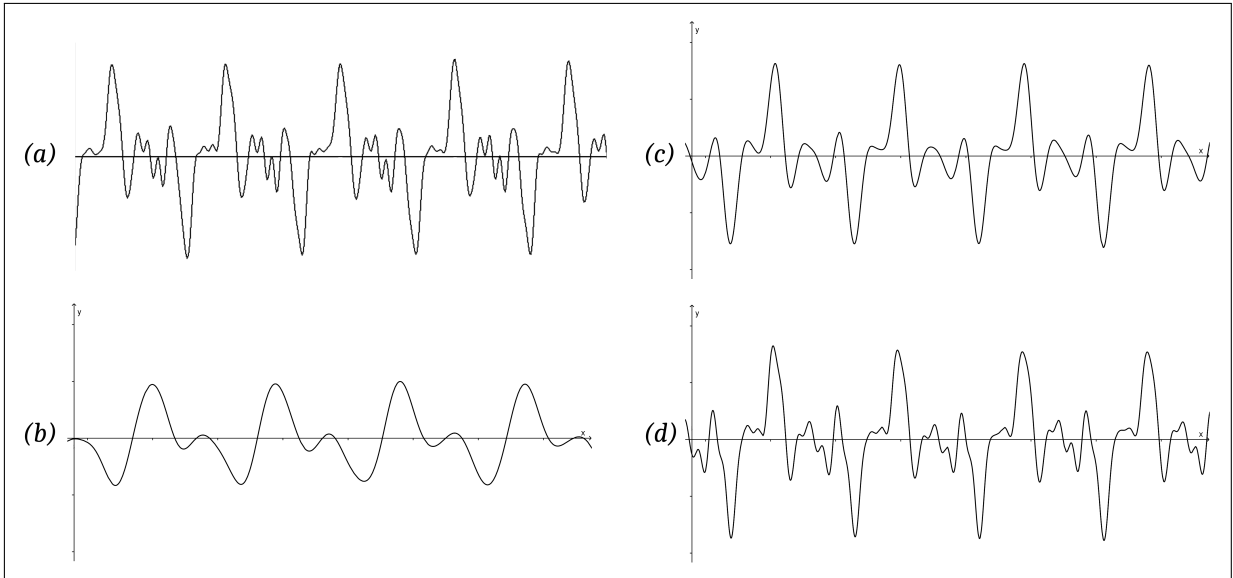


Figura 5.8: Onda sonora do violino em 523,25 Hz gerado pela série de Fourier . Fonte: Do autor, 2016.

5.2.3 ALGUMAS OBSERVAÇÕES DOS RESULTADOS OBTIDOS

Os sons do violino e da flauta, quando utilizado o comando `TocarSom[s(x), 1, 5]` no Geogebra, soam semelhantes aos áudios originais.

Ao realizar as gravações dos áudios dos instrumentos, foi considerado que os mesmos poderiam conter discrepância de suas afinações proveniente de ruídos do ambiente externo ou do modo que o instrumento era tocado, que não é necessariamente uniforme.

Se f é uma função de período $2L$, esta mesma função será periódica para um período igual a $2nL$ para qualquer $n = 1, 2, 3, \dots$. Sendo assim, para calcular a série de Fourier de f , o intervalo de integração poderá ser tanto o intervalo fundamental $[-L, L]$, como um múltiplo deste intervalo da forma $[-nL, nL]$.

Dessa forma, como mencionado anteriormente, observou-se que o número de elementos da amostra utilizados para obter a série de Fourier da função dos instrumentos musicais, deveriam representar um múltiplo inteiro do período da função. Isso ficou claro, quando foram utilizados 300 elementos da amostra e foi obtido uma série de Fourier representando um áudio na frequência de 293,66 Hz ao invés de 523,25 Hz do áudio original.

Considerando que os ruídos externos presentes na gravação possuem frequências diferentes da afinação do instrumento, conjecturou-se que a utilização da quantidade de elementos da amostra representando múltiplos diferentes do período fundamental resultaria em uma discrepância da série de Fourier proveniente destes ruídos.

Para tornar a diferença mais específica, foram denominados $f(x)$ e $g(x)$ as

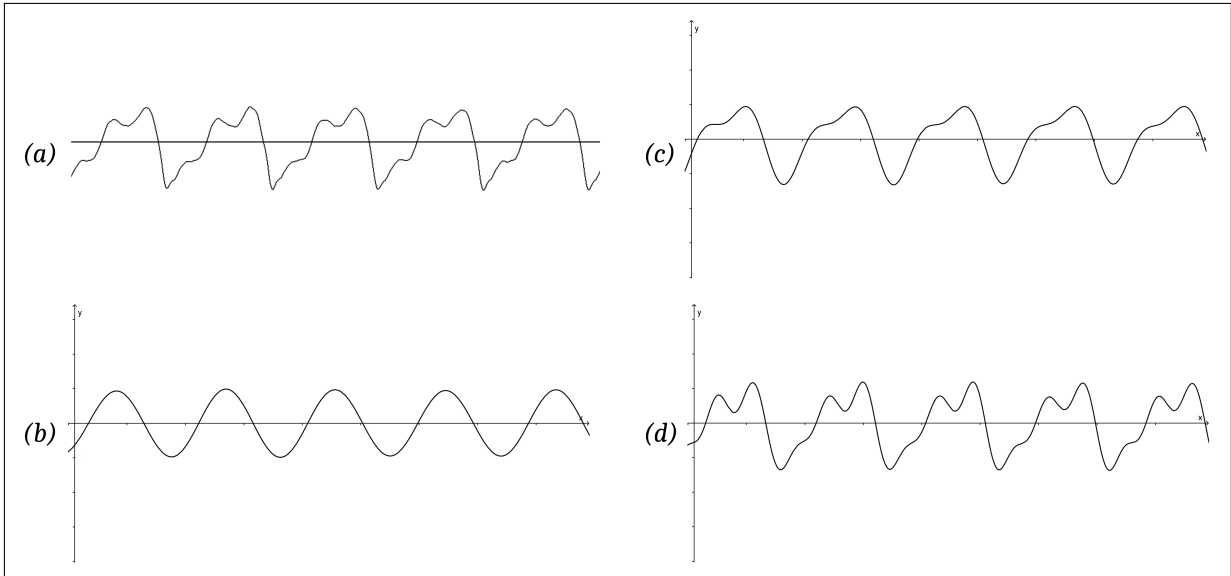


Figura 5.9: Onda sonora da flauta em 523,25 Hz gerado pela série de Fourier.
Fonte: Do autor, 2016.

funções com 100 termos das séries de Fourier correspondentes a 336 e 756 elementos da amostra, respectivamente. Após isso, foi efetuado $f(x) - g(x)$. Numa perspectiva ótima, f e g deveriam representar a mesma função e, portanto, a sua diferença seria identicamente nula, o que não ocorreu como mostra a Figura 5.10.

5.3 ANÁLISE DE FOURIER DOS ÁUDIOS

5.3.1 ADAPTAÇÃO DA TRANSFORMADA DE FOURIER

De acordo com (CERQUEIRA et al., 2000), torna-se inviável aplicar a transformada de Fourier computacionalmente, pois é impossível processar os dados com o limite de integração de $-\infty$ a ∞ . Pois os dados são obtidos de forma discreta. Com isso, faz-se necessário uma adaptação na transformada de Fourier.

Pela definição da transformada expressa na Equação 4.7 e por meio da Fórmula de Euler (3.17), é válido explicar a transformada da seguinte forma, que representa apenas a parte complexa da função $c(\xi)$ da Equação 4.11:

$$\begin{aligned} b(\xi) &= \frac{1}{nL} \int_{-nL}^{nL} f(x) \text{sen}(2\pi x \xi) dx \\ &= \frac{1}{nL} \int_0^{2nL} f(x) \text{sen}(2\pi(x - nL)\xi) dx \end{aligned} \quad (5.5)$$

Temos que $f \approx h$ onde $h(x) = k_i$ constante se $x \in [(i - 1)h, ih]$ com $i = 1, \dots, 2nL/h$.

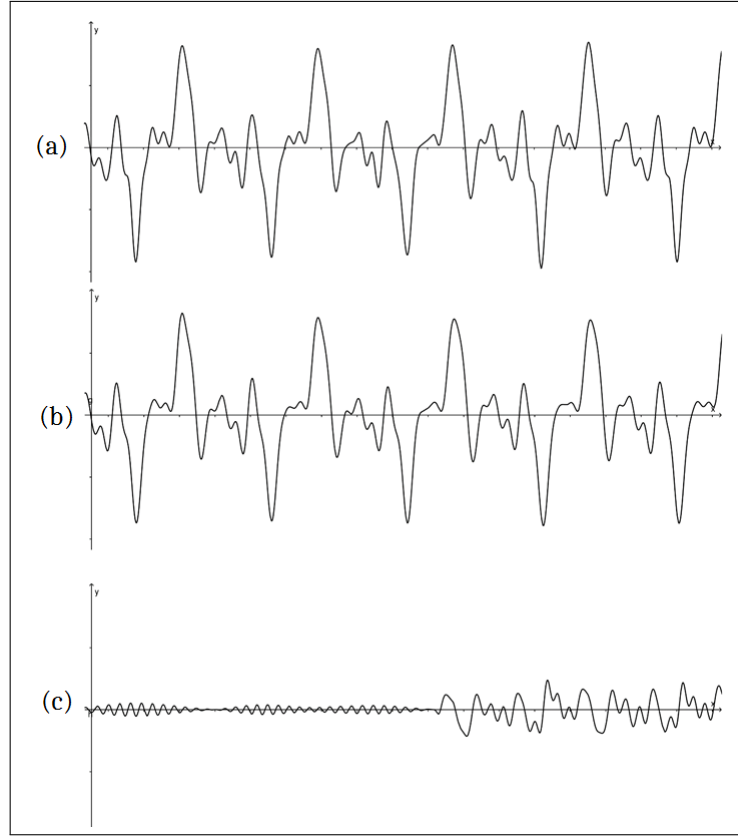


Figura 5.10: Funções f e g e sua diferença. (a) Função f com 336 elementos da amostra. (b) Função g com 756 elementos da amostra. (c) Função $f - g$.

Fonte: Do autor, 2016.

$$\begin{aligned}
 b(\xi) &= \frac{1}{nL} \sum_{i=1}^{2nL/h} \int_{(i-1)h}^{ih} k_i \text{sen}(2\pi\xi(x - nL)) dx \\
 &= \sum_{i=1}^{2nL/h} k_i \frac{1}{2\pi\xi} [\cos(2\pi n\xi L - (2\pi h i - 2\pi h)\xi) - \cos(2\pi n\xi L - 2\pi h i \xi)] \quad (5.6)
 \end{aligned}$$

Substituindo nL simplesmente por L , assim, $2nL/h$ será simplesmente $2L/h$, implicando em

$$b(\xi) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{2L/h} \frac{k_i}{2\pi\xi} (-\cos(2\pi\xi(-L + ih)) + \cos(2\pi\xi(-L + (i-1)h))) \quad (5.7)$$

Da mesma forma,

$$a(\xi) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{2L/h} \frac{k_i}{2\pi\xi} (\text{sen}(2\pi\xi(-L + ih)) - \text{sen}(2\pi\xi(-L + (i-1)h))) \quad (5.8)$$

A seguir, será apresentado um exemplo de espectro utilizando uma função $f(x) = \text{sen}(2\pi 523x) + 0,5\text{sen}(2\pi 700x)$, onde a frequência fundamental da onda é de 523 Hz e o suposto ruído é de 700 Hz. Os comandos no WxMaxima se encontram em Apêndice B. Enquanto o gráfico do espectro, que é o módulo do coeficiente encontrado, é apresentado pela Figura 5.11. Observa-se que os dois grandes picos, evidentemente, marcam os harmônicos que são exatamente a 523 Hz e 700 Hz.

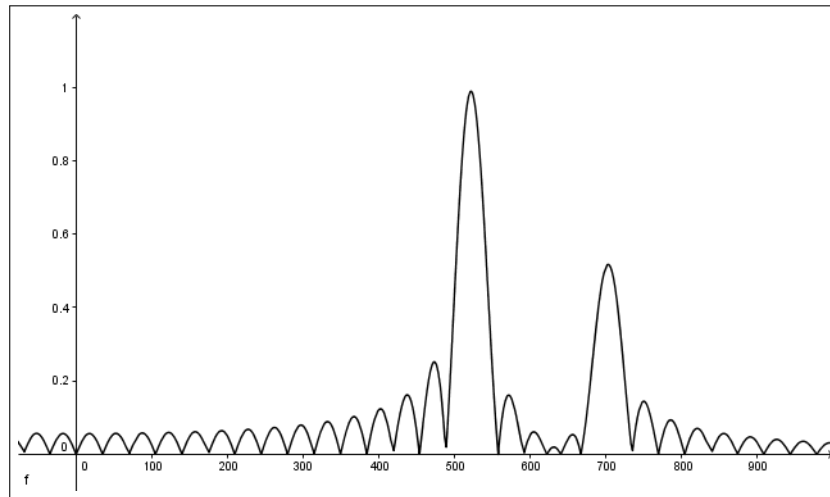


Figura 5.11: Espectro da função com 523 Hz como frequência fundamental e 700 Hz como a frequência do ruído.

Fonte: Do autor, 2016.

5.3.2 ESPECTROS SONOROS

A partir dos cálculos pelo WxMaxima, em que a sequência de comandos é apresentada no Apêndice C, foi possível encontrar as funções que determinam os espectros sonoros do áudios obtidos do violino, do monocórdio e da flauta doce.

O espectro do violino é representado pela Figura 5.12 (a). Nota-se que há diversos picos que não correspondem aos harmônicos, que descrevem os ruídos presentes no áudio. Já o espectro do monocórdio é apresentado pela Figura 5.12 (b). De fato, há uma diferença notória em relação à Figura 5.12 (a) do violino, pois o espectro do violino apresenta mais picos com alturas predominantes que o do monocórdio. Evidenciando que o timbre do violino é mais rico em questão sonora. Outra observação relevante é que o primeiro harmônico, que é o harmônico fundamental de 261,63 Hz, apresentou uma baixa intensidade em relação aos demais harmônicos.

Para evidenciar como é o comportamento do timbre da flauta doce por meio de espectro, apresentado pela Figura 5.13. Observa-se que os picos com alturas predominantes se mostram em menos quantidade que a do violino, aparentando ser mais simples. O pico mais alto do espectro ocorre no harmônico fundamental, que é de 523 Hz. E um

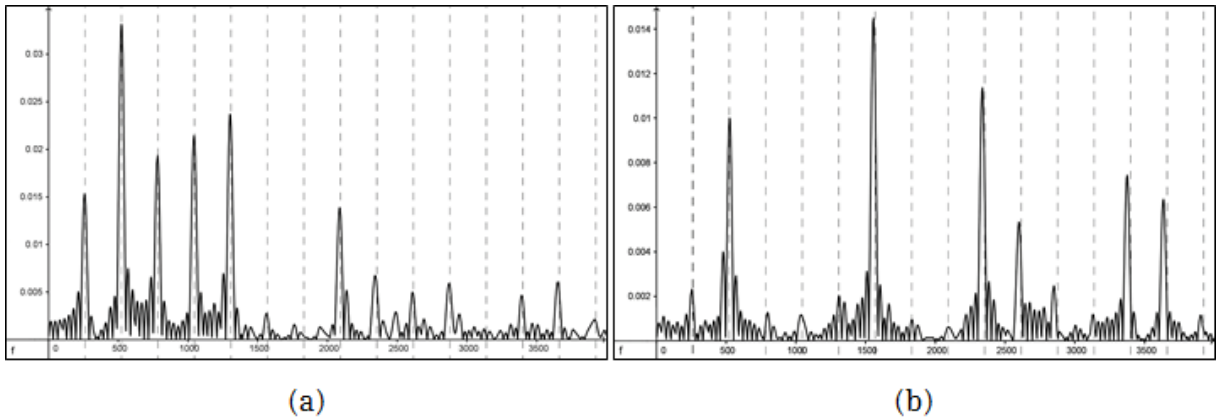


Figura 5.12: Aproximação do espectro em nota Dó de 261,63 Hz. (a) Do violino. (b) Do monocórdio.

As retas tracejadas interceptam os múltiplos do harmônico fundamental.

Fonte: Do autor, 2016.

fato surpreendente é que o espectro aparenta seguir um padrão nas alturas, em forma de escada. Enquanto o espectro do violino não rege um formato intuitivo.

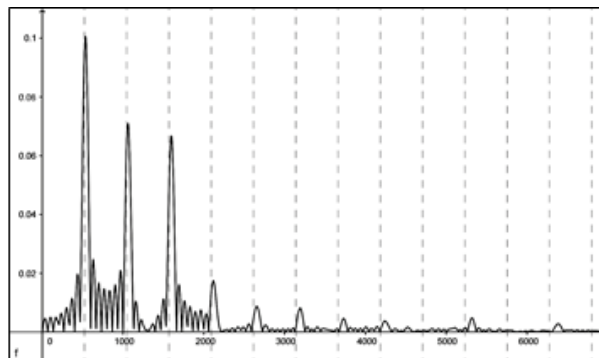


Figura 5.13: Aproximação do espectro da flauta doce em nota Dó de 523,25 Hz.

Fonte: Do autor, 2016.

5.4 MANIPULAÇÃO DOS ÁUDIOS

A partir das funções $a(\xi)$ e $b(\xi)$ descritas, respectivamente, nas Equações (5.8) e (5.7) para a análise de Fourier dos áudios, foram designados $a(s_i)$ e $b(s_i)$, em que s_i representa os múltiplos inteiros do harmônico fundamental, isto é, $523,25 \cdot 1; 523,25 \cdot 2; \dots; 523,25 \cdot i$, com $i = 1, 2, 3, \dots$

Após isso, foi calculada uma aproximação com os primeiros termos da série de

Fourier da forma

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a(s_i) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b(s_i) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \quad (5.9)$$

Com isso, serão eliminados os picos que ocorrem fora dos harmônicos.

Por meio dos comandos em Apêndice D, foram calculadas as séries de Fourier dos sons filtrados, com os gráficos do violino e da flauta apresentadas pela Figura 5.14. O item (a) é a onda sonora do violino antes do filtro; na (b) apresenta-se a onda sonora do violino depois do filtro; na (c) a onda sonora da flauta antes do filtro e na (d) a onda sonora da flauta depois do filtro. Os sons reproduzidos por meio do comando do Geogebra soaram nitidamente.

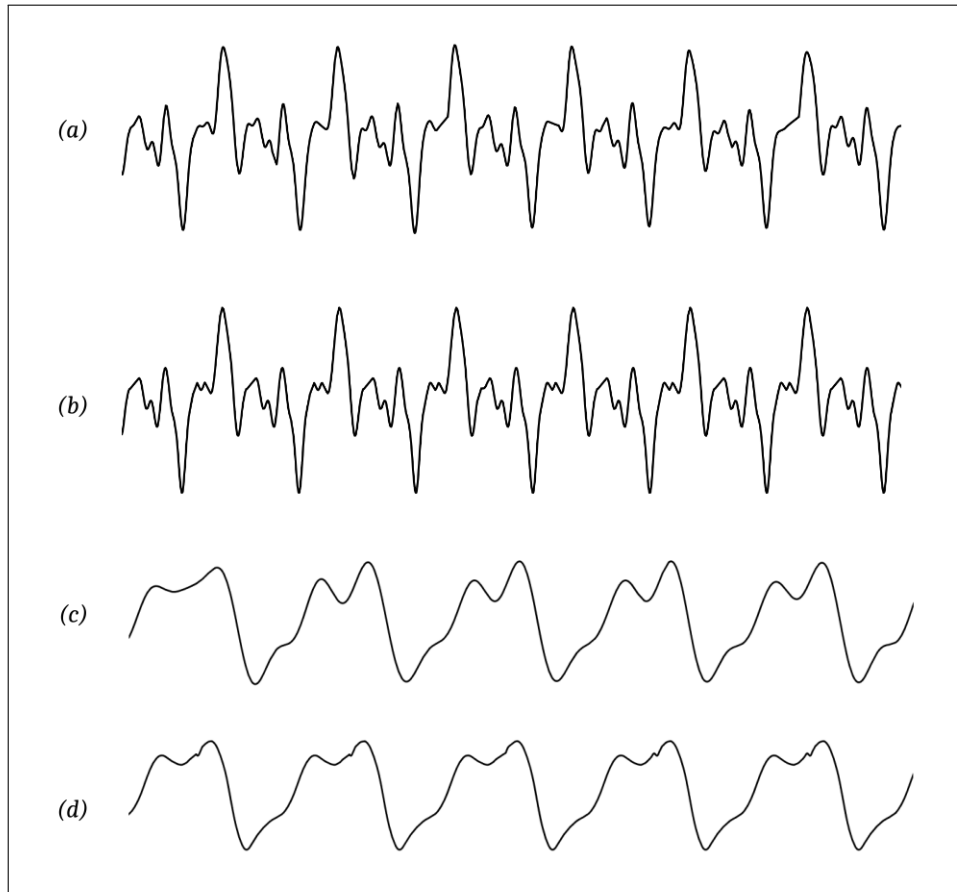


Figura 5.14: Filtro do áudio de 523,25 Hz do violino e da flauta doce pela análise de Fourier por meio de, respectivamente, 30 e 90 termos da série.

Fonte: Do autor, 2016.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Através do trabalho, foi possível obter diversas contribuições com o estudo da série de Fourier. Por meio do estudo da análise de Fourier, possibilitou compreender ainda mais este processo que é bastante aplicado atualmente na análise sintética do som. Assim, com os experimentos, foi possível afirmar isso, pois as séries de Fourier apresentaram um ótimo grau de aproximação de uma onda sonora original. Quanto maior a quantidade de termos das séries de Fourier, melhores eram as aproximações, fato que comprova as propriedades de convergência.

Ademais, foi possível verificar que os experimentos foram afetados pelo ambiente e pelos equipamentos de gravação. No entanto, os resultados foram satisfatórios e também eficientes para visualizar o comportamento do timbre dos instrumentos musicais, que pode ser influenciado pelo material, pelo modo de tocar, pelas peças compostas no instrumento, entre outros.

Por meio do experimento com o monocórdio, pode-se perceber um alto grau de desnivelamento ao se comparar com os gráficos do espectro do violino. A falta de uma caixa acústica afeta consideravelmente o timbre do instrumento. Pela comparação dos espectros, percebe-se que o violino é bem mais rico em termos de harmônicos e possui a forma de onda mais complexa que a da flauta doce. Com isso, a análise de Fourier desempenha o seu ótimo papel, assim como demais finalidades como a equalização e filtro do som.

Em razão do tempo limitado para a produção do trabalho, mais tópicos referentes aos conteúdos estudados poderiam ter sido abordados. Como por exemplo, relacionar as propriedades da série de Fourier com a Álgebra Linear, mais especificamente sobre espaços vetoriais, Bases de Hamel e de Schauder, comparar os espectros sonoros por diferentes notas musicais e investigar as causas dos ruídos para o melhoramento dos instrumentos.

Portanto, houve um aproveitamento acerca do tema da série e análise de Fourier, além de um considerável impacto no conhecimento de conteúdos da Física. A junção entre a teoria e a prática foi essencial para evidenciar a sua aplicabilidade. Sendo que os resultados experimentais foram mais claros por meio da fundamentação teórica.

Por fim, foi possível, graças ao trabalho, um amadurecimento por parte do acadêmico como pesquisador. Os experimentos renderam técnicas inovadoras em relação aos demais trabalhos curriculares da graduação. Assim, espera-se que o trabalho possa contribuir fortemente em pesquisas norteadoras ao estudo do som e no elo, belamente visto, entre a matemática e a música.

REFERÊNCIAS

- CERQUEIRA, E. O.; POPPI, R. J.; KUBOTA, L. T.; MELLO, C. Utilização de filtro de transformada de fourier para a minimização de ruídos em sinais analíticos. *Química Nova*, SciELO Brasil, v. 23, n. 5, p. 690–698, 2000.
- FIGUEIREDO, D. G. de. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2000.
- FREDERICO, E. *Música Breve História*. São Paulo: Irmãos Vitale, 1999.
- HALLIDAY, D. *Fundamentos de Física: Gravitação, Ondas E Termodinâmica. Volume 2*. Rio de Janeiro: Grupo Gen-LTC, 2009.
- HUMMELGEN, I. A. O clarinete - uma introdução à análise física do instrumento. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), v. 13, n. 2, p. 139–153, 1996.
- JUNIOR, R. J. I. O. Método da separação de variáveis e expansões em auto-funções, 13o colóquio brasileiro de matemática. *Editora IMPA*, 1981.
- LIMA, E. L. *Curso de Análise. Rio de Janeiro, vol. 1, 14th Edição*. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 2014.
- NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica vol. 2 Fluidos: Oscilações e Ondas, Calor. 4th Edição*. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1997.
- RATTON, M. *Escalas musicais-quando a matemática rege a música*. 2006.
- REGINATTO, J. J.; MENONCINI, L. Série de fourier e aplicação. 2010.
- RODRIGUES, F. V. Fisiologia da música: uma abordagem comparativa. *Revista da biologia*, 2009.
- SIMONATO, A. L.; DIAS, M. P. M. A relação matemática e música. *Revista Fafibe. São Paulo*, v. 1, 2009.
- SPIEGEL, M. R. *Análise de FOURIER*. São Paulo: McGraw-Hill, 1976.

APÊNDICES

A

Comandos em linguagem WxMaxima para calcular as séries de Fourier dos áudios do violino e da flauta doce.

```
-> file_search_maxima : cons(sconcat("<diretório da pasta dos arquivos
referentes às amostras>###.{lisp,mac,mc}"), file_search_maxima)$
-> k:read_matrix(file_search("<arquivo das amostras>.txt"))$
-> segundos: 0.45351;
-> quantidade_total_dados: 20000;
-> frequencia: 523.25;
-> amostra: truncate(quantidade_total_dados/(frequencia*segundos));
-> times:8;
-> j:amostra*times;
-> L:(j*segundos/quantidade_total_dados)/2;
-> h:(2*L)/j;
-> a:(1/(L))*sum((-1)^n*(k[i]*L)/(n*pi)*(sin((n*pi*(-L+i*h))/L)
-sin((n*pi*(-L+(i-1)*h))/L)),i,1,j),numer$
-> b:(1/(L))*sum((-1)^n*(k[i]*L)/(n*pi)*(-cos((n*pi*(-L+i*h))/L)
+cos((n*pi*(-L+(i-1)*h))/L)),i,1,j),numer$
-> a_0:(1/(2*L))*sum(k[i]*h,i,1,j),numer$
-> s: a_0+sum(a*cos((n*pi*x) / M) + b*sen((n*pi*x) / M),n,1,<quantidade
de termos>);
```

O diretório da pasta dos arquivos referentes às amostras, assim como os demais comandos, é o mesmo para os dois instrumentos musicais. O que muda é o texto inserido no <arquivo das amostras> e na quantidade de termos da série de Fourier em <quantidade de termos>.

B

Comandos em linguagem WxMaxima para calcular o coeficiente da transformada de Fourier de uma função em 523 Hz como som fundamental.

```
-> k:makelist(sin(2*523*%pi*(x*0.22676/10000))+
0.5*sin(2*700*%pi*(x*0.22676/10000)), x, 0, 10000), numer$
-> segundos: 0.22676;
-> frequencia: 523;
-> amostra: truncate(1/(frequencia*segundos)*10000);
-> j:amostra*15;
-> L:(j*0.22676/10000)/2;
-> h:(2*L)/j;
-> b:(1/(L))*sum((k[i])/(2*s*%pi)*(-cos(2*s*%pi*(-L+i*h))+
cos(2*s*%pi*(-L+(i-1)*h))),i,1,j),numer;
```

C

Comandos em linguagem WxMaxima para calcular o coeficiente da transformada de Fourier do violino, monocórdio e da flauta doce.

```
-> file_search_maxima : cons(sconcat("<diretório da pasta dos arquivos  
referentes às amostras>###.{lisp,mac,mc}"), file_search_maxima)$  
-> k:read_matrix(file_search("<arquivo das amostras>.txt"))$  
-> segundos: 0.45351;  
-> quantidade_total_dados:20000;  
-> frequencia: <frequência do áudio>;  
-> amostra: truncate(1/(frequencia*segundos)*quantidade_total_dados);  
-> j:amostra*8;  
-> L:(j*segundos/quantidade_total_dados)/2;  
-> h:(2*L)/j;  
-> b:(1/(L))*sum((k[i])/(2*s*%pi)*(-cos(2*s*%pi*(-L+i*h))+  
cos(2*s*%pi*(-L+(i-1)*h))),i,1,j),numer;
```

O diretório da pasta dos arquivos referentes às amostras, assim como os demais comandos, é o mesmo para os dois instrumentos musicais. O que muda é o texto inserido no <arquivo das amostras> e a frequência dos áudios em <frequência do áudio>.

D

Comandos em linguagem WxMaxima para calcular a série de Fourier do violino e da flauta doce utilizando os coeficientes calculados pela análise de Fourier.

```
-> file_search_maxima : cons(sconcat("<diretório da pasta dos arquivos
referentes às amostras>###.{lisp,mac,mc}"), file_search_maxima)$
-> k:read_matrix(file_search("<arquivo das amostras>.txt"))$
-> segundos: 0.45351;
-> quantidade_total_dados:20000;
-> frequencia: 523.25;
-> times:8;
-> amostra: truncate(1/(frequencia*segundos)*quantidade_total_dados);
-> j:amostra*times;
-> L:(j*segundos/quantidade_total_dados)/2;
-> h:(2*L)/j;
-> numero_coeficientes_transformada:<número de termos>;
-> s:makelist(frequencia*w,w,1,j); ->
b:makelist((1/(L))*sum((k[i])/(2*s[p]*%pi)*(-cos(2*s[p]*%pi*(-L+i*h))+
cos(2*s[p]*%pi*(-L+(i-1)*h))),i,1,j),p,1,numero_coeficientes_transformada)
,numer$
-> a:makelist((1/(L))*sum((k[i])/(2*s[p]*%pi)*(sin(2*s[p]*%pi*(-L+i*h))-
sin(2*s[p]*%pi*(-L+(i-1)*h))),i,1,j),p,1,numero_coeficientes_transformada)
,numer$
-> s_fourier: (1/2)+sum(a[n]*cos((n*%pi*x)/ L*times)+
b[n]*sin((n*%pi*x) / L*times),n,1,numero_coeficientes_transformada),numer;
```

O diretório da pasta dos arquivos referentes às amostras, assim como os demais comandos, é o mesmo para os dois instrumentos musicais. O que muda é o texto inserido no <arquivo das amostras> e o número de termos da série de Fourier em <número de termos>.