UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MATHEUS WALLACE SILVA CARVALHO

ÁLGEBRAS E COÁLGEBRAS

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

TOLEDO
2016

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MATHEUS WALLACE SILVA CARVALHO

ÁLGEBRAS E COÁLGEBRAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Toledo, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Professora Ma. Larissa Hagedorn Vieira

TOLEDO
2016

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

O Trabalho de Conclusão de Curso intitulado "Álgebras e Coálgebras" foi considerado **APROVADO** de acordo com a ata n.° __ de __/__/____

Fizeram parte da banca examinadora os professores:

Professora Ma. Larissa Hagedorn Vieira

Professora Ma. Jessica Bóschi

Professor Dr. Wilian Francisco de Araujo

TOLEDO
2016

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo definir e exemplificar álgebras e coálgebras, a partir de produto tensorial. Dois resultados importantes são apresentados. Sendo o primeiro, o fato de que se existe uma álgebra de dimensão finita, então ao dualizarmos esta álgebra, construímos uma coálgebra. Além disso, o segundo resultado nos diz que, independente da coálgebra tomada, se ela for dualizada, então temos uma álgebra. Porém, antes de apresentar tais resultados é necessário revisar conceitos de álgebra linear e definir produto tensorial, os quais são fundamentais para a construção de coálgebras.

Palavras-chave: Álgebra, Coálgebra, Dual, Produto Tensorial.

ABSTRACT

The present work aims to define and exemplify algebras and coalgebras, using the tensor product. Two important results are presented, the first one, the fact that if there is a finite dimensional algebra, then when one dualizes this algebra, one constructs a coalgebra. Furthermore, the second result states that, regardless of the coalgebra considered, if it is dualized, then it is an algebra. However, before presenting such results it is necessary to review some concepts of linear algebra, and define tensor product, which is fundamental to the construction of coalgebras.

Keywords: Algebra, Coalgebra, Dual, Tensorial Product.

LISTA DE SÍMBOLOS

A_S A é S-módulo à direita.

T^t Transformação linear transposta.

$\Bbbk$ Corpo.

$\delta_{i,j}$ Delta de Kronecker ou função delta.

$\mathcal{L}$ Conjunto de todas transformações lineares.

$\otimes_R$ Produto tensorial sobre o anel R.

${}_RA$ A é R-módulo à esquerda.

$g \circ f$ *ou* gf Composição da função g com f.

id_A Função identidade $id_A : A \to A$.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Ao longo da formação no curso de Licenciatura em Matemática, estudam-se diversos componentes que são necessários para definir uma álgebra e uma coálgebra, como por exemplo, grupos, anéis e corpos. Estes estudos, porém, não são suficientes, é preciso de mais conceitos para de fato descrever uma álgebra e uma coálgebra.

Partindo desse pressuposto, o objetivo geral do trabalho em questão é definir uma álgebra e a partir disso uma coálgebra, sendo a segunda uma consequência da primeira. Tendo desse modo, como problema norteador: "Como podemos definir uma álgebra e então uma coálgebra?" Em seguida, exemplificando-as de modo que seja possível visualizar a funcionalidade de cada propriedade apresentada.

Desta forma o presente trabalho se subdivide da seguinte maneira:

O primeiro capítulo , denominado por Pré-Requisitos, traz conteúdos denominados básicos para o trabalho, sendo estes: propriedades de grupos e módulos, presentes em Hungerford (1974) e alguns tópicos de álgebra linear contidos em Hoffman e Kunze (1971).

No segundo capítulo são apresentadas propriedades relacionadas ao produto tensorial que são de suma importância para definir uma álgebra e uma coálgebra. Tais propriedades estão presentes em Hungerford (1974).

No terceiro, e último capítulo, são apresentados resultados ditos importantes, visto que respondem a pergunta norteadora da pesquisa e do trabalho. Neste capítulo, define-se e exemplifica-se álgebra e, ao dualizarmos, caso ela seja finita, obtemos então uma coálgebra, a qual é posteriormente exemplificada. Por fim, expõe-se o fato de que o dual de uma coálgebra é na verdade uma álgebra.

1 PRÉ-REQUISITOS

1.1 GRUPOS E MÓDULOS

Nesta seção, serão apresentadas algumas propriedades com relação a grupos e módulos, as quais serão utilizadas no decorrer do estudo, sendo estes presentes Hungerford (1974).

Definição 1.1 *Seja F um grupo abeliano. Se as condições a seguir são equivalentes:*

(i) *F possui uma base não vazia;*

(ii) *F é uma soma direta (interna) de uma família de infinitos grupos cíclicos;*

(iii) *F é (isomorfo) à uma soma direta do grupo aditivo $\mathbb{Z}$;*

(iv) *Existem um conjunto $X \neq \varnothing$ e uma função $\iota : X \to F$ com a seguinte propriedade: dado um grupo abeliano G e a função $f : X \to G$, então existe um único homomorfismo de grupos $f : F \to G$ tal que $f\iota = f$.*

Nestas condições F é chamado de ***grupo abeliano livre*** *(sobre o conjunto X).*

Definição 1.2 *Seja R um anel. Denotamos A um R-módulo à esquerda se A é um grupo abeliano aditivo juntamente com a função $R \times A \to A$ (sendo a imagem (r, a) denotado por ra) tal que $\forall r, s \in R$ e $\forall a, b \in A$:*

(i) *$r(a + b) = ra + rb$;*

(ii) *$(r + s)a = ra + sa$;*

(iii) *$r(sa) = (rs)a$.*

Se R possui identidade denotada por 1_R e:

(iv) *$1_R a = a, \forall a \in A$,*

então A é dito R-módulo unitário. Se R é um anel de divisão, então o R-módulo é chamado de ***espaço vetorial*** *à esquerda. Analogamente, pode-se definir A como um R-módulo à direita.*

Definição 1.3 *Sejam A e B módulos sobre o anel R. A função $f : A \to B$ é um* ***homomorfismo de R-módulo*** *se para todo $a, c \in A$ e $r \in R$:*

$$f(ra + c) = rf(a) + f(c)$$

Se R é um anel de divisão, então o homomorfismo de R-módulo é uma ***transformação linear****. A terminologia é semelhante a homomorfismo de grupos: f é um* ***monomorfismo de*** R***-módulo*** *(respectivamente* ***epimorfismo****,* ***isomorfismo****) se a mesma é uma função injetora (respectivamente sobrejetora, bijetora). O* ***núcleo*** *de f é escrito como $Kerf = \{a \in A | f(a) = 0\}$, assim como definimos a* ***imagem*** *de f como o conjunto $Imf = \{b \in B | b = f(a)$, para cada $a \in A\}$. Semelhantemente ao homomorfismo de grupos, temos as seguintes afirmações:*

(i) f é um monomorfismo de R-módulo se, e somente se, $Kerf = 0$;

(ii) $f : A \to B$ é um isomorfismo de R-módulo se, e somente se, existe um homomorfismo de R-módulo $g : B \to A$ tal que $gf = 1_A$ e $fg = 1_B$.

Definição 1.4 *Seja R um anel, A um R-módulo e B subconjunto de A. Dizemos que B é* ***submódulo*** *de A se B for um subgrupo aditivo de A e $rb \in B$ para todo $r \in R$ e $b \in B$. O submódulo de um espaço vetorial sob um anel de divisão é dito* ***subespaço****.*

Teorema 1.5 *Seja B um R-submódulo do R-módulo A . Então o grupo quociente A/B é um R-módulo com a seguinte operação:*

$$r(a + B) = ra + B, \text{ para todo } r \in R, a \in A.$$

A função $\pi : A \to A/B$ dada por $a \mapsto a + B$ é um epimorfismo de R-módulo com o núcleo B. Denotamos a função π como ***epimorfismo canônico*** *(ou* ***projeção****).*

A demonstração do Teorema 1.5 pode ser vista na página 172, em Hungerford (1974).

Definição 1.6 *Se A é um R-módulo à esquerda e S-módulo à direita, dizemos que A é R-S bimódulo, e denotamos por ${}_RA_S$.*

1.2 TÓPICOS DE ÁLGEBRA LINEAR

Nesta seção, serão apresentados algumas definições e resultados que foram estudados os quais são importantes para que posteriormente se possa, de fato, definir uma álgebra e coálgebra. Neste capítulo, os resultados são apresentados em Hoffman e Kunze (1971).

1.2.1 ESPAÇO VETORIAL DUAL

Definição 1.7 *Dados os espaços vetoriais V e W sobre o corpo $\Bbbk$. Definimos $\mathcal{L}(V,W)$ como o conjunto de todas as transformações lineares de V em W.*

Teorema 1.8 *Seja V um $\Bbbk$-espaço vetorial de dimensão n e W um $\Bbbk$-espaço vetorial de dimensão m. Então o espaço $\mathcal{L}(V,W)$ possui dimensão finita, sendo mn.*

Demonstração:
Sejam as bases ordenadas $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ e $\beta' = \{w_1, ..., w_m\}$ respectivamente dos espaços vetoriais V e W. Seja também a transformação linear $f_{ij} \in \mathcal{L}(V,W)$ de tal forma que para cada $i = 1, \cdots, m$ e $j = 1, \cdots, n$. Definimos f_{ij} como sendo:

$$\begin{cases} f_{ij}(v_k) = w_i, se & k = j \\ f_{ij}(v_k) = 0, se & k \neq j, \end{cases}$$

ou seja, descrevemos $f_{ij}(v_k) = \delta_{jk} w_i$. Vamos mostrar que $\{f_{ij} | i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n\}$ é uma base de $\mathcal{L}(V,W)$.
Seja $f : V \to W$ uma transformação linear, tal que $f(v_j) = w$, ou seja, existem $a_{ij} \in \Bbbk$ tal que $w = \sum\limits_{i,j} a_{ij} w_i$, com $1 \leq j \leq n$. Logo:

$$f(v_j) = \sum_{i,j} a_{ij} w_i \text{ , com } 1 \leq j \leq n.$$

Verificaremos que $f = \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} f_{ij}$.
Seja $g = \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} f_{ij}$. Então:

$$\begin{aligned} g(v_k) &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_{ij}(v_k) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_{ij}(v_k) \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i = f(v_k). \end{aligned}$$

Assim, $f = g$ e portanto, $\{f_{ij} | i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n\}$ gera $\mathcal{L}(V,W)$. Mostremos agora que f_{ij} é linearmente independente. De fato sejam $b_{ij} \in \Bbbk$, então para todo $k \in \{1, ..., n\}$:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} b_{ij} f_{ij} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{i,j} b_{ij} f_{ij}(v_k) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{i} b_{ik} w_i = 0. \end{aligned}$$

Como $\{w_n\}$ é linearmente independente, temos que $b_{ik} = 0$, para todo $k \in \{1, ..., n\}$ e para todo $i \in \{1, ..., m\}$.
Logo, $\{f_{ij}\}$ é uma base de $\mathcal{L}(V, W)$ e, portanto $dim\ \mathcal{L}(V, W) = mn$.

Definição 1.9 *Dado um espaço vetorial V sobre o corpo $\Bbbk$, o espaço dual V^* é o espaço de todas as transformações lineares de V em $\Bbbk$. A transformação linear de V em $\Bbbk$ é denominada de funcional linear. Denotamos o espaço dual como sendo:*

$$V^* = \mathcal{L}(V, \Bbbk)$$

Uma consequência do Teorema 1.8 é o seguinte corolário:

Corolário 1.9.1 *Se V possui dimensão finita, temos então que:*

$$dim\ V^* = dim\ V.$$

1.2.2 TRANSFORMAÇÃO LINEAR TRANSPOSTA

Definição 1.10 *Sejam V e W $\Bbbk$-espaços vetoriais e a transformação linear $T : V \to W$. Então T induz a transformação linear de W^* em V^*, definida como:*

$$f(\alpha) = g(T\alpha)$$

para cada $\alpha \in V$.

Ou seja, a função $f : V \to \Bbbk$ é composição de T (já definida) e g definida de W em $\Bbbk$. Desde que T e g sejam $\Bbbk$-lineares, f também o é, ou seja, f é um funcional linear sobre V. Assim, T^* associa cada funcional linear g em W com um funcional linear $f = T^t g$ em V.

Note que T^t é na verdade uma transformação linear de W^* em V^*, de fato sejam g_1, $g_2 \in W^*$ e $c \in \Bbbk$ um escalar, aplicando $cg_1 + g_2$ em T^t temos que:

$$\begin{aligned}[T^t(cg_1 + g_2)](\alpha) &= (cg_1 + g_2)(T\alpha) \\ &= cg_1(T\alpha) + g_2(T\alpha) \\ &= c(T^t g_1)(\alpha) + (T^t g_2)(\alpha), \forall \alpha \in V.\end{aligned}$$

Chamamos T^t de transposta de T.

Definição 1.11 *O espaço dos funcionais lineares $\mathcal{L}(V^*, \Bbbk)$ definidos no dual de V é denotado por V^{**} chamado o duplo dual, ou dual do dual de V.*

Teorema 1.12 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\Bbbk$. Então V e V^{**} são isomorfos, relacionados pela seguinte função:*

$$\varphi : V \to V^{**},$$

sendo que para todo $\alpha \in V$,

$$\varphi(\alpha) = L_\alpha$$

e $L_\alpha \in V^{**}$ definido por:

$$L_\alpha(f) = f(\alpha)$$

Demonstração:
De fato, o funcional L_α é linear, pois, dados os escalares γ, $\delta \in \Bbbk$ e $f, g \in V^*$ temos que:

$$L_\alpha(\gamma f + \delta g) = (\gamma f + \delta g)(\alpha) = \gamma f(\alpha) + \delta g(\alpha) = \gamma L_\alpha(f) + \delta L_\alpha(g)$$

Disso temos ainda que, a aplicação φ é linear, visto que:

$$\varphi(\gamma\alpha_1 + \delta\alpha_2) = L_{\gamma\alpha_1+\delta\alpha_2} = \gamma L_{\alpha_1} + \delta L_{\alpha_2}$$

sendo que para todo $f \in V^*$ temos:

$$L_{\gamma\alpha_1+\delta\alpha_2}(f) = f(\gamma\alpha_1 + \delta\alpha_2) = \gamma f(\alpha_1) + \delta f(\alpha_2) = \gamma L_{\alpha_1} + \delta L_{\alpha_2}.$$

Observe que φ é injetiva, pois $L_\alpha(f) = 0$ se, e somente se, $f(\alpha) = 0$ $\forall f \in V$, e isso acontece somente se $\alpha = 0$. Para verificar a sobrejetividade de φ, basta notarmos pelo Corolário 1.9.1 que:

$$dimV = dimV^* = dimV^{**}.$$

Logo, φ é bijetora e linear, ou seja, é um isomorfismo linear.

2 PRODUTO TENSORIAL

Neste capítulo, veremos o conceito de produto tensorial de módulos e alguns resultados que serão importantes neste trabalho, os quais estão compreendidos em Hungerford (1974).

Definição 2.1 *Sejam A módulo à direita e B módulo à esquerda sobre anel R. Seja também F um grupo livre sob o conjunto $A \times B$ e K um subgrupo de F gerado por todos elementos da seguinte forma ($\forall a, a' \in A$; $b, b' \in B$; $r \in R$):*

(i) $(a + a', b) - (a, b) - (a', b)$;

(ii) $(a, b + b') - (a, b) - (a, b')$;

(iii) $(ar, b) - (a, rb)$.

O grupo quociente F/K é chamado de ***produto tensorial*** *de A e B e denotamos como sendo $A \otimes_R B$ (ou simplesmente $A \otimes B$, quando não há outro produto tensorial definido sobre outro anel).*

Desde que F seja gerado pelo conjunto $A \times B$, o grupo quociente $F/K = A \otimes_R B$ é gerado por todos elementos da forma $a \otimes b$ ($a \in A$, $b \in B$). Porém, nem sempre todo elemento de $A \otimes_R B$ é escrito na forma $a \otimes b$. O conjunto $A \otimes_R B = F/K$ pode ser escrito na forma $\sum_{i=1}^{r} n_i(a_i \otimes b_i)$. Além disso, é possível escolher diferentes representações para o conjunto, por exemplo, $a \otimes b = a' \otimes b' \in A \otimes_R B$, porém, $a \neq a'$ e $b \neq b'$.

A Definição 2.1 implica que os geradores $a \otimes b$ de $A \otimes_R B$ satisfazem as seguintes relações (para todo $a, a_1, a_2 \in A$, $b, b_1, b_2 \in B$ e $r \in R$):

(i) $(a_1 + a_2) \otimes b = a_1 \otimes b + a_2 \otimes b$;

(ii) $a \otimes (b_1 + b_2) = a \otimes b_1 + a \otimes b_2$;

(iii) $ar \otimes b = a \otimes rb$.

Demonstração:

(i) Seja $(a_1 + a_2, b) - (a_1, b) - (a_2, b) \in K$, temos que:

$$[a_1 + a_2 + K] - [(a_1, b) + K] - [(a_2, b) + K] = K;$$

ou pela notação $(a,b)+K = a\otimes b$,

$$
\begin{aligned}
(a_1+a_2)\otimes b - a_1\otimes b - a_2\otimes b &= 0\\
(a_1+a_2)\otimes b &= a_1\otimes b + a_2\otimes b.
\end{aligned}
$$

(ii) De forma semelhante a (i), seja $(a,b_1+b_2)-(a,b_1)-(a,b_2)\in K$, temos que:

$$[(a,b_1+b_2)+K]-[(a,b_1)+K]-[(a,b_2)+K]=K;$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
a\otimes(b_1+b_2) - a\otimes b_1 - a\otimes b_2 &= 0\\
\text{a }\otimes(b_1+b_2) &= a\otimes b_1 + a\otimes b_2.
\end{aligned}
$$

(iii) Seja $(ar,b)-(a,rb)\in K$, temos que:

$$(ar,b)+K-(a,rb)+K=K,$$

logo,

$$
\begin{aligned}
(ar\otimes b)-(a\otimes rb) &= 0\\
(ar\otimes b) &= (a\otimes rb).
\end{aligned}
$$

Na verdade, uma definição alternativa de $A\otimes_R B$ é o grupo abeliano com geradores de todos os $a\otimes b$ $(a\in A, b\in B)$ sujeitando as relações (i), (ii), (iii) demonstradas anteriormente. Além disso, desde que 0 seja o único elemento do grupo que satisfaça $x+x=x$, fica evidente que para todo $a\in A, b\in B$:

$$a\otimes 0 = a\otimes(0+0) = a\otimes 0 + a\otimes 0,$$

o que implica em: $a\otimes 0 = 0$. Disso podemos afirmar que $a\otimes 0 = 0\otimes b = 0\otimes 0 = 0$.

Dados os módulos A_R e ${}_RB$ sobre o anel R, a função $i : A\times B\to A\otimes_R B$ dada por $(a,b)\mapsto a\otimes b$ é denominada como **função canônica aditiva**. Para mostrar que i é aditiva, devemos mostrar que valem as seguintes propriedades:

(i) $i(a+a_1,b)=i(a,b)+i(a_1,b)$;

(ii) $i(a,b+b_1)=i(a,b)+i(a,b_1)$;

(iii) $i(ar,b)=i(a,rb)$, $\forall a,a_1\in A, b,b_1\in B$ e $r\in R$.

De fato:

$$\begin{aligned} i(a+a_1,b) &= (a+a_1 \otimes b) \\ &= a\otimes b + a_1 \otimes b \\ &= i(a,b)+i(a_1,b). \end{aligned}$$

Provando assim (i) e de modo análogo ocorre a demonstração para (ii). Referente ao item (iii), temos que:

$$\begin{aligned} i(ar,b) &= ar\otimes b \\ &= a\otimes rb \\ &= i(a,rb). \end{aligned}$$

Logo i é aditiva.

Se i satisfaz $(i)-(iii)$ e $i(ar,b)=ri(a,b)=i(a,rb)$, $\forall a\in A, b\in B$ e $r\in R$, então dizemos que i é **biaditiva**.

Definição 2.2 (Propriedade Universal do Produto Tensorial - PUPT) *Dados M_R e ${}_RN$, então um produto tensorial entre M e N é um grupo abeliano $M\otimes_R N$ e uma função R-biaditiva $h : M\times N \to M\otimes_R N$ tal que para cada grupo abeliano G e para cada função R-aditiva $f : M\times N\to G$ existe um único homomorfismo de $\mathbb{Z}$ - módulos $\tilde{f} : M\otimes_R N\to G$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & G \\ M\otimes_R N \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Teorema 2.3 *Sejam R e S anéis e ${}_SA_R$, ${}_RB$, C_R e ${}_RD_S$ (bi)módulos, valem as seguintes propriedades:*

(i) $A\otimes_R B$ é um S-módulo à esquerda tal que $s(a\otimes b)=sa\otimes b$ para todo $s\in S, a\in A$ e $b\in B$.

(ii) Se $f : A\to A'$ é um homomorfismo de $S-R$ bimódulos e $g : B\to B'$ é homomorfismo de R-módulo, então a função $f\otimes g : A\otimes_R B\to A'\otimes_R B'$ é um homomorfismo de S-módulos à esquerda.

(iii) $C\otimes_R D$ é um S-módulo à direita tal que $(c\otimes d)s=c\otimes ds$ para todo $s\in S, c\in C$ e $d\in D$.

(iv) *Se $h : C \to C^{'}$ é um homomorfismo de R bimódulos e $k : B \to B^{'}$ é homomorfismo de R-módulo, então a função $h \otimes k : C \otimes_R D \to C^{'} \otimes_R D^{'}$ é um homomorfismo de S-módulos à direita.*

Demonstração:

(i) Definimos a função $f : A \times B \to A \otimes_R B$ dada por $(a, b) \mapsto sa \otimes b$ para cada $s \in S$ f é R-aditiva. De fato f é R-aditiva, sejam $a, a^{'} \in A$, $b, b^{'}$ e $r \in R$:

Temos que:

$$\begin{aligned} f(a + a^{'}, b) = s(a + a^{'}) \otimes b = (sa + sa^{'}) \otimes b &= sa \otimes b + sa^{'} \otimes b \\ &= f(a, b) + f(a^{'}, b). \end{aligned}$$

Além disso:

$$f(a, b + b^{'}) = sa \otimes (b + b^{'}) = sa \otimes b + sa \otimes b^{'} = f(a, b) + f(a, b^{'}),$$

e

$$f(ar, b) = sar \otimes b = sa \otimes rb = f(a, rb).$$

Logo f é R-aditiva. Pela PUPT, existe um único homomorfismo $\alpha_s : A \otimes_R B \to A \otimes_R B$ tal que $\alpha_s(a \otimes b) = sa \otimes b$. Tomando $u = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \in A \otimes_R B$, definimos $\alpha_s(u) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_s(a_i \otimes b_i) = \sum_{i=1}^{n} sa_i \otimes b_i$.
Perceba também que a ação α_s é bem definida, pois, dados $u = v \in A \otimes_R B$ de tal forma que $u = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i$ e $v = \sum_{i=1}^{m} c_i \otimes d_i$, temos que:

$$\alpha_s(u) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_s(a_i \otimes b_i) = \alpha_s\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i\right) = \alpha_s\left(\sum_{i=1}^{m} c_i \otimes d_i\right) = \alpha_s(v).$$

Basta mostrarmos agora que $A \otimes_R B$ é também um S-módulo. Para isso tomando $u, v \in A \otimes_R B$ definidos anteriormente, sendo que:

$$u + v = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i + \sum_{i=1}^{m} c_i \otimes d_i,$$

com $s, r \in S$, temos que:

$$s(u + v) = \sum_{i=1}^{n} sa_i \otimes b_i + \sum_{i=1}^{m} sc_i \otimes d_i = s(u) + s(v).$$

Além disso:

$$\begin{aligned}(r+s)(u)=\sum_{i=1}^{n}(r+s)a_i\otimes b_i &= \sum_{i=1}^{n} ra_i\otimes b_i + sa_i\otimes b_i\\ &= \sum_{i=1}^{n} ra_i\otimes b_i + \sum_{i=1}^{n} sa_i\otimes b_i = r(u)+s(u)\end{aligned}$$

e,

$$r(su)=r\left(\sum_{i=1}^{n} sa_i\otimes b_i\right)=\sum_{i=1}^{n} rsa_i\otimes b_i = rs\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\otimes b_i\right)=(rs)u.$$

Logo $A\otimes_R B$ é um S-módulo à esquerda.

(ii) Para que $f\otimes g : A\otimes_R B \to A^{'}\otimes_R B^{'}$ seja um homomorfismo de S-módulos à esquerda, a mesma deve satisfazer as seguintes propriedades:

Como $(f\otimes g)(u+v)=(f\otimes g)(u)+(f\otimes g)(v)$, com $u,v\in A\otimes_R B$, sendo que $u=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\otimes b_i$ e $v=\sum\limits_{i=1}^{m} c_j\otimes d_j$. Descrevemos $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\otimes b_i+\sum\limits_{j=1}^{m} c_j\otimes d_j=\sum\limits_{i=1}^{s} a_i^{'}\otimes b_i^{'}$, onde:

$$a_i^{'}\otimes b_i^{'}=\begin{cases} a_i\otimes b_i, & i=1:n\\ c_j\otimes d_j, & i=n+j:n+m.\end{cases}$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned}(f\otimes g)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\otimes b_i+\sum_{i=1}^{m} c_j\otimes d_j\right) &= (f\otimes g)\left(\sum_{i=1}^{s} a_i^{'}\otimes b_i^{'}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{s} f(a_i^{'})+g(b_i^{'})\\ &= \sum_{i=1}^{n} f(a_i^{'})+g(b_i^{'})+\sum_{i=1}^{m} f(a_i^{'})+g(b_i^{'})\\ &= \sum_{i=1}^{n} f(a_i)+g(b_i)+\sum_{i=1}^{m} f(c_i)+g(d_i)\\ &= (f\otimes g)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\otimes b_i\right)+(f\otimes g)\left(\sum_{i=1}^{m} c_j\otimes d_j\right).\end{aligned}$$

Além disso, $(f\otimes g)(su)=s(f\otimes g)(u)$, sendo que escrevemos novamente $u=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\otimes b_i$.

Assim:

$$\begin{aligned}(f\otimes g)\left(s\sum_{i=1}^{n}a_i\otimes b_i\right)=(f\otimes g)\left(\sum_{i=1}^{n}sa_i\otimes b_i\right) &= \sum_{i=1}^{n}f(sa_i)\otimes g(b_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}sf(a_i)\otimes g(b_i)\\ &= s\left(\sum_{i=1}^{n}f(a_i)\otimes g(b_i)\right)\\ &= s(f\otimes g)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\otimes b_i\right)\end{aligned}$$

Portanto, $f\otimes g$ é um homomorfismo de S-módulo.

(iii) Demonstração análoga a (i).

(iv) Demonstração análoga a (ii).

Observação 2.4 Se $\{v_i\}$ é base de V e $\{w_j\}$ é base de W, então $\{v_i\otimes w_j\}$ é base de $V\otimes W$. Logo:

$$dim(V\otimes W)=dim(V)\cdot dim(W).$$

Teorema 2.5 *Seja R uma anel com identidade e M_R, ${}_RB$ R-módulos unitários, então existem os seguintes isomorfismos:*

$$M\otimes_R R\simeq M \ \ e \ R\otimes_R B\simeq B.$$

Demonstração:

Definimos a função $f: M\times R\to M$ de forma que $(m,r)\mapsto m$. Perceba que f é aditiva. Pela PUPT, segue que existe $\tilde{f}: M\otimes_R R\to M$ homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos, tal que é válida a seguinte expressão:

$$\tilde{f}(s(m\otimes n))=s\tilde{f}(m\otimes n), \text{ pois}$$
$$\tilde{f}(s(m\otimes n))=\tilde{f}(sm\otimes n)=(sm)n=s(mn)=s\tilde{f}(m\otimes n), \forall s,n\in R \text{ e } m\in M.$$

Definimos dessa forma, $\varphi: M\to M\otimes_R R$ sendo que $m\mapsto m\otimes 1_R$, um homomorfismo de R-módulos. Temos então:

$$(\varphi\circ\tilde{f})(m\otimes r)=\varphi(mr)=mr\otimes 1_R=m\otimes r,$$

portanto, $(\varphi\circ\tilde{f})=id_{M\otimes_R R}$ e analogamente,

$$(\tilde{f}\circ\varphi)(m)=\tilde{f}(m\otimes 1_R)=m1_R=m.$$

Portanto, $\tilde{f}$ é isomorfismo.

A demonstração do isomorfismo $R \otimes_R B \simeq B$ decorre de forma análoga.

Teorema 2.6 *Se R e S são anéis e A_R, ${}_RB_S$, ${}_SC$ são (bi)módulos, então existe o seguinte isomorfismo:*

$$(A \otimes_R B) \otimes_S C \simeq A \otimes_R (B \otimes_S C).$$

Demonstração:

Tomando $v \in (A \otimes_R B) \otimes_S C$, podemos reescrevê-lo como a seguinte soma finita:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \otimes_S c_i, \text{ com } u_i \in A \otimes_R B \text{ e } c_i \in C.$$

Porém, podemos ainda reescrever u_i novamente como uma soma finita:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \otimes_R b_{ij}, \text{ com } a_{ij} \in A \text{ e } b_{ij} \in B.$$

Disso temos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} u_i \otimes_S c_i &= \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{m} (a_{ij} \otimes_R b_{ij}) \right] \otimes_S c_i \\
&= \sum_{i} \sum_{j} (a_{ij} \otimes_R b_{ij}) \otimes_S c_i.
\end{aligned}$$

Portanto, $(A \otimes_R B) \otimes_S C$ é gerado por elementos da forma $(a \otimes_R b) \otimes_S c$. De forma análoga, $A \otimes_R (B \otimes_S C)$ é gerado por $a \otimes_R (b \otimes_S c)$.

Verificaremos agora que $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes_R b_i, c \right) \mapsto \sum_{i=1}^{n} [a_i \otimes_R (b_i \otimes_S c)]$ define uma função S-biaditiva $f : (A \otimes_R B) \times C \to A \otimes_R (B \otimes_S C)$. Sejam $u, v \in A \otimes_R B$, de tal forma que $u = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes_R b_i$ e $v = \sum_{i=1}^{m} k_i \otimes_R d_i$ e $c, c' \in C$.

Analogamente à construção na demonstração do Teorema 2.3 (ii), descrevemos $\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes_R b_i + \sum_{i=1}^{m} k_i \otimes_R d_i = \sum_{i=1}^{s} a_i' \otimes_R b_i'$. Assim:

$$\begin{aligned}
f(u+v, c) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes_R b_i + \sum_{i=1}^{m} k_i \otimes_R d_i, c \right) \\
&= f\left(\sum_{i=1}^{s} a_i' \otimes_R b_i', c \right) \\
&= \sum_{i=1}^{s} a_i' \otimes_R (b_i' \otimes_S c) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes_R (b_i \otimes_S c) + \sum_{i=1}^{m} k_i \otimes_R (d_i \otimes_S c) \\
&= f(u, c) + f(v, c).
\end{aligned}$$

Para $f(u, c + c^{'})$:

$$\begin{aligned} f(u, c+c^{'}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes_R b_i, c+c^{'}\right) &= \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes_R (b_i \otimes_S (c+c^{'})) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes_R (b_i \otimes_S c + b_i \otimes_S c^{'}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes_R (b_i \otimes_S c) + a_i \otimes_R (b_i \otimes_S c^{'}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes_R (b_i \otimes_S c) + \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes_R (b_i \otimes_S c^{'}) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes_R b_i, c\right) + f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes_R b_i, c^{'}\right) \\ &= f(u, c) + f(u, c^{'}). \end{aligned}$$

Para $f(us, c)$ com $s \in S$:

$$\begin{aligned} f\left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes_R b_i\right) s, c\right) &= f\left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes_R b_i s\right), c\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes_R (b_i s \otimes_S c) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes_R (b_i \otimes_S sc) \\ &= f\left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes_R b_i\right), sc\right) \\ &= f(u, sc). \end{aligned}$$

Logo f é S-biaditiva. Portanto, pela PUPT, existe o seguinte homomorfismo:

$$\alpha : (A \otimes_R B) \otimes_S C \to A \otimes_R (B \otimes_S C),$$

sendo $\alpha[(a \otimes_R b) \otimes_S c] = a \otimes (b \otimes c)$, para todo $a \in A, b \in B, c \in C$. De forma similar, a partir da função R-biaditiva $A \times (B \otimes_S C) \to (A \otimes_R B) \otimes_S C$, é induzido o seguinte homomorfismo:

$$\beta : A \otimes_R (B \otimes_S C) \to (A \otimes_R B) \otimes_S C,$$

tal que $\beta[a \otimes_R (b \otimes_S c)] = (a \otimes_R b) \otimes_S c$, para todo $a \in A, b \in B, c \in C$. Disso temos que para todo gerador $(a \otimes_R b) \otimes_S c$ de $(A \otimes_R B) \otimes_S C$ aplicando na composta $\beta \circ \alpha$ obtemos:

$$\beta \circ \alpha[(a \otimes_R b) \otimes_S c] = \beta(\alpha((a \otimes_R b) \otimes_S c)) = \beta(a \otimes_R (b \otimes_S c)) = (a \otimes_R b) \otimes_S c.$$

Além disso, tomando o gerador $a \otimes_R (b \otimes_S c)$ de $A \otimes_R (B \otimes_S C)$ e aplicando na composta $\alpha \circ \beta$ temos o seguinte resultado:

$$\alpha \circ \beta[a \otimes_R (b \otimes_S c)] = \alpha(\beta(a \otimes_R (b \otimes_S c)) = \alpha((a \otimes_R b) \otimes_S c) = a \otimes_R (b \otimes_S c).$$

Logo, α e β são isomorfismos.

Observação 2.7 Dados V, W $\Bbbk$-espaços vetoriais, de tal forma que $dimV = n < \infty$ e $dimW = m < \infty$, então $dim(V^* \otimes_{\Bbbk} W^*) = dimV \cdot dimW = nm$.

3 ÁLGEBRAS E COÁLGEBRAS

Nesta seção, definiremos uma álgebra e uma coálgebra a partir do produto tensorial, exemplificando-as. Além disso, será demonstrado o fato de que quando dualizamos uma álgebra finita, obtemos uma coálgebra, assim como, ao dualizarmos uma coálgebra, obtemos uma álgebra. Será utilizado como referência o livro Hungerford (1974) para introduzir uma álgebra; e posteriormente, para dar continuidade ao capítulo, o livro Dascalescu et al. (2000). Os resultados desta seção são apresentados para módulos à esquerda, porém existem resultados análogos para módulos à direita.

Definição 3.1 *Seja K um anel comutativo com identidade. Uma* ***K-álgebra associativa*** *(ou* ***álgebra sobre K****) A é um anel A tal que:*

(i) $(A, +)$ *é $\Bbbk$-módulo à esquerda;*

(ii) $k(ab) = (ka)b$, $\forall k \in K$ *e* $a,b \in A$.

Por conta do dinamismo e da usualidade de utilizar produto tensorial, podemos definir uma álgebra da seguinte forma:

Definição 3.2 *Uma álgebra associativa sobre $\Bbbk$ com unidade é uma tripla $(A,\ m,\ u)$, onde A é um $\Bbbk$-módulo unitário à esquerda, $m : A \otimes A \to A$ e $u : \Bbbk \to A$ são aplicações $\Bbbk$-lineares, chamadas multiplicação e unidade, respectivamente, tais que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m\otimes id_A"] \arrow[d, "id_A\otimes m"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\ A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Bbbk \otimes A \arrow[r, "u\otimes id_A"] \arrow[dr, "\psi"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] & A \otimes \Bbbk \arrow[l, "id_A\otimes u"'] \arrow[dl, "\phi"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

onde ψ e ϕ são isomorfismos de $\Bbbk$-módulo que identificam $\Bbbk \otimes A$ e $A \otimes \Bbbk$ por A, respectivamente.

Afirmação 3.3 *Dizer que os diagramas são comutativos equivale às seguintes expressões:*

$$m \circ (m \otimes id_A) = m \circ (id_A \otimes m)$$
$$m \circ (u \otimes id_A) = \psi \qquad e \qquad m \circ (id_A \otimes u) = \phi.$$

Perceba que para todo $a, b \in A$ quando aplicado em m, temos que $m(a \otimes b) = ab$ o que justifica seu nome (multiplicação).

A seguir, alguns exemplos de álgebras.

Exemplo 3.4 Seja G um grupo multiplicativo e $\Bbbk$ um anel comutativo com identidade. Então o grupo $\Bbbk G$ é uma $\Bbbk$-álgebra com estrutura de $\Bbbk$-módulo dada por:

$$k(\sum r_i g_i) = \sum (kr_i) g_i \qquad (k, r_i \in \Bbbk; g_i \in G).$$

$\Bbbk G$ é chamado de álgebra de grupo de G sobre $\Bbbk$.
Verificaremos aqui que, de fato, $\Bbbk G$ é uma $\Bbbk$-álgebra a partir dos diagramas contidos na Definição 3.2. Sejam $k_1, k_2, k_3 \in \Bbbk$ e $g_1, g_2, g_3 \in G$ e $m(k_1 g_1 \otimes k_2 g_2) = (k_1 k_2)(g_1 g_2)$, tais que:

$$\begin{aligned}
[m \circ (m \otimes id_{\Bbbk G})](k_1 g_1 \otimes k_2 g_2 \otimes k_3 g_3) &= m \circ (m(k_1 g_1 \otimes k_2 g_2) \otimes id_{\Bbbk G}(k_3 g_3)) \\
&= m(k_1 k_2 g_1 g_2 \otimes k_3 g_3) \\
&= (k_1 k_2) k_3 (g_1 g_2) g_3.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned}
[m \circ (id_{\Bbbk G} \otimes m)](k_1 g_1 \otimes k_2 g_2 \otimes k_3 g_3) &= m \circ (id_{\Bbbk G}(k_1 g_1) \otimes m(k_2 g_2 \otimes k_3 g_3)) \\
&= m(k_1 g_1 \otimes k_2 k_3 g_2 g_3) \\
&= k_1 (k_2 k_3) g_1 (g_2 g_3).
\end{aligned}$$

Além disso, temos $u : \Bbbk \to \Bbbk G$ definida por $u(k) = k 1_{\Bbbk G}$. Perceba que temos ainda que $k 1_{\Bbbk G} = k 1_{\Bbbk} 1_G = k 1_G, \forall k \in \Bbbk$. Sejam $k_1 \in \Bbbk$ e $g_1 \in G$, tais que:

$$\begin{aligned}
[m \circ (u \otimes id_{\Bbbk G})](k \otimes k_1 g_1) &= m(u(k) \otimes id_{\Bbbk G}(k_1 g_1)) \\
&= m(k 1_G \otimes k_1 g_1) \\
&= k k_1 1_G g_1 \\
&= k k_1 g_1.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que:

$$\psi(k \otimes k_1 g_1) = k k_1 g_1.$$

Como $\Bbbk$ e G são associativos os seguintes diagramas comutam, ou seja, $\Bbbk G$ tem estrutura de álgebra.

$$\begin{tikzcd}
\Bbbk G \otimes \Bbbk G \otimes \Bbbk G \arrow[r, "m \otimes id_{\Bbbk G}"] \arrow[d, "id_{\Bbbk G} \otimes m"'] & \Bbbk G \otimes \Bbbk G \arrow[d, "m"] \\
\Bbbk G \otimes \Bbbk G \arrow[r, "m"'] & \Bbbk G
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Bbbk \otimes \Bbbk G \arrow[r, "u \otimes id_{\Bbbk G}"] \arrow[dr, "\psi"'] & \Bbbk G \otimes \Bbbk G \arrow[d, "m"] & \Bbbk G \otimes \Bbbk \arrow[l, "id_{\Bbbk G} \otimes u"'] \arrow[dl, "\phi"] \\
& \Bbbk G &
\end{tikzcd}$$

Exemplo 3.5 Sejam (A, m_A, u_A) e (B, m_B, u_B) $\Bbbk$-álgebras. Então $A \otimes B$ tem uma estrutura de álgebra dada por:

$$m((a \otimes b) \otimes (a' \otimes b')) = aa' \otimes bb' \quad \text{e} \quad u(1_{\Bbbk}) = 1_A \otimes 1_B; \quad a, a' \in A,\ b, b' \in B.$$

Verificaremos aqui que de fato $A \otimes B$ tem uma estrutura de álgebra.
De fato, sejam $a, a', a'' \in A$ e $b, b', b'' \in B$, temos:

$$\begin{aligned}[m \circ (m \otimes id_{A\otimes B})]((a \otimes b) \otimes (a' \otimes b') \otimes (a'' \otimes b'')) &= m((aa' \otimes bb') \otimes (a'' \otimes b''))\\ &= (aa')a'' \otimes (bb')b''.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}[m \circ (id_{A\otimes B} \otimes m)]((a \otimes b) \otimes (a' \otimes b') \otimes (a'' \otimes b'')) &= m(a \otimes b \otimes (a'a'' \otimes b'b''))\\ &= a(a'a'') \otimes b(b'b'').\end{aligned}$$

Como A e B são $\Bbbk$-álgebras associativas, $A \otimes B$ é associativo. Além disso, temos para todo $a \in A$ e $b \in B$,

$$\begin{aligned}[m \circ (u \otimes id_{A\otimes B})](1_{\Bbbk} \otimes (a \otimes b)) &= m(1_{A\otimes B} \otimes (a \otimes b))\\ &= m((1_A \otimes 1_B) \otimes (a \otimes b))\\ &= 1_A a \otimes 1_B b\\ &= a \otimes b.\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que:

$$\psi(1_{\Bbbk} \otimes (a \otimes b)) = a \otimes b.$$

De modo análogo, temos que $[m \circ (id_{A\otimes B} \otimes u)]((a \otimes b) \otimes 1_{\Bbbk}) = \phi((a \otimes b) \otimes 1_{\Bbbk})$.
Portanto, $A \otimes B$ é uma $\Bbbk$-álgebra e os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{tikzcd}
(A\otimes B)\otimes(A\otimes B)\otimes(A\otimes B) \arrow[r, "m\otimes id_{A\otimes B}"] \arrow[d, "id_{A\otimes B}\otimes m"'] & (A\otimes B)\otimes(A\otimes B) \arrow[d, "m"] \\
(A\otimes B)\otimes(A\otimes B) \arrow[r, "m"'] & (A\otimes B)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\Bbbk\otimes(A\otimes B) \arrow[r, "u\otimes id_{A\otimes B}"] \arrow[dr, "\psi"'] & (A\otimes B)\otimes(A\otimes B) \arrow[d, "m"] & (A\otimes B)\otimes\Bbbk \arrow[l, "id_{A\otimes B}\otimes u"'] \arrow[dl, "\phi"] \\
& (A\otimes B) &
\end{tikzcd}$$

Definição 3.6 *A aplicação twist é dada por:*

$$\begin{array}{rcl} \tau : A \otimes B & \to & B \otimes A \\ \tau(a \otimes b) & \mapsto & b \otimes a. \end{array}$$

Exemplo 3.7 Seja (A, m, u) uma $\Bbbk$-álgebra, então (A, m^{op}, u) também é uma $\Bbbk$-álgebra com as seguintes operações:

$$\begin{array}{rll} m^{op} = m \circ \tau : & A \otimes A & \to A \\ & a \otimes b & \mapsto ba \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rcl} u : \Bbbk & \to & A \\ u(1_\Bbbk) & \mapsto & 1_A. \end{array}$$

De fato, $m^{op} \circ (m^{op} \otimes id_A) = m^{op} \circ (id_A \otimes m^{op})$, pois sejam $a, b, c \in A$, tais que:

$$\begin{aligned} [m^{op} \circ (m^{op} \otimes id_A)]((a \otimes b) \otimes c) &= m^{op} \circ (m^{op}(a \otimes b) \otimes id_A(c)) \\ &= m^{op}(ba \otimes c) \\ &= c(ba). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} [m^{op} \circ (id_A \otimes m^{op})](a \otimes (b \otimes c)) &= m^{op} \circ (id_A(a) \otimes m^{op}(b \otimes c)) \\ &= m^{op}(a \otimes cb) \\ &= (cb)a. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Como (3.1)=(3.2), pois A é associativo, temos que $m^{op} \circ (m^{op} \otimes id_A) = m^{op} \circ (id_A \otimes m^{op})$. Sejam também os isomorfismos:

$$\psi(1_\Bbbk \otimes a) = a \quad \text{e} \quad \phi(a \otimes 1_\Bbbk) = a, \forall a \in A.$$

Mostremos que $m^{op} \circ (u \otimes id_A) = \psi$ e que $m^{op} \circ (id_A \otimes u) = \phi$. Seja $a \in A$, tal que:

$$\begin{aligned} m^{op} \circ (u \otimes id_A)(1_\Bbbk \otimes a) &= m^{op} \circ (u(1_\Bbbk) \otimes id_A(a)) \\ &= m^{op}(1_A \otimes a) \\ &= a1_A = a = \psi(1_\Bbbk \otimes a). \end{aligned}$$

Além disso:

$$\begin{aligned} m^{op} \circ (id_A \otimes u)(a \otimes 1_\Bbbk) &= m^{op} \circ (id_A(a) \otimes u(1_\Bbbk)) \\ &= m^{op}(a \otimes 1_A) \\ &= 1_A a = a = \phi(a \otimes 1_\Bbbk). \end{aligned}$$

Logo, os seguintes diagramas comutam e (A, m^{op}, u) é uma $\Bbbk$-álgebra.

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m^{op}\otimes id_A"] \arrow[d, "id_{\Bbbk G}\otimes m^{op}"'] & A \otimes A \arrow[d, "m^{op}"] \\ A \otimes A \arrow[r, "m^{op}"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Bbbk \otimes A \arrow[r, "u\otimes id_A"] \arrow[dr, "\psi"'] & A \otimes A \arrow[d, "m^{op}"] & A \otimes \Bbbk \arrow[l, "id_A\otimes u"'] \arrow[dl, "\phi"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Proposição 3.8 *Seja* $\rho : V^* \otimes W^* \to (V \otimes W)^*$, *sendo que* V *e* W *são* $\Bbbk$*-espaços vetoriais, definida por* $\rho(f \otimes g)(v \otimes w) = f(v)g(w)$, *para todo* $f \in V^*$ *e* $g \in W^*$ *e* $v \in V$ *e* $w \in W$, *uma aplicação* $\Bbbk$*-linear. Então:*

(i) ρ *é injetora.*

(ii) Se dim $V < \infty$ *e dim* $W < \infty$, *então* ρ *é um isomorfismo.*

Demonstração:

(i) Seja $x = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i \in Ker(\rho)$. Podemos considerar $\{g_i\}_{1\leq i\leq n}$ linearmente independente (L.I.), pois se $g = \sum \lambda_k g_k$, com λ_k constante. Temos que x pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} x = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i = \left(\sum_{i\neq j}^{n} f_i \otimes g_i\right) + f_j \otimes g_j &= \left(\sum_{i\neq k}^{n} f_i \otimes g_i\right) + f_j \otimes \lambda_k g_k \\ &= \sum_{j\neq k}^{n} (f_k \otimes g_k) + f_j \otimes \lambda_k g_k \\ &= \sum_{j\neq k}^{n} (f_k \otimes g_k) + \lambda_k f_j \otimes g_k \\ &= \sum_{j\neq k}^{n} (f_k + \lambda_k f_j) \otimes g_k. \end{aligned}$$

Seja $\rho(x) = \rho\left(\sum\limits_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i\right)$, iremos mostrar que ρ é injetora:

$$\begin{aligned} 0 = \rho(x) = \rho\left(\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i\right)(v \otimes w) &\iff \sum_{i=1}^{n} f_i(v) g_i(w) = 0 \\ &\iff \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(v) g_i\right)(w) = 0 \\ &\iff \sum_{i=1}^{n} f_i(v) g_i = 0 \\ &\iff f_i(v) = 0 \iff f_i = 0. \end{aligned}$$

Porém, como visto na seção sobre produto tensorial:

$$\sum_{i=1}^{n} 0 \otimes g_i = 0.$$

Portanto, $x = 0$ e então ρ é uma função injetora.

(ii) Como V e W possuem dimensão finita, e pelo Corolário 1.9.1:

$$\begin{aligned} dim_{\Bbbk}(V \otimes W)^* = dim_{\Bbbk}(V \otimes W) = dim_{\Bbbk}V dim_{\Bbbk}W &= dim_{\Bbbk}V^* dim_{\Bbbk}W^* \\ &= dim_{\Bbbk}(V^* \otimes W^*). \end{aligned}$$

Como $dim_{\Bbbk}(V \otimes W)^* = dim_{\Bbbk}(V^* \otimes W^*)$, temos que ρ é sobrejetora, e consequentemente é um isomorfismo.

Observação 3.9 Por indução se $V_1, \cdots, V_n$ são $\Bbbk$-espaços vetoriais finitos, então:

$$\rho : \bigotimes_{i=1}^{n} V_i^* \to \left(\bigotimes_{i=1}^{n} V_i \right)^*,$$

definida por $\rho \left(\bigotimes_{i=1}^{n} f_i \right) \left(\bigotimes_{i=1}^{n} v_i \right) = \prod_{i=1}^{n} f_i(v_i)$, com $v_i \in V$ e $f_i \in V^*$, ρ é $\Bbbk$-linear e injetora. Além disso, se $dimV_i < \infty$, $\forall i = 1 : n$, então ρ é um isomorfismo.

Seja (A, m, u) uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita, definiremos duas operações a seguir, sendo elas: Δ e ε. Ambas operações serão de suma importância para alguns resultados apresentados posteriormente.

Definimos Δ por:

$$\Delta : A^* \xrightarrow{m^t} (A \otimes A)^* \xrightarrow{\rho^{-1}} A^* \otimes A^*.$$

Ou seja, $\rho^{-1} \circ m^t = \Delta : A^* \to A^* \otimes A^*$, de tal forma que as funções ρ e m são definidas na Proposição 3.8 e na Definição 3.2, respectivamente. Relembrando que, pela Definição 1.10:

$$m^t \circ f = f \circ m, \text{ para qualquer função } f.$$

Seja $f \in A^*$ tal que: $\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} g_i \otimes h_i$, com $g_i, h_i \in A^*$. Por outro lado, temos que:

$$\Delta(f) = (\rho^{-1} \circ m^t)(f).$$

Aplicando ρ em ambos os lados, obtemos:

$$\begin{aligned} \rho(\Delta(f)) &= \rho(\rho^{-1} \circ m^t)(f) \\ &= m^t \circ f \\ &= f \circ m. \end{aligned}$$

Sejam quaisquer $a, b \in A$:

$$\begin{aligned}\rho(\Delta(f))(a \otimes b) = f(m(a \otimes b)) &\iff \rho\left(\sum_{=1i}^{n} g_i \otimes h_i\right)(a \otimes b) = f(ab)\\ &\iff \sum_{i=1}^{n} g_i(a)h_i(b) = f(ab).\end{aligned}$$

Portanto, sendo ρ um isomorfismo, temos:

$$\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} g_i \otimes h_i \iff f(ab) = \sum_{i=1}^{n} g_i(a)h_i(b), \forall a, b \in A. \tag{3.3}$$

Referente à operação ε, ela é definida como:

$$\varepsilon : A^* \xrightarrow{u^t} \Bbbk^* \xrightarrow{\psi} \Bbbk$$

ou seja, $\varepsilon = \psi \circ u^t$, sendo que:

$$\begin{aligned}\psi : \Bbbk^* &\to \Bbbk\\ f : \Bbbk \to \Bbbk &\mapsto f(1_\Bbbk).\end{aligned}$$

Vejamos qual propriedade ε satisfaz. Seja $f \in A^*$, então:

$$\begin{aligned}\varepsilon(f)(1_\Bbbk) = (\psi \circ u^t)(f)(1_\Bbbk) = \psi(u^t \circ f)(1_\Bbbk) &= \psi(f \circ u)(1_\Bbbk)\\ &= (f \circ u)(1_\Bbbk) = f(u(1_\Bbbk)) = f(1_A) \quad (3.4)\end{aligned}$$

Dualizando os diagramas da Definição 3.2:

$$\begin{tikzcd} A^* \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & A^* \otimes A^* \arrow[d, "id_{A^*} \otimes \Delta"] & (1)\\ A^* \otimes A^* \arrow[r, "\Delta \otimes id_{A^*}"'] & A^* \otimes A^* \otimes A^* & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \Bbbk \otimes A^* & A^* \arrow[l, "\phi"'] \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\Delta"] & A^* \otimes \Bbbk & (2)\\ & A^* \otimes A^* \arrow[ul, "\varepsilon \otimes id_{A^*}"] \arrow[ur, "id_{A^*} \otimes \varepsilon"'] & & \end{tikzcd}$$

Iremos mostrar que os diagramas (1) e (2) são comutativos. Para o diagrama (1):

Seja $f \in A^*$ tal que $\Delta(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_{1i} \otimes f_{2i}$, $\Delta(f_{1i}) = \sum\limits_{i,j=1}^{m} f_{1i1j} \otimes f_{1i2j}$ e $\Delta(f_{2i}) = \sum\limits_{i,j=1}^{s} f_{2i1j} \otimes$

f_{2i2j}. Então:

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes id_{A^*})(\Delta(f)) &= (\Delta \otimes id_{A^*})\left(\sum_{i=1}^{n} f_{1i} \otimes f_{2i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Delta(f_{1i}) \otimes id_{A^*}(f_{2i}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Delta(f_{1i}) \otimes f_{2i} \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} (f_{1i1j} \otimes f_{1i2j}) \otimes f_{2i}. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(id_{A^*} \otimes \Delta)(\Delta(f)) &= (id_{A^*} \otimes \Delta)\left(\sum_{i=1}^{n} f_{1i} \otimes f_{2i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} id_{A^*}(f_{1i}) \otimes \Delta(f_{2i}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_{1i} \otimes \Delta(f_{2i}) \\
&= \sum_{i,j=1}^{s} f_{1i} \otimes (f_{2i1j} \otimes f_{2i2j}). \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Desse modo, sejam $a, b, c \in A$, aplicando (3.5) em $a \otimes b \otimes c$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i,j=1}^{m} (f_{1i1j} \otimes f_{1i2j}) \otimes f_{2i}\right)((a \otimes b) \otimes c) &= \sum_{i,j=1}^{m} (f_{1i1j}(a) \otimes f_{1i2j}(b)) \otimes f_{2i}(c) \\
&\overset{\star}{=} \sum_{i=1}^{n} f_{1i}(ab) f_{2i}(c) \\
&= f((ab)c) = f(abc).
\end{aligned}$$

Aplicando (3.6) em $a \otimes b \otimes c$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i,j=1}^{s} f_{1i} \otimes (f_{2i1j} \otimes f_{2i2j}\right)(a \otimes (b \otimes c)) &= \sum_{i,j=1}^{s} f_{1i}(a) \otimes (f_{2i1j}(b) \otimes f_{2i2j}(c)) \\
&\overset{\star}{=} \sum_{i=1}^{n} f_{1i}(a) \otimes f_{2i}(bc) \\
&= f(a(bc)) = f(abc)
\end{aligned}$$

Perceba que em $\star$ é utilizada (3.3). Como (3.6)=(3.5), temos então que:

$$(\Delta \otimes id_{A^*}) \circ \Delta = (id_{A^*} \otimes \Delta) \circ \Delta.$$

Vejamos agora o diagrama (2):

Seja $f \in A^*$, tal que $\Delta(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} g_i \otimes h_i$. Sejam também os isomorfismos $\psi(f)(a) = f(a) \otimes 1_{\Bbbk}$ e $\phi(f)(a) = 1_{\Bbbk} \otimes f(a)$, com $a \in A$. Mostremos então que $(\varepsilon \otimes id_{A^*})\Delta(f) = \psi(f)$ e que $(id_{A^*} \otimes \varepsilon)\Delta(f) = \phi(f)$. De fato:

$$\begin{aligned}
(\varepsilon \otimes id_{A^*})\Delta(f) &= (\varepsilon \otimes id_{A^*}) \left(\sum_{i=1}^{n} g_i \otimes h_i \right) \\
&= (\varepsilon \otimes id_{A^*}) \left(\sum_{i=1}^{n} g_i \otimes h_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(g_i) \otimes id_{A^*}(h_i) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon(g_i) \otimes h_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} 1_{\Bbbk} \otimes \varepsilon(g_i) h_i \\
&\simeq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(g_i) h_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} g_i(1_A) \otimes h_i, \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

o resultado (3.7) segue de (3.4), aplicando em $a \in A$:

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(1_A) \otimes h_i(a).$$

Porém, sabemos que: $\Delta(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} g_i \otimes h_i \Longleftrightarrow f(ab) = \sum\limits_{i=1}^{n} g_i(a) h_i(b)$, $\forall a, b \in A$. Logo:

$$\begin{aligned}
(\varepsilon \otimes id_{A^*})\Delta(f) &= 1_{\Bbbk} \otimes f(1_A a) \\
&= 1_{\Bbbk} \otimes f(a).
\end{aligned}$$

Logo, $(\varepsilon \otimes id_{A^*})\Delta(f) = \psi(f)$. Para mostrar que $(id_{A^*} \otimes \varepsilon)\Delta(f) = \phi(f)$ a demonstração é feita de forma análoga.

Portanto, de fato os diagramas (1) e (2) comutam.

Observação 3.10 É importante ressaltar que a álgebra deve ser de dimensão finita pois, necessitamos que ρ seja um isomorfismo, conforme a Proposição 3.8.

Afirmação 3.11 *Dada uma* $\Bbbk$*-álgebra* (A, m, u) *de dimensão finita, obtemos que* $(A^*, \Delta, \varepsilon)$ *satisfaz:*

(i) A^* *é um* $\Bbbk$*-espaço vetorial;*

(ii) $\Delta : A^* \to A^* \otimes A^*$ *é* $\Bbbk$*-linear e o diagrama (1) é comutativo;*

(iii) $\varepsilon : A^* \to \Bbbk$ *é* $\Bbbk$*-linear e o diagrama (2) é comutativo.*

A partir da Afirmação 3.11 podemos definir uma coálgebra:

Definição 3.12 *Uma* $\Bbbk$*-coálgebra é uma tripla* (C, Δ, ε) *onde:*

(i) C *é um* $\Bbbk$*-espaço vetorial;*

(ii) $\Delta : C \to C \otimes C$ *é* $\Bbbk$*-linear;*

(iii) $\varepsilon : C \to \Bbbk$ *é* $\Bbbk$*-linear;*

e satisfaz a comutatividade dos seguintes diagramas:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "id_C \otimes \Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\Delta \otimes id_C"'] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Bbbk \otimes C & C \arrow[l, "\phi"'] \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes \Bbbk \\ & C \otimes C \arrow[ul, "\varepsilon \otimes id_C"] \arrow[ur, "id_C \otimes \varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

Chamamos a operação Δ *de comultiplicação e a operação* ε *de counidade. Ressalta-se ainda que* ψ *e* ϕ *são os seguintes isomorfismos:*

$$\begin{array}{rcl} \psi : C & \to & C \otimes \Bbbk \\ \psi(c) & \mapsto & c \otimes 1_{\Bbbk} \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rcl} \phi : C & \to & \Bbbk \otimes C \\ \phi(c) & \mapsto & 1_{\Bbbk} \otimes c \end{array}$$

Um resultado importante para o trabalho é apresentado a seguir, unindo a Afirmação 3.11 e a Definição 3.12:

Teorema 3.13 *Seja* (A, m, u) *uma* $\Bbbk$*-álgebra de dimensão finita. Então* $(A^*, \Delta, \varepsilon)$ *é uma coálgebra.*

Observação 3.14 Perceba que se $c \in C$ tal que $\Delta(c) = \sum_{i=1}^{n} c_{1i} \otimes c_{2i}$, também como

$\Delta(c_{1i}) = \sum\limits_{i,j=1}^{m} c_{1i1j} \otimes c_{1i2j}$ e $\Delta(c_{2i}) = \sum\limits_{i,j=1}^{s} c_{2i1j} \otimes c_{2i2j}$. Então vale:

$$\begin{aligned}
(id_C \otimes \Delta)(\Delta(c)) &= (\Delta \otimes id_C)(\Delta(c)) \\
(id_C \otimes \Delta)\left(\sum_{i=1}^{n} c_{1i} \otimes c_{2i}\right) &= (\Delta \otimes id_C)\left(\sum_{i=1}^{n} c_{1i} \otimes c_{2i}\right) \\
\sum_{i=1}^{n} id_C(c_{1i}) \otimes \Delta(c_{2i}) &= \sum_{i=1}^{n} \Delta(c_{1i}) \otimes id_C(c_{2i}) \\
\sum_{i,j=1}^{s} c_{1i} \otimes c_{2i1j} \otimes c_{2i2j} &= \sum_{i,j=1}^{m} c_{1i1j} \otimes c_{1i2j} \otimes c_{2i}.
\end{aligned}$$

Assim como:

$$\begin{aligned}
(\varepsilon \otimes id_C)\Delta(c) &= \phi(c) \\
(\varepsilon \otimes id_C)\left(\sum_{i=1}^{n} c_{1i} \otimes c_{2i}\right) &= 1_{\Bbbk} \otimes c \\
\sum_{i=1}^{n} \varepsilon(c_{1i}) \otimes id_C(c_{2i}) &= 1_{\Bbbk} \otimes c \\
\sum_{i=1}^{n} \varepsilon(c_{1i}) \otimes c_{2i} &= 1_{\Bbbk} \otimes c \\
\sum_{i=1}^{n} 1_{\Bbbk} \otimes \varepsilon(c_{1i})c_{2i} &= 1_{\Bbbk} \otimes c.
\end{aligned}$$

Porém, temos que $1_{\Bbbk} \otimes c \simeq c \otimes 1_{\Bbbk}$. Assim:

$$\sum_{i=1}^{n} 1_{\Bbbk} \otimes \varepsilon(c_{1i})c_{2i} = 1_{\Bbbk} \otimes c \simeq c \otimes 1_{\Bbbk} = \sum_{i=1}^{n} c_{1i}\varepsilon(c_{21}) \otimes 1_{\Bbbk}.$$
$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon(c_{1i})c_{2i} = c = \sum_{i=1}^{n} c_{1i}\varepsilon(c_{2i}).$$

Observação 3.15 Seja C uma coálgebra. Definimos $\Delta_1 = \Delta : C \to C \otimes C$, e em geral $\Delta_n : C \to \underbrace{C \otimes ... \otimes C}_{n+1 vezes}$, de tal forma que: $\Delta_n = (\Delta \otimes id_C^{n-1}) \circ \Delta_{n-1}$. Podemos ainda generalizar conforme a seguinte proposição:

Proposição 3.16 *Seja (C, Δ, ε) uma cóalgebra. Então, para todo $n \geq 2$ e para qualquer $p \in \{0, ..., n-1\}$ a seguinte igualdade vale:*

$$\Delta_n = (id_C^p \otimes \Delta \otimes id_C^{n-1-p}) \circ \Delta_{n-1}.$$

Demonstração:

Indução sobre n:
Para $n = 2$ temos que $p = 1$ e assim temos a definição de $\Delta_2 = (\Delta \otimes id_C) \circ \Delta$. Verificando para $n = 3$ temos as seguintes possibilidades, para $p = 0$:

$$(id_C^0 \otimes \Delta \otimes id_C^{3-1-0}) \circ \Delta_2 = (\Delta \otimes id_C^2) \circ \Delta_2 = \Delta_3.$$

Para $p = 1$:

$$\begin{aligned}
(id_C \otimes \Delta \otimes id_C^{3-1-1}) \circ \Delta_2 &= (id_C \otimes \Delta \otimes id_C) \circ \Delta_2 \\
&= (id_C \otimes \Delta \otimes id_C)((\Delta \otimes id_C) \circ \Delta) \\
&= (((id_C \otimes \Delta) \circ \Delta) \otimes id_C) \circ \Delta.
\end{aligned}$$

Porém, como já demonstrado $\Delta_2 = (\Delta \otimes id_C) \circ \Delta = (id_C \otimes \Delta) \circ \Delta$. Assim:

$$\begin{aligned}
(((id_C \otimes \Delta) \circ \Delta) \otimes id_C) \circ \Delta &= (((\Delta \otimes id_C) \circ \Delta) \otimes id_C) \circ \Delta \\
&= (\Delta \otimes id_C \otimes id_C)((\Delta \otimes id_C) \circ \Delta) \\
&= (\Delta \otimes id_C^2) \circ \Delta_2 = \Delta_3.
\end{aligned}$$

Suponhamos o resultado válido para n e mostremos que seja válido para $n + 1$. De fato para $p = 0$:

$$\begin{aligned}
(id_C^0 \otimes \Delta \otimes id_C^n) \circ \Delta_n &= (\Delta \otimes id_C^n) \circ \Delta_n \\
&= \Delta_{n+1}.
\end{aligned}$$

Vejamos para $p = 1$:

$$\begin{aligned}
(id_C \otimes \Delta \otimes id_C^{n-1}) \circ \Delta_n &= (id_C \otimes \Delta \otimes id_C^{n-1})(\Delta \otimes id_C^{n-1}) \circ \Delta_{n-1} \\
&= (((id_C \otimes \Delta) \circ \Delta) \otimes id_C^{n-1}) \circ \Delta_{n-1} \\
&= (((\Delta \otimes id_C) \circ \Delta) \otimes id_C^{n-1}) \circ \Delta_{n-1} \\
&= (\Delta \otimes (id_C \otimes id_C^{n-1})(\Delta \otimes id_C^{n-1})) \circ \Delta_{n-1} \\
&= (\Delta \otimes id_C^n) \otimes \Delta_n = \Delta_{n+1}.
\end{aligned}$$

Ainda, mostrando para $n + 1$, realizaremos a indução sobre p. Assumindo que seja válido para $p - 1$, mostraremos que vale para p. De fato:

$$\begin{aligned}
(id_C^p \otimes \Delta \otimes id_C^{(n+1)-1-p}) \circ \Delta_n &= (id_C^p \otimes \Delta \otimes id_C^{n-p})(id_C^{p-1} \otimes \Delta \otimes id_C^{n-p}) \circ \Delta_{n-1} \\
&= (((id_C^p \otimes \Delta) \circ (id_C^{p-1} \otimes \Delta)) \otimes id_C^{n-p}) \circ \Delta_{n-1} \\
&= (id_C^{p-1} \otimes ((id_C \otimes \Delta) \circ \Delta) \otimes id_C^{n-p}) \circ \Delta_{n-1} \\
&= (id_C^{p-1} \otimes ((\Delta \otimes id_C) \circ \Delta) \otimes id_C^{n-p}) \circ \Delta_{n-1} \\
&= (id_C^{p-1} \otimes \Delta \otimes id_C^{n+1-p})(id_C^{p-1} \otimes \Delta \otimes id_C^{n-p}) \circ \Delta_{n-1} \\
&= (id_C^{p-1} \otimes \Delta \otimes id_C^{(n+1)-p}) \circ \Delta_n \overset{H.I.}{=} \Delta_{n+1}.
\end{aligned}$$

Para facilitar algumas demonstrações, definimos a **Notação Sigma**, também conhecida como **Notação de Heyenman-Sweedler**:

Definição 3.17 (Notação Sigma) *Seja* (C, Δ, ε) *uma coálgebra. Para cada elemento* $c \in C$ *denotamos:*

$$\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2.$$

Como Δ *é* $\Bbbk$*-linear, podemos omitir o somatório:* $\Delta(c) = c_1 \otimes c_2$.

Um resultado importante dessa notação, utilizando a Observação 3.15 e a Proposição 3.16, é o seguinte fato:

$$\Delta_2(c) = \sum c_{1_1} \otimes c_{1_2} \otimes c_2 = \sum c_1 \otimes c_{2_1} \otimes c_{2_2} = \sum c_1 \otimes c_2 \otimes c_3.$$

Vejamos alguns exemplos de cóalgebras:

Exemplo 3.18 Seja (C, Δ, ε) uma coálgebra, então $(C, \Delta^{op}, \varepsilon)$ também é uma coálgebra com as seguintes operações:

$$\begin{array}{rcl} \Delta^{cop} = \tau \circ \Delta : C & \rightarrow & C \otimes C \\ \Delta^{cop} & \mapsto & \tau \circ \Delta(c) = \displaystyle\sum \tau(c_1 \otimes c_2) = \sum c_2 \otimes c_1. \end{array}$$

E a counidade usual:

$$\varepsilon : C \ \rightarrow \ \Bbbk.$$

Mostremos que $(id_C \otimes \Delta^{cop}) \circ \Delta^{cop} = (\Delta^{cop} \otimes id_C) \circ \Delta^{cop}$. De fato, seja $c \in C$, $\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2$, $\Delta(c_1) = \sum c_{11} \otimes c_{12}$ e $\Delta(c_2) = \sum c_{21} \otimes c_{22}$, tal que:

$$\begin{array}{rcl} (id_C \otimes \Delta^{cop}) \circ \Delta^{cop}(c) & = & (id_C \otimes \Delta^{cop}) \left(\displaystyle\sum c_2 \otimes c_1\right) \\ & = & \displaystyle\sum id_C(c_2) \otimes \Delta^{cop}(c_1) \\ & = & \displaystyle\sum c_2 \otimes c_{1_2} \otimes c_{1_1} = c_3 \otimes c_2 \otimes c_1. \end{array}$$

Por outro lado,

$$\begin{array}{rcl} (\Delta^{cop} \otimes id_C) \circ \Delta^{cop}(c) & = & (\Delta^{cop} \otimes id_C) \left(\displaystyle\sum c_2 \otimes c_1\right) \\ & = & \displaystyle\sum \Delta^{cop}(c_2) \otimes id_C(c_1) \\ & = & \displaystyle\sum c_{2_2} \otimes c_{2_1} \otimes c_1 = c_3 \otimes c_2 \otimes c_1. \end{array}$$

Logo $(id_C \otimes \Delta^{cop}) \circ \Delta^{cop} = (\Delta^{cop} \otimes id_C) \circ \Delta^{cop}$.

Sejam também os isomorfismos, ψ e ϕ conforme a Definição 3.12, iremos mostrar que $(\varepsilon \otimes id_C) \circ \Delta^{cop}(c) = \phi(c)$, para algum $c \in C$. De fato:

$$\begin{aligned} (\varepsilon \otimes id_C) \circ \Delta^{cop}(c) &= (\varepsilon \otimes id_C) \left(\sum c_2 \otimes c_1 \right) \\ &= \sum \varepsilon(c_2) \otimes c_1 \\ &= \sum 1_{\Bbbk} \otimes c_1 \varepsilon(c_2) = 1_{\Bbbk} \otimes c = \phi(c). \end{aligned}$$

De forma análoga, temos que $(id_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta^{cop}(c) = \psi(c)$.

Portanto, os seguintes diagramas comutam e então $(C, \Delta^{op}, \varepsilon)$ é uma coálgebra.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta^{cop}"] \arrow[d, "\Delta^{cop}"'] & C \otimes C \arrow[d, "id_C \otimes \Delta^{cop}"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\Delta^{cop} \otimes id_C"'] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Bbbk \otimes C & C \arrow[l, "\phi"'] \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\Delta^{cop}"] & C \otimes \Bbbk \\ & C \otimes C \arrow[ul, "\varepsilon \otimes id_C"] \arrow[ur, "id_C \otimes \varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

Exemplo 3.19 Seja G um grupo, $\Bbbk$G é um $\Bbbk$-espaço vetorial com base G. Então $\Bbbk$G é uma coálgebra com comultiplicação Δ e counidade ε defindos por $\Delta(g) = g \otimes g$ e $\varepsilon(g) = 1_{\Bbbk}$, para cada $g \in G$.

Mostremos então que $(id_{\Bbbk G} \otimes \Delta) \circ (\Delta)(g) = (\Delta \otimes id_{\Bbbk G}) \circ (\Delta)(g)$, tal que $g \in G$. De fato:

$$\begin{aligned} (id_{\Bbbk G} \otimes \Delta) \circ (\Delta)(g) &= (id_{\Bbbk G} \otimes \Delta)(g \otimes g) \\ &= id_{\Bbbk G}(g) \otimes \Delta(g) = g \otimes g \otimes g = (\Delta \otimes id_{\Bbbk G})(\Delta)(g). \end{aligned}$$

Definimos os isomorfismos como sendo: $\psi(g) = g \otimes 1_{\Bbbk}$ e $\phi(g) = 1_{\Bbbk} \otimes g$, tais que:

$$\begin{aligned} (id_{\Bbbk G} \otimes \varepsilon)(\Delta)(g) &= (id_{\Bbbk G} \otimes \varepsilon)(g \otimes g) \\ &= id_{\Bbbk G}(g) \otimes \varepsilon(g) = g \otimes 1_{\Bbbk} = \psi(g), \end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned} (\varepsilon \otimes id_{\Bbbk G})(\Delta)(g) &= (\varepsilon \otimes id_{\Bbbk G})(g \otimes g) \\ &= \varepsilon(g) \otimes id_{\Bbbk G}(g) = 1_{\Bbbk} \otimes g = \phi(g). \end{aligned}$$

Portanto, os seguintes diagramas comutam e $\Bbbk G$ é uma coálgebra.

$$\begin{tikzcd} \Bbbk G \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & \Bbbk G \otimes \Bbbk G \arrow[d, "id_{\Bbbk G} \otimes \Delta"] \\ \Bbbk G \otimes \Bbbk G \arrow[r, "\Delta \otimes id_{\Bbbk G}"'] & \Bbbk G \otimes \Bbbk G \otimes \Bbbk G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Bbbk \otimes \Bbbk G & \Bbbk G \arrow[l, "\phi"'] \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\Delta"] & \Bbbk G \otimes \Bbbk \\ & \Bbbk G \otimes \Bbbk G \arrow[ul, "\varepsilon \otimes id_{\Bbbk G}"] \arrow[ur, "id_{\Bbbk G} \otimes \varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

Afirmação 3.20 *Seja (C, Δ, ε) uma coálgebra. Então (C^*, m_{C^*}, u_{C^*}) é uma álgebra.*

Seja m_{C^*}, tal que:

$$m_{C^*} : C^* \otimes C^* \xrightarrow{\rho} (C \otimes C)^* \xrightarrow{\Delta^t} C^*,$$

ou seja, dados $f, g \in C^*$, definimos a multiplicação como sendo:

$$\begin{aligned} m_{C^*}(f \otimes g) &= \Delta^t \circ (\rho(f \otimes g)) \\ &= \rho(f \otimes g) \circ \Delta. \end{aligned}$$

De tal forma que:

$$m_{C^*}(f \otimes g) = f * g = m_{\Bbbk} \circ (f \otimes g) \circ \Delta.$$

Denominamos a operação $*$ como **produto de convolução**.

Definimos u_{C^*} como sendo:

$$u_{C^*} : \Bbbk \xrightarrow{\psi} \Bbbk^* \xrightarrow{\varepsilon^*} C^*.$$

Sendo ψ um isomorfismo. A partir, disso definimos a unidade de C^* como sendo:

$$u_{C^*}(1_{\Bbbk})(c) = \psi(1_{\Bbbk})\varepsilon((c)) = \varepsilon(c), \forall c \in C.$$

Logo, $u_{C^*}(1_{\Bbbk}) = \varepsilon$. Mostremos agora que de fato (C^*, m_{C^*}, u_{C^*}) é uma álgebra. Demonstração:

(i) Provaremos que $(f*g)*h = f*(g*h)$, tal que $f, g, h \in C^*$ e $\Delta(c) = c_1 \otimes c_2$, $\forall c \in C$. De fato:

$$\begin{aligned} [(f*g)*h](c) &= m_{\Bbbk} \circ ((f*g) \otimes h)(\Delta(c)) \\ &= m_{\Bbbk} \circ (((f*g) \otimes h))(c_1 \otimes c_2) \\ &= m_{\Bbbk} \circ ((f*g)(c_1) \otimes h(c_2)) \\ &= (f*g)(c_1)h(c_2) \\ &= m_{\Bbbk} \circ (f \otimes g)(\Delta(c_1))h(c_2) \\ &= m_{\Bbbk}((f \otimes g)(c_{1_1} \otimes c_{1_2}))h(c_2) \\ &= m_{\Bbbk}(f(c_{1_1}) \otimes g(c_{1_2}))h(c_2) \\ &= f(c_{1_1})g(c_{12})h(c_2) \\ &= f(c_1)g(c_{2_1})h(c_{2_2}) \\ &= m_{\Bbbk} \circ (f(c_1) \otimes (g \otimes h))(\Delta(c_2)) \\ &= m_{\Bbbk} \circ (f(c_1) \otimes (g*h)(c_2)) \\ &= m_{\Bbbk} \circ (f \otimes (g*h))(\Delta(c)) \\ &= [f*(g*h)](c). \end{aligned}$$

Portanto, $(f * g) * h = f * (g * h)$.

(ii) Provaremos agora que $\varepsilon * f = f * \varepsilon = f$, $\forall f \in C^*$. Seja $c \in C$ de tal forma que $\Delta(c) = c_1 \otimes c_2$, tal que:

$$\begin{aligned}
(\varepsilon * f)(c) &= m_{\Bbbk} \circ (\varepsilon \otimes f) \circ \Delta(c) \\
&= m_{\Bbbk}\left((\varepsilon \otimes f)(c_1 \otimes c_2)\right) \\
&= m_{\Bbbk}(\varepsilon(c_1) \otimes f(c_2)) \\
&= \varepsilon(c_1) f(c_2) \\
&= f(\varepsilon(c_1)(c_2)) = f(c)
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos $(f * \varepsilon)(c) = f(c_1)\varepsilon(c_2) = f((c_1)\varepsilon(c_2)) = f(c)$ e, portanto $\varepsilon * f = f * \varepsilon = f$.

A partir dos resultados apresentados temos a seguinte proposição:

Proposição 3.21 *Seja (C, Δ, ε) uma $\Bbbk$-coálgebra. Então $(C^*, *, \varepsilon)$ é uma $\Bbbk$-álgebra e os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
C^* \otimes C^* \otimes C^* \arrow[r, "* \otimes id_{C^*}"] \arrow[d, "id_{C^*} \otimes *"'] & C^* \otimes C^* \arrow[d, "*"] \\
C^* \otimes C^* \arrow[r, "*"'] & C^*
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Bbbk \otimes C^* \arrow[r, "\varepsilon \otimes id_{C^*}"] \arrow[dr, "\psi"'] & C^* \otimes C^* \arrow[d, "*"] & C^* \otimes \Bbbk \arrow[l, "id_{C^*} \otimes \varepsilon"'] \arrow[dl, "\phi"] \\
& C^* &
\end{tikzcd}$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como já mencionado, o objetivo geral deste trabalho consistiu em definir uma álgebra e uma coálgebra, exemplificando-as de tal forma que pudesse ser trabalhada cada propriedade apresentada. Inúmeros resultados foram assegurados durante o trabalho, porém, alguns tiveram mais importância. Um deles é o fato de que, caso se tenha uma álgebra finita, podemos então garantir que o dual dessa álgebra é também uma coálgebra, assim como, ao dualizarmos uma coálgebra, obtemos também uma álgebra.

Por meio desse trabalho, foi possível estudar diversos conteúdos considerados básicos por algebristas, o que é um incentivo para pesquisar e estudar mais sobre o tema, em uma etapa posterior à graduação. Um destes temas, a Álgebra de Hopf, necessita primeiramente conhecimentos sobre o conceito de biálgebra, a qual, caso seja dada continuidade nos estudos atuais, será o próximo tema abordado.

Ressalta-se,por sua importância, que Álgebra de Hopf é um assunto atualmente estudado em grandes universidades.

REFERÊNCIAS

DASCALESCU, S. et al. *Hopf Algebras: An introduction*. Bucharest: CRC Press, 2000.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Linear Algebra*. New Jersey: Englewood Cliffs, 1971.

HUNGERFORD, T. W. *Graduate Texts in Mathematics: Algebra*. Nova York: . 8 ed. Springer-Verlag, 1974.