

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM
MATEMÁTICA

GUILHERME DE MARTINI

UM ESTUDO SOBRE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

TOLEDO

2016

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM
MATEMÁTICA

GUILHERME DE MARTINI

UM ESTUDO SOBRE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Toledo, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Ma. Marcia Regina Piovesan

TOLEDO

2016

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM
MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

O Trabalho de Conclusão de Curso intitulado “UM ESTUDO SOBRE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS” foi considerado **APROVADO** de acordo com a ata n° __ de __/__/----

Fizeram parte da banca examinadora os professores:

Professora Orientadora Ma. Marcia Regina Piovesan

Professora Ma. Karen Carrilho da Silva Lira

Professora Dra. Suellen Ribeiro Pardo Garcia

TOLEDO

2016

RESUMO

A presente pesquisa aborda um estudo sobre Equações Diferenciais Parciais (EDP's) entorno de algumas das consideradas principais EDP's: a Equação do Calor e a Equação da Onda. Por meio de uma pesquisa bibliográfica, será apresentado aqui definições, pré-requisitos, classificações, métodos e por fim, alguns exemplos representados por esse tipo de equações. O objetivo é caracterizar as Equações Diferenciais Parciais e suas aplicações que aparecem em problemas da Física e Matemática.

Palavras-chave: Séries de Fourier, Equações Diferenciais Parciais, Equação da Onda, Equação do Calor.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

4.1	Ilustração da solução do exemplo 4.4 para $m = 1$ e $m = 5$	27
4.2	Barra condutora de calor	30
4.3	Ilustração da solução do exemplo 4.6 tomando os 20 primeiros termos da série.	34
4.4	Corda vibrante	35
4.5	Ilustração da solução do exemplo 4.7 tomando os 20 primeiros termos da série.	38

LISTA DE TABELAS

4.1	Valores de k para diferentes substâncias	31
-----	--	----

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES	5
LISTA DE TABELAS	6
1 INTRODUÇÃO	8
2 INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	9
2.1 História das Equações Diferenciais	9
2.2 Algumas Aplicações de EDO's	11
2.3 Classificação das Equações Diferenciais	11
2.3.1 Equações Diferenciais Ordinárias ou Parciais	12
2.3.2 Classificação das Equações Diferenciais Ordinárias Quanto a sua Ordem	12
2.3.3 Classificação das Equações Diferenciais Ordinárias Quanto a Linearidade	13
2.3.4 Equações Homogêneas e Não-Homogêneas	13
3 RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS	15
3.1 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem	15
3.1.1 Equações Lineares	15
3.1.2 Equações Separáveis	16
3.1.3 Equações Exatas	17
3.2 Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem	17
3.2.1 Raízes Reais e Distintas	18
3.2.2 Raízes Complexas Conjugadas	19
3.2.3 Raízes Repetidas	20
4 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS	22
4.1 Séries de Fourier	22
4.2 Resolução das Equações Diferenciais Parciais	27
4.3 Equação do Calor	30
4.4 Equação da Onda	35
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	39
REFERÊNCIAS	39

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho apresenta-se uma breve introdução às equações diferenciais ordinárias (EDO's), sua história, os principais colaboradores nesta área, algumas aplicações, bem como um estudo visando a resolução destas equações, suas classificações e alguns dos seus métodos de resolução, tais como o método de equações lineares, variáveis separáveis e equações exatas.

Além das equações diferenciais ordinárias, realizamos o estudo sobre as equações diferenciais parciais (EDP's), sua classificação, as séries de Fourier, as fórmulas de Euler-Fourier, bem como, a equação da Onda e a equação de difusão do Calor. Esta última, descreve a distribuição de temperatura em três coordenadas espaciais e uma coordenada temporal:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \dot{q} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

onde \dot{q} é considerado um termo de fonte e α representa a difusividade térmica do material.

O estudo das Equações Diferenciais começou com a criação do Cálculo Diferencial e Integral no século XVII, e hoje em dia é pautado, inicialmente, por suas aplicações à mecânica das partículas. A partir do sucesso obtido ao trabalhar esses problemas utilizando o Cálculo Diferencial, no século XVIII físicos e matemáticos se sentiram estimulados a procurar modelos para problemas de diversos ramos da Física que expressem os fenômenos em termos de Equações Diferenciais. Porém, boa parte dos modelos têm Equações Diferenciais Parciais, que trazem algumas dificuldades matemáticas na resolução.

Assim sendo, o tema previsto para o Trabalho de Conclusão de Curso em questão está relacionado a Equações Diferenciais Parciais (EDP's), visando responder as seguintes perguntas: "O que são EDP's? Quais suas aplicações?".

O trabalho foi dividido em três seções, sendo que a primeira seção trata de uma revisão de equações diferenciais ordinárias, a segunda abordamos os métodos resolutivos de EDO's e na terceira, iniciamos os estudos sobre as equações diferenciais parciais com o estudo das séries de Fourier e o método de separação de variáveis para EDP. Por fim, estudamos a equação da onda e calor.

2 INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

2.1 História das Equações Diferenciais

As equações diferenciais começaram ser investigadas com o estudo do cálculo no final do século XVII. Sendo que este, atingiu seu auge nas mãos de Newton (1642 - 1727) e, principalmente, nas de Leibniz (1647-1716) – foi ele que deu ao Cálculo Diferencial e Integral as formas e notações que originaram os símbolos utilizados atualmente, além de outros fatores que tornaram a linguagem da Matemática universal. A descoberta desses dois, ou ainda, a conexão e generalização entre a diferenciação e a integração tornou-se um instrumento de valor imprescindível para a Matemática. Porém, atribuir exclusivamente a Newton e Leibniz a criação do Cálculo Diferencial e Integral é um erro (CONTADOR, 2012).

Apesar de não ter atuado especificamente na área de equações diferenciais, a contribuição de Newton no Cálculo e nos princípios básicos da Mecânica forneceram a base para aplicações das equações diferenciais no século XVIII. Além disso, Newton classificou as equações diferenciais de primeira ordem de acordo com a fórmula $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, desenvolvendo um método para resolver a última equação, no caso em que $f(x, y)$ é um polinômio em x e y , usando séries infinitas.

No século XVIII a matemática foi implantada definitivamente como uma ferramenta de pesquisa de fenômenos naturais. Assim, os irmãos Jacques Bernoulli (1654 - 1705) e Jean Bernoulli (1667 - 1748) desenvolveram várias aplicações para o cálculo existente até o momento (VARGAS, 1996). Além disso, no campo das equações diferenciais, Jacques Bernoulli contribuiu com o estudo da chamada Equação de Bernoulli $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ que ele, Leibniz e Jean Bernoulli resolveram por redução a uma equação linear (BOYER; MERZBACH, 2012). A partir daí, com essas e outras ferramentas a disposição dos estudiosos é que tornou-se possível escrever equações matemáticas que serviam de modelos para os fenômenos físicos.

Em 1788, Lagrange (1736 - 1813) publicou sua obra intitulada como *Mécanique Analytique*, onde abordou os princípios da mecânica e propôs a solução de qualquer problema por meio da integração de equações diferenciais. Poucos anos mais tarde, Fourier (1768 - 1830) buscava a matematização de um fenômeno um tanto quanto desafiador: o calor. Como consequência disso, desenvolveu as conhecidas séries de Fourier, o que de certo modo motivou todo o desenvolvimento dessa área da Matemática.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) nasceu em Leipzig e completou seu doutorado em filosofia quando tinha apenas 20 anos, era basicamente autodidata em

matemática, durante muitos anos de sua vida, trabalhando como embaixador e conselheiro de diversas famílias reais alemães, o que lhe permitiu conhecer diversos matemáticos, entre eles os irmãos Bernoulli. Entre suas principais contribuições para as equações diferenciais, Leibniz descobriu o método de separação de variáveis, a redução de equações homogêneas a equações separáveis e o procedimento para resolver equações lineares de primeira ordem.

Tanto Newton quanto Leibniz foram motivados a estudar as equações diferenciais por problemas físicos, sendo que as preocupações se voltavam para as soluções das equações de forma explícita.

Outros grandes matemáticos como Jakob e Johann Bernoulli, Leonhard Euler, Joseph Louis Lagrange e Pierre Simon de Laplace tiveram grande importância no desenvolvimento das equações diferenciais no século XVIII.

Os irmãos Bernoulli descobriram muitos métodos elementares para a resolução de equações diferenciais, foram os primeiros a usar a palavra “integral” no sentido moderno da palavra, e através das equações diferenciais resolveram muitos problemas relacionados à mecânica entre outras áreas.

Aluno de Johann Bernoulli, Leonhard Euler (1707 - 1783) é considerado o maior matemático do século XVIII, suas obras completas compreendem mais de 70 volumes e seus interesses incluem todas as áreas da matemática e muitos campos de aplicações. Nas equações diferenciais identificou a condição para que as equações diferenciais de primeira ordem sejam exatas, desenvolveu a teoria de fatores integrantes, encontrou a solução geral para equações lineares homogêneas com coeficientes constantes, fez contribuições importantes em equações diferenciais parciais e deu o primeiro tratamento sistemático do cálculo de variações.

Como relata FIGUEIREDO (2005), os estudos do século XVIII apontaram que o número de equações que podiam ser resolvidas em termos de equações elementares era muito pequeno, o que gerou, no século XIX, a busca de novos métodos, surgindo assim o uso das séries de funções.

No século XX, houve também uma grande investigação nas questões teóricas de existência e unicidade, principalmente no plano complexo. É nesta época que começam a ser estudados intensamente as equações diferenciais parciais à medida que torna-se claro seu papel fundamental em física matemática, como destaca BOYCE e DIPRIMA (2012).

Com o surgimento de ferramentas poderosas, como os computadores, no século XX, intensificam-se os estudos de problemas que podem ser resolvidos numericamente. Outra característica do século XX é a criação de métodos geométricos, especialmente para equações não lineares, com o objetivo de entender o comportamento de soluções de maneira geométrica e analítica.

Embora esse assunto seja antigo, as equações diferenciais continuam sendo uma excelente fonte de problemas ainda não resolvidos, os quais motivam muitos pesquisadores a estudá-los, principalmente pelo impulso gerado através dos avanços tecnológicos e

computacionais.

2.2 Algumas Aplicações de EDO's

A modelagem do crescimento populacional é um exemplo simples do uso das equações diferenciais ordinárias. Utilizando a hipótese de que a taxa segundo a qual uma determinada população cresce em um determinado instante é proporcional à população total naquele instante, ou seja, quanto mais indivíduos houver em um instante t , mais indivíduos existirão no futuro. A expressão matemática que modela tal situação é dada na seguinte forma: $\frac{dP}{dt} = kP(t)$, onde $P(t)$ é a população no instante t e k é uma constante de proporcionalidade.

Esta equação é muito utilizada para o cálculo de estimativa de crescimento populacional em um pequeno intervalo de tempo de pequenas populações, como ocorre no caso do crescimento de bactérias, não sendo muito eficaz no cálculo, por exemplo, da população humana, pois não considera diversos fenômenos como as emigrações e imigrações.

A equação do crescimento pode ser usada também para o cálculo do decaimento radiativo de uma determinada substância. Um exemplo é o elemento rádio (Ra-226) transmuta-se no gás radônio radiativo (Rn-222), onde a quantidade de núcleos A é proporcional ao instante t , ou seja $\frac{dA}{dt} = kA$, onde k é uma constante de proporcionalidade. Outro exemplo em que aparecem as EDO's que está bastante ligado a nossa vida cotidiana é o cálculo dos juros de um investimento bancário.

Suponha que uma certa quantia de dinheiro é depositada em um banco que paga uma taxa de juros anual r . O valor $S(t)$ do investimento em um instante t depende da frequência na qual os juros são compostos, considerando que os juros são calculados continuamente, temos que a taxa de variação do valor do investimento é $\frac{dS}{dt}$ e essa quantidade é igual a taxa de juros, r , vezes o valor corrente do investimento, ou seja $\frac{dS}{dt} = rS$, essa é a equação diferencial que nos indica o valor total do investimento em um instante de tempo.

2.3 Classificação das Equações Diferenciais

Tendo como objetivo o estudo dos métodos de resolução das equações diferenciais e com o propósito de facilitar o nosso estudo, podemos classificar as equações diferenciais quanto a sua dependência de uma ou várias variáveis independentes, quanto a sua ordem, homogeneidade e linearidade.

2.3.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS OU PARCIAIS

Esta classificação baseia-se em descobrir se a função desconhecida depende de uma única variável independente ou de diversas variáveis.

Definição 2.1 *Dada uma equação diferencial, se esta contiver somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma única variável independente, ela será chamada de equação diferencial ordinária (EDO). Sendo assim, se obtivermos uma equação diferencial com uma ou mais variáveis dependentes em relação a duas ou mais variáveis independentes, esta equação será chamada de equação diferencial parcial (EDP).*

Exemplo 2.1 *Algumas EDO's:*

$$y''(t) + y'(t) + f(t) = g(t)$$

$$y'(t) + 5y(t) = 2x(t)$$

Exemplo 2.2 *Algumas de EDP's:*

$$k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (\text{Equação do Calor})$$

$$a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (\text{Equação da Onda})$$

2.3.2 CLASSIFICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS QUANTO A SUA ORDEM

Quanto a ordem, as equações diferenciais são classificadas conforme as derivadas presentes na equação, a ordem é correspondente a derivada de maior grau.

Exemplo 2.3

$$y' + 5y = e^x - \text{EDO de } 1^{\text{a}} \text{ Ordem}$$

$$y''' + y' + 5 = 0 - \text{EDO de } 3^{\text{a}} \text{ Ordem}$$

Observação 2.1 *Podemos expressar uma equação diferencial ordinária de ordem n em uma variável dependente na forma geral $F(x, y, y', \dots, y^n) = 0$ onde F é uma função de valores reais de $n + 1$ variáveis, onde $y^n = \frac{d^n y}{dx^n}$, ou seja, podemos resolver essa equação de forma que a derivada mais alta seja (y^n) .*

Exemplo 2.4

$$y' = f(x, y)$$

$$y'' = f(x, y, y')$$

2.3.3 CLASSIFICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS QUANTO A LINEARIDADE

Em relação a linearidade, dizemos que uma equação diferencial ordinária de ordem n é linear se F for linear em y, y', \dots, y^n . Isto é, uma equação diferencial de n -ésima ordem é linear quando $a_n(x)y^n + a_{(n-1)}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y - g(x) = 0$, ou seja, quando os coeficientes são funções apenas de x . Por exemplo, as equações $4xy' + y = x$ e $y'' - 2y' + y = 0$ são EDO's lineares.

Desta forma, definimos que uma equação diferencial é não-linear se F não for linear em algum de seus termos em relação a variável independente. Funções não-lineares da variável dependente ou de suas derivadas como $\text{sen } y$ ou $e^{y'}$, não podem aparecer em uma equação linear, caracterizando assim uma equação diferencial não-linear.

Como podemos observar na equação $(1 - y)y' + 2y = e^x$, o termo $(1 - y)y'$ não é linear (coeficiente dependente de y) e a equação $y'' + \text{sen } y = 0$, o termo $\text{sen } y$ não é linear, ou seja, ambas as equações são diferenciais.

Observação 2.2 *As equações diferenciais não-lineares estão presentes em diversos fenômenos físicos, como é o caso do problema do pêndulo, o qual é expresso pela equação $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\text{sen}\theta = 0$, onde g é a aceleração da gravidade, L é o comprimento do pêndulo e θ é o valor do ângulo em relação a reta vertical. No entanto, para obtermos uma solução analítica desta equação é necessário aproximações por equações lineares, o que é chamado de linearização.*

Os métodos para resolução destas equações não estão completamente desenvolvidos, por este motivo, muitos problemas ainda estão sem soluções. Na maioria das vezes são feitas apenas aproximações pelo processo de linearização ou por métodos numéricos.

No exemplo do problema do pêndulo, quando o ângulo θ for pequeno, sua equação pode ser aproximada pela equação linear $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$.

Da mesma forma, existem muitos outros fenômenos que não podem ser representados adequadamente por equações lineares, o que torna indispensável o estudo das equações diferenciais não-lineares.

2.3.4 EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS E NÃO-HOMOGÊNEAS

Uma equação diferencial da forma $a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_0(x)y - g(x) = 0$ é dita homogênea quando possuir uma função independente $g(x) = 0$, caso contrário, se

a função independente $g(x) \neq 0$ a equação é dita não-homogênea.

3 RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

3.1 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Procurando determinar a solução de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem foram desenvolvidos alguns métodos para sua resolução, sendo esses aplicáveis a determinadas subclasses. Entre as mais importantes são as equações lineares, equações separáveis e as equações exatas, as quais serão tratadas aqui.

Observação 3.1 *O problema que envolve uma EDO com uma condição inicial $y(x_0) = y_0$ é chamada de Problema de Valor Inicial (PVI).*

3.1.1 EQUAÇÕES LINEARES

Uma equação diferencial de primeira ordem linear pode ser escrita na forma geral como $\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$ ou $y' + p(t)y = g(t)$, onde p e g são funções dadas pela variável independente t . Esta equação poderá ser resolvida multiplicando-se a equação diferencial por uma determinada função $\mu(t)$, escolhida de modo que a equação resultante seja facilmente integrável. Esta função $\mu(t)$ é chamada fator integrante, ou seja:

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y = \mu(t)g(t)$$

Considerando que $\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)\mu(t)$ temos que

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y = \frac{d[\mu(t)y]}{dt}$$

ou seja, $(\mu(t)y)' = \mu(t)g(t)$. Supondo que $\mu(t)$ seja positivo onde $\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)\mu(t)$ temos:

$$\frac{d\mu(t)}{\mu(t)} = p(t)dt \Rightarrow \ln \mu(t) = \int p(t)dt + k.$$

Escolhendo a constante k como zero temos $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$. Assim $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$ é o termo que multiplicado pela equação $y' + p(t)y = g(t)$, transforma a expressão do lado esquerdo na derivada de um produto. Quando integramos a expressão resultante encontramos a solução $y(t)$ da equação diferencial.

Ou seja:

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)g(t)$$

$$y = \frac{\int \mu(t)g(t)dt + c}{\mu(t)}$$

Exemplo 3.1 Vamos resolver a equação $y' - 4y = 7$.

Como vimos anteriormente, $\mu(t) = e^{\int p(y)dt}$, ou seja,

$$\mu(t) = e^{-4x}$$

multiplicando $\mu(t)$ em ambos os lados da equação temos:

$$\mu(t)y' - 4\mu(t)y = 7\mu(t)$$

$$e^{-4x}y' - 4ye^{-4x} = 7e^{-4x}$$

$$[e^{-4x}y]' = 7e^{-4x}$$

$$\int [e^{-4x}y]' dx = \int 7e^{-4x} dx$$

$$e^{-4x}y = -\frac{7}{4}e^{-4x} + c$$

$$y = \frac{-\frac{7}{4}e^{-4x} + c}{e^{-4x}}$$

$$y = -\frac{7}{4} + ce^{-4x}$$

Teorema 3.1 Sejam y_1, y_2, \dots, y_n n soluções linearmente independentes para a equação diferencial linear homogênea de n -ésima ordem em um intervalo I . Então, toda solução $Y(x)$ é uma combinação linear das n soluções independentes y_1, y_2, \dots, y_n , ou seja, podemos encontrar constantes C_1, C_2, \dots, C_n , tais que

$$Y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_ny_n(x).$$

3.1.2 EQUAÇÕES SEPARÁVEIS

Uma equação diferencial de primeira ordem é dita de variáveis separáveis quando pode ser escrita na forma $M(x)dx + N(y)dy = 0$. Neste caso separamos as variáveis, deixando na forma $M(x)dx = -N(y)dy$ integramos ambos os lados da equação e encontramos uma solução $y(x)$ da EDO.

Exemplo 3.2 Na equação $x^2 + (1 - y^2)\frac{dy}{dx} = 0$, temos que $M(x) = x^2$ e $N(x) = (1 - y^2)$.

3.1.3 EQUAÇÕES EXATAS

Buscando a resolução das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, existem vários métodos aplicáveis, dentre os quais já citamos o método do fator integrante (ou equações lineares) e o método de variáveis separáveis.

Proposição 3.1 *Seja $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ uma equação diferencial ordinária de primeira ordem. Dizemos que a equação $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ é exata se, e somente se, existir uma função $\psi(x, y)$ de forma que $\frac{\partial\psi}{\partial x} = M(x, y)$ e $\frac{\partial\psi}{\partial y} = N(x, y)$, ou seja, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.*

Exemplo 3.3 *A equação $2x + y^2 + 2xyy' = 0$ é exata pois $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y = \frac{\partial N}{\partial x}$.*

Para encontrar a solução de uma equação diferencial exata procuramos uma função $\psi(x, y)$ que satisfaça as condições $\frac{\partial\psi}{\partial x} = M(x, y)$ e $\frac{\partial\psi}{\partial y} = N(x, y)$.

3.2 Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem

As equações lineares de segunda ordem são muito frequentes nos problemas relacionados a física-matemática, onde sem as mesmas não é possível avançar muito nos estudos, por exemplo, na mecânica dos fluidos e movimentos ondulatórios.

De forma geral, podemos representar a equação diferencial ordinária de segunda ordem da seguinte maneira:

$$y'' = f(t, y, y')$$

No caso de f ser linear em y podemos reescrever a equação acima da seguinte forma, $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$, onde g , p e q são funções da variável independente t .

Considere a equação diferencial de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes da forma $ay'' + by' + cy = 0$, onde a , b e c são constantes dadas com $a \neq 0$.

Nestas equações normalmente procuramos uma função com a propriedade de que sua derivada segunda seja igual à própria função, o que nos leva a analisar uma função bem conhecida, a função exponencial $y(t) = e^{rt}$.

Suponhamos que $y = e^{rt}$ é solução desta equação. Então substituindo $y' = re^{rt}$ e $y'' = r^2e^{rt}$ teremos:

$$a(r^2e^{rt}) + b(re^{rt}) + c(e^{rt}) = 0$$

$$e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0$$

como $e^{rt} \neq 0$ temos que $ar^2 + br + c = 0$. Esta equação é chamada de equação característica da equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$.

Como a equação $ar^2 + br + c = 0$ é uma equação de segundo grau com coeficientes reais, ela tem duas raízes que podem ser reais e distintas, reais e iguais ou complexas

conjugadas.

3.2.1 RAÍZES REAIS E DISTINTAS

Considerando que $b^2 - 4ac > 0$, temos como solução da equação $ar^2 + br + c = 0$ duas raízes reais e distintas.

Sejam r_1 e r_2 estas raízes. Assim $y_1(t) = e^{r_1 t}$ e $y_2(t) = e^{r_2 t}$ que são soluções da equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$.

Proposição 3.2 (*Princípio da superposição*) Se $y_1(t) = e^{r_1 t}$ e $y_2(t) = e^{r_2 t}$ são soluções da equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$, então a combinação linear $y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ também é solução da equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$.

Demonstração: Substituindo $y_1(t) = e^{r_1 t}$ e $y_2(t) = e^{r_2 t}$ em $y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ temos:

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

$$y' = c_1 r_1 e^{r_1 t} + c_2 r_2 e^{r_2 t}$$

$$y'' = c_1 r_1^2 e^{r_1 t} + c_2 r_2^2 e^{r_2 t}$$

substituindo y , y' e y'' em $ay'' + by' + cy = 0$, temos:

$$\begin{aligned} a(c_1 r_1^2 e^{r_1 t} + c_2 r_2^2 e^{r_2 t}) + b(c_1 r_1 e^{r_1 t} + c_2 r_2 e^{r_2 t}) + c(c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}) &= \\ = c_1 (ar_1^2 + br_1 + c)e^{r_1 t} + c_2 (ar_2^2 + br_2 + c)e^{r_2 t} &= 0 \end{aligned}$$

como r_1 e r_2 são raízes temos que as quantidades entre parênteses são nulas, logo $y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$ é realmente solução da equação.

Teorema 3.2 (*Existência e Unicidade*) Considere o problema de valor inicial $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$ com $y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = y'_0$, onde p , q e g são contínuas em um intervalo aberto I . Então existe exatamente uma solução $y = \phi(t)$ desse problema e a solução existe em todo intervalo I .

Observação 3.2

1. O problema de valor inicial tem uma solução; em outras palavras, existe uma solução.
2. O problema de valor inicial tem uma única solução.
3. A solução ϕ está definida em todo intervalo I , onde os coeficientes são contínuos e onde é, pelo menos, duas vezes diferenciável.

Exemplo 3.4 Vamos encontrar a solução geral de $y'' + 5y' + 6y = 0$.

Suponha que $y = e^{rt}$, então, r tem que ser raiz da equação característica $r^2 + 5r + 6 = (r + 2)(r + 3) = 0$. Assim, os valores possíveis de r são $r_1 = -2$ e $r_2 = -3$. Portanto a solução geral da equação diferencial é $y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$.

3.2.2 RAÍZES COMPLEXAS CONJUGADAS

Considerando que $b^2 - 4ac < 0$ a equação $ar^2 + br + c = 0$ possui duas raízes complexas conjugadas. sejam $r_1 = \lambda + i\mu$ e $r_2 = \lambda - i\mu$ estas raízes, onde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Assim $y_1(t) = e^{(\lambda+i\mu)t}$ e $y_2(t) = e^{(\lambda-i\mu)t}$ são soluções da equação diferencial ordinária $ay'' + by' + cy = 0$.

Soluções Reais

Ao observar as soluções y_1 e y_2 percebemos que as mesmas têm valores complexos, porém, gostaríamos que estas soluções fossem reais.

Para isso consideremos:

$$\begin{aligned} y_1(t) + y_2(t) &= \\ e^{\lambda t}(\cos\mu t + i\operatorname{sen}\mu t) + e^{\lambda t}(\cos\mu t - i\operatorname{sen}\mu t) &= \\ 2e^{\lambda t}\cos\mu t & \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_1(t) - y_2(t) &= \\ e^{\lambda t}(\cos\mu t + i\operatorname{sen}\mu t) - e^{\lambda t}(\cos\mu t - i\operatorname{sen}\mu t) &= \\ 2ie^{\lambda t}\operatorname{sen}\mu t. & \end{aligned}$$

Assim, desprezando os fatores constantes 2 e $2i$, teremos como solução geral da equação diferencial ordinária a expressão

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} \cos\mu t + c_2 e^{\lambda t} \operatorname{sen}\mu t$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

Exemplo 3.5 Iremos encontrar a solução geral de $y'' + 9y = 0$.

A equação característica é $r^2 + 9 = 0$, com raízes $r = \pm 3i$; logo $\lambda = 0$ e $\mu = 3$. A solução geral é $y = c_1 \cos 3t + c_2 \operatorname{sen} 3t$; note que, se a parte real das raízes é zero, como neste exemplo, então a solução não tem fator exponencial.

3.2.3 RAÍZES REPETIDAS

Nesta situação temos que o discriminante ($b^2 - 4ac$) da equação característica é zero, logo temos que $r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}$, ou seja, ambas as raízes geram a mesma solução $y_1(t) = e^{\frac{-b}{2a}t}$.

Precisamos encontrar uma segunda solução que seja linearmente independente com $y_1(t) = e^{\frac{-b}{2a}t}$, para a equação $y'' + by' + cy = 0$

Para isso vamos estudar o determinante Wronskiano.

Independência linear e Wronskiano

Definição 3.3 *Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ funções, o determinante*

$$A = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix}$$

é chamado determinante Wronskiano, ou simplesmente wronskiano das funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$, usamos a notação $w(y_1, y_2)(t)$.

Teorema 3.4 *Se f e g são funções diferenciáveis em um intervalo aberto I e $W(f, g)(t_0) \neq 0$ em algum ponto t_0 em I , então f e g são linearmente independentes em I . Além disso, se f e g são linearmente dependentes em I , então $W(f, g)(t) = 0$ para todo t em I .*

Demonstração: *Considere uma combinação linear $k_1f(t) + k_2g(t)$ e suponha que esta expressão é igual a zero em todo intervalo. Calculando sua expressão e sua derivada em t_0 temos*

$$k_1f(t_0) + k_2g(t_0) = 0$$

$$k_1f'(t_0) + k_2g'(t_0) = 0.$$

O determinante da matriz dos coeficientes do sistema é exatamente o $W(f, g)(t_0)$, que é diferente de zero por hipótese, ou seja, a única solução para o sistema acima é $k_1 = 0$ e $k_2 = 0$, logo f e g são linearmente independentes.

Na segunda parte do teorema, usando o fato de f e g serem linearmente dependentes e supondo que a conclusão é falsa, isto é, supondo que o $W(f, g)(t) \neq 0$ em I , ou seja, existe um ponto t_0 tal que $W(f, g)(t_0) \neq 0$, o que pela primeira parte do teorema, implica que f e g são linearmente independentes, uma contradição da nossa hipótese, sendo assim, $W(f, g)(t) = 0$ para todo t em I .

Proposição 3.3 *As funções $y_1(t) = e^{\frac{-bt}{2a}}$ e $y_2(t) = te^{\frac{-bt}{2a}}$ são linearmente independentes.*

Demonstração: *Cosidere*

$$W(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} e^{\frac{-bt}{2a}} & te^{\frac{-bt}{2a}} \\ \frac{-b}{2a}e^{\frac{-bt}{2a}} & e^{\frac{-bt}{2a}} - \frac{b}{2a}te^{\frac{-bt}{2a}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\frac{-bt}{2a}} e^{\frac{-bt}{2a}} - \frac{b}{2a} t e^{\frac{-bt}{2a}} e^{\frac{-bt}{2a}} + \frac{b}{2a} e^{\frac{-bt}{2a}} t e^{\frac{-bt}{2a}} \\
&= e^{\frac{-2bt}{2a}} \neq 0
\end{aligned}$$

A expressão acima é não nula para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim provamos que $y_1(t) = e^{\frac{-bt}{2a}}$ e $y_2(t) = t e^{\frac{-bt}{2a}}$ são LI.

Portanto a solução geral da equação diferencial ordinária $ay'' + by' + cy = 0$ para o caso de raízes repetidas será:

$$y(t) = c_1 e^{\frac{-b}{2a}t} + c_2 t e^{\frac{-b}{2a}t}$$

Exemplo 3.6 Encontraremos a solução do problema de valor inicial $y'' - y' + \frac{1}{4} = 0$, $y(0) = 2$ e $y'(0) = \frac{1}{3}$.

A equação característica é $r^2 - r + \frac{1}{4} = 0$ de modo que as raízes são $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$. Logo, a solução geral da equação diferencial é:

$$y = c_1 e^{\frac{t}{2}} + c_2 t e^{\frac{t}{2}}$$

A primeira condição inicial implica que $y(0) = c_1 = 2$. Para satisfazer a segunda condição, primeiro derivamos a equação $y = c_1 e^{\frac{t}{2}} + c_2 t e^{\frac{t}{2}}$ e depois fazemos $t = 0$. Isso implica $y'(0) = \frac{1}{2}c_1 + c_2 = \frac{1}{3}$, de modo que $c_2 = -\frac{2}{3}$.

Portanto, a solução do problema de valor inicial é:

$$y = 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}}$$

4 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Em muitos problemas físicos encontramos equações diferenciais com duas ou mais variáveis independentes e tais problemas podem ser solucionados utilizando os métodos e modelos matemáticos ligados as Equações Diferenciais Parciais (EDP's).

Como já vimos no capítulo 1, uma equação diferencial parcial é uma equação que envolve duas ou mais variáveis independentes e derivadas parciais de uma função $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Tal equação pode ser representada de forma geral da seguinte maneira:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}) = 0$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, Ω é um domínio em \mathbb{R}^n , F é uma função dada e $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é a função que queremos determinar.

É importante salientar que as EDP's podem ser classificadas em relação a sua ordem, homogeneidade e linearidade. Frisamos que não abordaremos neste trabalho as equações não-lineares, uma vez que, os problemas relativos a distribuição de temperatura, vibrações e potenciais são descritos por Equações Diferenciais Parciais Lineares de Segunda Ordem em duas variáveis independentes, sendo que as mesmas possuem como forma geral

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + E(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + F(x, y)u = G(x, y).$$

Dessarte, chamaremos a EDP de homogênea, quando $G(x, y)$ for igual a 0, caso contrário, a classificaremos como não-homogênea. Além disso, classificamos as EDP's conforme sua ordem, que é dada pela derivada parcial de maior grau.

Exemplo 4.1 A equação $\alpha^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$ é uma EDP homogênea de segunda ordem.

Exemplo 4.2 A equação $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ é homogênea de primeira ordem.

Antes de iniciarmos os estudos das equações diferenciais parciais, equação da onda e do calor, faz-se necessário o estudo das séries de Fourier.

4.1 Séries de Fourier

Durante o estudo das Equações Diferenciais Parciais, será perceptível que os conhecimentos do Cálculo Diferencial e Integral e de Equações Diferenciais são insuficientes para resolver alguns problemas que as próprias EDP's sugerem. Nesse sentido, faz-se

necessário abordarmos neste trabalho as séries de Fourier, objetivando expressar funções mais complexas em termos de funções elementares mais familiares (GERHARD, 2007).

Uma soma de senos e cossenos da forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \quad (4.1)$$

define uma função f cujos valores em cada ponto é a soma da série para aquele valor de x . Assim, definimos a equação (4.1) como a série de Fourier de f . Nesse sentido, espera-se que os coeficientes a_n e b_n estejam diretamente ligados a f , e por este motivo, vamos supor que a série (4.1) convirja uniformemente no intervalo $[-L, L]$, para que possamos utilizar a proposição 4.1 e posteriormente obtermos os chamados coeficientes de Fourier.

Proposição 4.1 *Suponhamos que as funções u_n sejam contínuas e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ convirja uniformemente. Então a soma da série $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ é também uma função contínua.*

Definição 4.1 *Duas funções f_1 e f_2 são ditas ortogonais em um intervalo $[a, b]$ se*

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx = 0.$$

Definição 4.2 *Um conjunto de funções $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ é dito um conjunto ortogonal se $(f_i, f_j) = 0, i \neq j$, ou seja, cada par de funções diferentes pertencentes ao conjunto é ortogonal.*

Exemplo 4.3 *As funções $\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ e $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$, $m = 1, 2, \dots$ formam um conjunto ortogonal de funções no intervalo $[-L, L]$. De fato, tal afirmação pode ser comprovada, pois, as três relações de ortogonalidade (4.2), (4.3) e (4.4) ditadas a seguir são satisfeitas:*

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ L & \text{se } m = n \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0, \text{ para qualquer } m \text{ e } n \quad (4.3)$$

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ L & \text{se } m = n \end{cases} \quad (4.4)$$

Demonstração: *Os resultados apresentados anteriormente podem ser obtidos com a utilização de identidades trigonométricas que expressam produtos de senos, ou de cossenos, ou de seno por cosseno, como soma de senos ou de cossenos. Por exemplo, na equação*

(4.2) temos:

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

entretanto, utilizando

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2} [\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

obtemos

$$\frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos\left[\frac{(m-n)\pi x}{L}\right] + \cos\left[\frac{(m+n)\pi x}{L}\right] dx$$

onde, ao integrar, resulta em

$$\frac{L}{2\pi} \left[\frac{\text{sen}\left[\frac{(m-n)\pi x}{L}\right]}{m-n} + \frac{\text{sen}\left[\frac{(m+n)\pi x}{L}\right]}{m+n} \right] \Bigg|_{-L}^L = L.$$

É perceptível que o resultado desta integral é zero antes mesmo da substituição dos extremos de integração. Porém, $m+n$ deve ser diferentes de zero, assim como $m-n$, e, isso acontece parcialmente, pois, m e n são positivos, logo $m+n \neq 0$. Mas quando $m=n$, a integral pode ser calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ = \int_{-L}^L \cos^2\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \end{aligned}$$

utilizando a identidade trigonométrica

$$\cos^2(A) = \frac{1}{2} [1 + \cos(2A)]$$

temos,

$$\frac{1}{2} \int_{-L}^L 1 + \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) dx$$

ou ainda

$$\frac{1}{2} \left[x + \frac{L}{2m\pi} \text{sen}\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) \right] \Bigg|_{-L}^L = L$$

ou seja,

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ L & \text{se } m = n \end{cases}$$

De maneira análoga os resultados (4.3) e (4.4) podem ser facilmente obtidos.

Voltando a dedução dos coeficientes de Fourier, podemos afirmar com base na proposição 4.1, que a igualdade (4.1) é contínua e, portanto, podemos integrá-la em ambos os membros de $-L$ a L (isso porque f deve ser periódica de período $2L$), obtendo

$$\int_{-L}^L f(x)dx = \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] dx$$

utilizando algumas propriedades de integrais definidas chegamos a

$$\int_{-L}^L f(x)dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] = La_0$$

ou ainda

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)dx \quad (4.5)$$

Para obter os demais coeficientes, multiplicamos (4.1) por $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$, onde $m \geq 1$ é fixo e posteriormente integramos,

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + b_n \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

sendo que, pelas relações de ortogonalidade vistas no exemplo 4.3, a igualdade (4.6) pode ser reduzida a

$$\int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = a_n L$$

ou ainda

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (4.7)$$

De maneira análoga, podemos obter

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (4.8)$$

apenas multiplicando (4.1) por $\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ e integrando.

Portanto, a série trigonométrica (4.1) definida pelos coeficientes (4.5), (4.7) e (4.8) é chamada de série de Fourier da função f , sendo que, como comentado anteriormente, (4.5), (4.7) e (4.8) denominamos coeficientes de Fourier da função f .

É interessante também, apresentar duas classes de funções onde os coeficientes de Fourier podem ser simplificados. Esses grupos de funções são compostos pelas funções pares e ímpares.

Definição 4.3 *Séries de Fourier de Cossenos e do Senos.*

i. A série de Fourier de uma função par no intervalo $(-L, L)$ é a série de cossenos

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (4.9)$$

onde

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (4.10)$$

ii. A série de Fourier de uma função ímpar no intervalo $(-L, L)$ é a série de senos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (4.11)$$

sendo que

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (4.12)$$

Exemplo 4.4 *Vamos determinar a série de Fourier para a função f definida por*

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ x, & \text{se } 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

sendo que $f(x+4) = f(x)$.

É fácil perceber que esta função é periódica de período 4, logo, $L = 2$. Além disso, sabemos que a série terá a forma (4.1), o que nos faz necessário calcular os coeficientes de Fourier da mesma. Então, de (4.5), (4.7) e (4.8) obtemos respectivamente,

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (-x) dx + \frac{1}{2} \int_0^2 x dx = 2$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (-x) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx + \frac{1}{2} \int_0^2 x \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \frac{4}{n^2 \pi^2} [\cos(n\pi) - 1], n = 1, 2, 3, \dots$$

mas,

$$\frac{4}{n^2 \pi^2} [\cos(n\pi) - 1], n = 1, 2, 3, \dots = \begin{cases} -\frac{8}{(n\pi)^2}, & \text{para } n \text{ ímpar,} \\ 0, & \text{para } n \text{ par.} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (-x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx + \frac{1}{2} \int_0^2 x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = 0.$$

Portanto, a série de Fourier da função dada, é

$$f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{n^2}$$

ou ainda,

$$f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2}\right)}{(2m-1)^2}.$$

A figura 4.1 representa esta solução para dois valores de m .

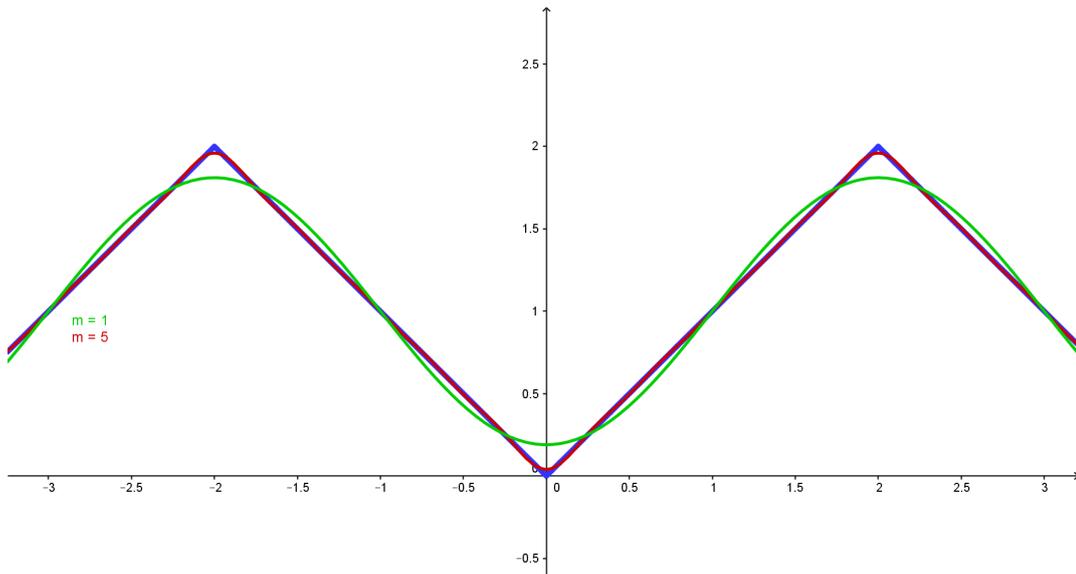


Figura 4.1: Ilustração da solução do exemplo 4.4 para $m = 1$ e $m = 5$.

Fonte: Dos autores, 2016.

4.2 Resolução das Equações Diferenciais Parciais

Nesta seção aplicaremos nossos estudos aos processos utilizados para resolver EDP's, com o objetivo de obter os últimos pré-requisitos que são necessários para tratarmos das principais Equações Diferenciais Parciais.

A solução de uma Equação Diferencial Parcial pode ser obtida através de vários métodos, um deles é por meio da separação de variáveis e séries de Fourier. No caso de uma EDP cuja variável dependente é u , o método de separação de variáveis baseia-se na possibilidade de a variável dependente u ser expressa sob a forma separável

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \quad (4.13)$$

em que X e Y são funções de x e y respectivamente.

Exemplo 4.5 Utilizaremos o método de separação de variáveis para encontrar soluções

da equação $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u$.

Partindo de (4.13), podemos reescrever a equação $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u$ como sendo

$$X'Y + XY' = XY,$$

pois,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'(x)Y(y)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = X(x)Y'(y).$$

Fazendo a separação de variáveis, chegamos a

$$\frac{X'}{X} = \frac{Y - Y'}{Y}.$$

De imediato, verificamos que o membro esquerdo da equação anterior independe de y , assim como o membro direito independe de x . Nesse segmento, cada membro da equação deve ser uma constante, e então, é pertinente escrevermos essa constante real de separação como λ^2 ou $-\lambda^2$ (ZILL; CULLEN, 2001), visto que recairemos em três casos:

- CASO 1: λ^2

Nesta ocasião, temos,

$$\frac{X'}{X} = \frac{Y - Y'}{Y} = \lambda^2,$$

o que implica em $X' = \lambda^2 X$ e $Y' = Y(1 - \lambda^2)$ que são duas EDO's de primeira ordem. Resolvendo a primeira por separação de variáveis,

$$\frac{dX}{X} = \lambda^2 X$$

$$\int \frac{dX}{X} = \int \lambda^2 dx$$

$$\ln|X| = \lambda^2 x + c_1$$

buscando uma solução explícita,

$$X(x) = e^{\lambda^2 x} c_2$$

onde, c_1 e c_2 são constantes.

Analogamente, a EDO $Y' = Y(1 - \lambda^2)$ pode ser reescrita e separada da seguinte forma

$$\frac{dY}{Y} = Y(1 - \lambda^2)$$

$$\frac{dY}{Y} = (1 - \lambda^2)dy$$

integrando e deixando Y em função de y ,

$$\int \frac{dY}{Y} = \int (1 - \lambda^2)dy$$

$$\ln|Y| = (1 - \lambda^2)y + c_3$$

ou ainda,

$$Y(y) = e^{(1-\lambda^2)y}c_4$$

com c_3 e c_4 constantes. Como, $u(x, y) = X(x)Y(x)$, então,

$$u_1(x, y) = (e^{\lambda^2 x}c_2)(e^{(1-\lambda^2)y}c_4) = e^{\lambda^2 x + (1-\lambda^2)y}c_2c_4 = e^{\lambda^2(x-y)+y}c_5$$

sendo que $c_5 = c_2c_4$.

- CASO 2: $-\lambda^2$

Nesta situação, dispomos de,

$$\frac{X'}{X} = \frac{Y - Y'}{Y} = -\lambda^2,$$

o que remete a $X' = -\lambda^2 X$ e $Y' = Y(1 + \lambda^2)$. Ao resolvermos estas EDO's, obtemos respectivamente as seguintes soluções:

$$X(x) = e^{-\lambda^2 x}c_6 \tag{4.14}$$

e

$$Y(y) = e^{(1+\lambda^2)y}c_7, \tag{4.15}$$

com c_6 e c_7 constantes. Partindo das igualdades (4.13), (4.14) e (4.15) podemos concluir que

$$u_2(x, y) = (e^{-\lambda^2 x}c_6)(e^{(1+\lambda^2)y}c_7) = e^{\lambda^2(y-x)+y}c_8$$

visto que, $c_8 = c_6c_7$.

- CASO 3: $\lambda^2 = 0$

Neste caso, temos que,

$$\frac{X'}{X} = \frac{Y - Y'}{Y} = 0,$$

sugerindo então $X' = 0$ e $Y' = Y$, com

$$X(x) = c_9 \tag{4.16}$$

e

$$Y(y) = e^y c_{10}, \quad (4.17)$$

suas respectivas soluções. Entretanto, usando (4.13), (4.16) e (4.17), chegamos que

$$u_3(x, y) = (c_9)(e^y c_{10}) = e^y c_{11}$$

é a solução em forma de produto da EDP, posto que c_9 , c_{10} e c_{11} são constantes.

Assim como para as EDO's, o princípio a superposição também é válido para as Equações Diferenciais Parciais, então

$$u(x, y) = Ae^{\lambda^2(x-y)+y} + Be^{\lambda^2(y-x)+y} + Ce^y$$

(com A , B e C constantes reais) é uma solução da equação $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u$.

As ferramentas estudadas até aqui nos dão os subsídios necessários para que possamos explorar algumas EDP's consideradas importantes. Nessa perspectiva, a próxima seção abordará o problema do calor numa barra.

4.3 Equação do Calor

Consideremos uma barra de comprimento L fabricada com um material cuja condução de calor é uniforme. Visualizando a figura 4.2 suporemos que a barra seja isolada termicamente em sua superfície lateral e, portanto, não sofre nenhuma influência de calor do ambiente em que a mesma se encontra. Além disso, é importante que o fluxo de calor nesta barra propague-se apenas horizontalmente, ou seja, apenas na direção de x .

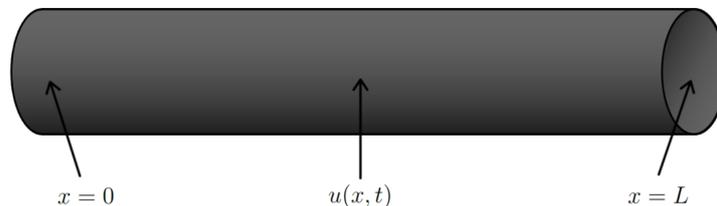


Figura 4.2: Barra condutora de calor

Fonte: Dos autores, 2016.

Empregadas tais condições, a temperatura u no ponto x da barra e no instante t é dada por ¹ :

¹Os resultados (4.18) (4.19) (4.20) não serão deduzidos neste trabalho, mas é importante frisar que tal teoria é baseada na lei de condução do calor de Fourier (BOYCE; DIPRIMA, 2012).

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (4.18)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0 \quad (4.19)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L \quad (4.20)$$

ou seja, as extremidades da barra são mantidas a uma temperatura fixa e a distribuição inicial de temperatura é dada por $f(x)$. A constante k é positiva e conhecida como difusividade térmica. Alguns exemplos deste valor são dados na tabela a seguir.

Tabela 4.1: Valores de k para diferentes substâncias

Material	$k(cm^2/s)$
Prata	1,71
Cobre	1,14
Alumínio	0,86
Ferro fundido	0,12
Granito	0,011
Argila	0,0038
Água	0,00144

Fonte: (FIGUEIREDO, 2005)

Para obtermos soluções desta que é conhecida como Equação do Calor, podemos utilizar o método de separação de variáveis e ainda, objetivando obter soluções não triviais para esta equação, é vantajoso fazer uso da constante de separação $-\lambda^2 < 0$. Logo, de (4.18) temos:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = -\lambda^2$$

que implica nas seguintes EDO's

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad (4.21)$$

e

$$T' + k\lambda^2 T = 0. \quad (4.22)$$

Por se tratar de uma EDO homogênea com coeficientes constantes, ao analisar a equação característica de (4.21) teremos como raízes complexas conjugadas $\pm \lambda i$, daí provirá que

$$X(x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sen(\lambda x), \quad (4.23)$$

já, de (4.22) temos,

$$\frac{dT}{T} = -k\lambda^2 dt$$

que ao integrar e evidenciar T em função de t resultará em

$$T(t) = c_3 e^{-k\lambda^2 t}.$$

É fundamental lembrar que ao iniciar o processo resolutivo da Equação do Calor pelo método de separação de variáveis, expressamos a variável dependente u como o produto $u(x, t) = X(x)T(t)$. Isso em conjunto com a condições (4.19) nos retorna

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0$$

$$u(L, t) = X(L)T(t) = 0,$$

com efeito, precisamos que $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$. Utilizando a condição $X(0) = 0$ em (4.23), teremos

$$X(0) = c_1 \cos(\lambda 0) + c_2 \operatorname{sen}(\lambda 0) = 0$$

o que acarreta de imediato em $c_1 = 0$.

Agora, operando $X(L) = c_2 \operatorname{sen}(\lambda L) = 0$ percebemos que um possível valor de c_2 seria 0, entretanto, isso faria com que $X(x)$ também seja 0, e mais, $u(x, t) = 0$. Portanto, devemos procurar valores para esta constante de modo que não seja nula, ou ainda, procuramos um arco λL onde o seno seja igual a zero. Isso tudo acarreta que $\lambda L = n\pi$ ou ainda

$$\lambda = \frac{n\pi}{L}, \text{ com } n = 1, 2, 3, \dots,$$

Logo, com as exigências (4.19) (conhecidas como condições de contorno) concluímos que

$$X(x) = c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

e

$$T(t) = c_3 e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

mas como $u(x, t) = X(x)T(t)$,

$$u_n(x, t) = c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) c_3 e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} = A_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (4.24)$$

com $A_n = c_2 c_3$ constante.

É perceptível que existe uma infinidade de funções da forma (4.24) que satisfazem as condições empregadas até o momento, então, pelo princípio da superposição, podemos escrever estas como uma combinação linear, que de tal modo, formará uma série

infinita descrita a seguir

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right). \quad (4.25)$$

Resta agora, apenas que a condição inicial (4.20) seja satisfeita por (4.25) para que nosso problema de condução de calor seja completamente solucionado, então, temos que ter

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$$

que é a série de Fourier de senos da função $f(x)$, logo, como consequência da igualdade (4.12) presente na definição 4.3, os coeficientes A_n serão dados por:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx.$$

Portanto, a solução do problema de condução de calor dado pelas igualdades (4.18), (4.19) e (4.20) usando série de Fourier é dado pela equação a seguir,

$$u(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^L f(x) \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right).$$

Exemplo 4.6 *Vamos considerar uma barra de 40 cm de comprimento, isolada nos lados, com coeficiente $k = 1$, com as extremidades mantidas a temperatura de 0° C e tal que a temperatura inicial é dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 20 \\ 40 - x, & \text{se } 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

ou seja, temos que resolver o seguinte problema de valor inicial e de fronteira:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (4.26)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < 40 \quad (4.27)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(40, t) = 0, \quad t > 0 \quad (4.28)$$

onde, com base nos conceitos apresentados anteriormente, obtemos a solução,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{40}\right)^2 t} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{40} \right). \quad (4.29)$$

Agora, utilizando a condição (4.27) em (4.29), chegaremos que o coeficiente A_n é dado por

$$A_n = \frac{1}{20} \int_0^{40} f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{40} \right) dx.$$

que, de acordo com os coeficientes das séries de Fourier de Funções Elementares², pode ser escrito como

$$A_n = \frac{160 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right)}{n^2 \pi^2}, n = 1, 2, 3, \dots$$

portanto, a solução do problema é dada por

$$u(x, t) = \frac{160}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right)}{n^2} e^{-\left(\frac{n\pi}{40}\right)^2 t} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{40} \right)$$

e pode ser melhor interpretada na figura 4.3.

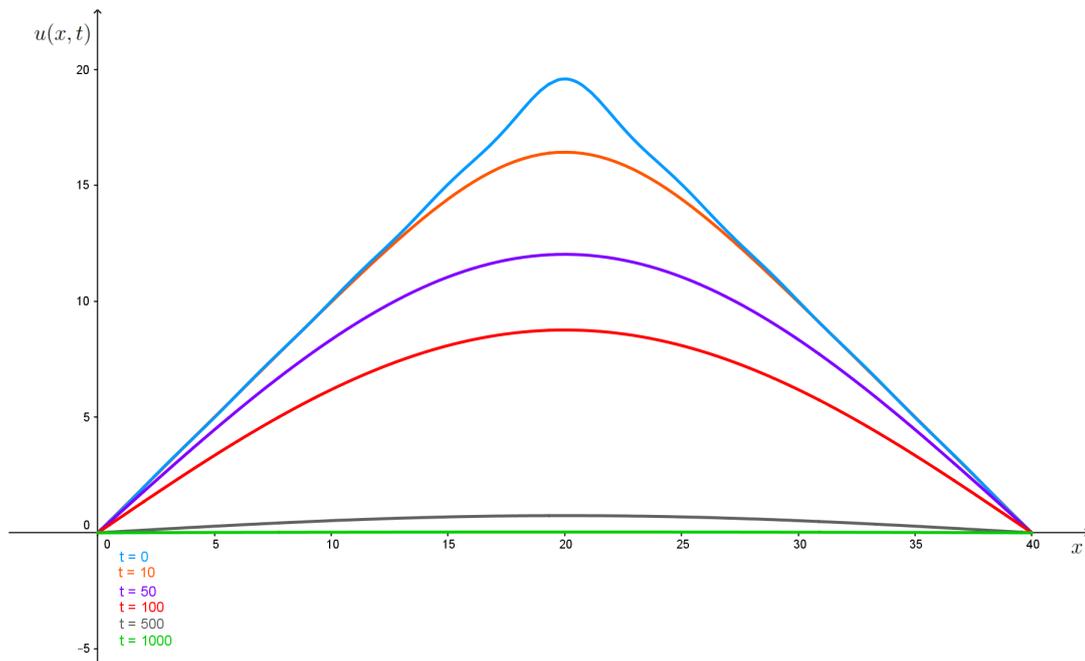


Figura 4.3: Ilustração da solução do exemplo 4.6 tomando os 20 primeiros termos da série.

Fonte: Dos autores, 2016.

Percebe-se com base na ilustração, que a temperatura nas extremidades da barra sempre será igual a zero, além de quanto mais o tempo passar, mais próximo de zero fica a temperatura nos demais locais da barra, ou seja, quando $t \rightarrow \infty$, $u \rightarrow 0$.

²Esta tabela pode ser encontrada na página 201 do livro “Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução” (SANTOS, 2011).

4.4 Equação da Onda

Nesta seção, adentraremos no problema das pequenas vibrações transversais de uma corda perfeitamente flexível. Este fenômeno tem lugar num plano (x, u) e admite que a corda vibre em torno de sua posição de repouso ao longo do eixo x . Assume-se ainda que: a corda é perfeitamente flexível; a corda é homogênea, ou seja, sua massa por unidade de comprimento é constante; nenhuma força externa atua sobre a corda.

Assim sendo, o deslocamento vertical da corda vibrante de comprimento L é

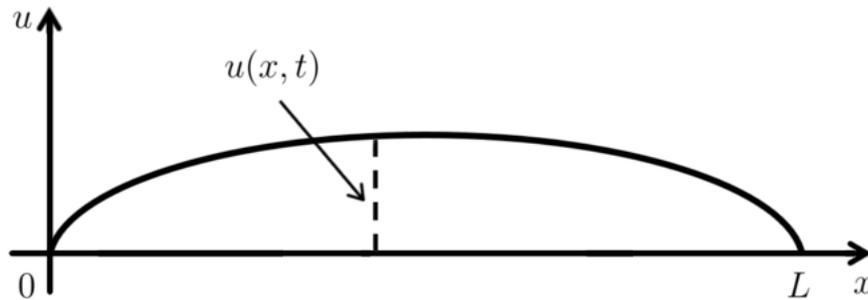


Figura 4.4: Corda vibrante
Fonte: Dos autores, 2016.

determinado por

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (4.30)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0 \quad (4.31)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = g(x), \quad 0 < x < L \quad (4.32)$$

dessas condições, percebe-se que as extremidades dessa corda permanecem sempre fixas e a posição inicial e sua velocidade são conhecidas.

Para obtenção da solução desta equação que é conhecida como Equação da Onda, utilizaremos o método de separação de variáveis e assim como para Equação do Calor, faremos proveito da constante de separação $-\lambda^2 < 0$ buscando soluções não triviais. Logo, de (4.30) temos:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda^2$$

que nos retorna a duas EDO's,

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

e

$$T'' + \lambda^2 a^2 T = 0$$

sendo que,

$$X(x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \operatorname{sen}(\lambda x)$$

$$T(t) = c_3 \cos(\lambda at) + c_4 \operatorname{sen}(\lambda at)$$

são, respectivamente, as soluções das mesmas.

Partindo da igualdade (4.31), podemos concluir que $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$, bem como ocorre na Equação do Calor, $c_1 = 0$ e $c_2 \operatorname{sen}(\lambda L) = 0$. Para que $c_2 \operatorname{sen}(\lambda L) = 0$, precisamos necessariamente que $\lambda = \frac{n\pi}{L}$, com $n = 1, 2, 3, \dots$, para então obtermos,

$$X(x) = c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ com } n = 1, 2, 3, \dots,$$

mas, levando em consideração que $u(x, t) = X(x)T(t)$ temos

$$u_n(x, t) = c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[c_3 \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + c_4 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \right]$$

ou ainda

$$u_n = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \right]$$

com $A_n = c_2 c_3$ e $B_n = c_2 c_4$. Considerando que para cada n vamos obter um coeficiente que irá satisfazer as condições de contorno (4.31), podemos escrever a combinação linear destas soluções como o somatório:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \right]. \quad (4.33)$$

Agora, de (4.33) e (4.32), temos

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

sendo que, como consequência do item (4.12) da definição 4.3, A_n será dado por

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (4.34)$$

Seguindo a mesma ideia, usaremos da condição $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g(x)$ para definirmos os coeficientes b_n , ou seja, diferenciando (4.33) em relação a t e fazendo $t = 0$ temos:

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[-A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \frac{n\pi a}{L} + B_n \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \frac{n\pi a}{L} \right] \Big|_{t=0}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{L} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$$

assim como feito anteriormente, utilizaremos o item (4.12) da definição 4.3, porém, desta vez fazendo $b_n = B_n \frac{n\pi a}{L}$ o que implicará em

$$B_n \frac{n\pi a}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

o que resultará em

$$B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx. \quad (4.35)$$

Logo, a solução do nosso problema que satisfaz todas condições de contorno empregadas, é dada por (4.33) com os coeficientes (4.34) e (4.35), ou seja,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \left[\cos \left(\frac{n\pi at}{L} \right) \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx + \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi at}{L} \right) \frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \right].$$

Exemplo 4.7 *Vamos considerar uma corda de 40 cm de comprimento, presa nas extremidades, com coeficiente $a = 2$ solta do repouso de forma que o deslocamento inicial seja dado por*

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x < 20 \\ 40 - x, & \text{se } 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

ou seja, temos que resolver o seguinte problema de valor inicial e de fronteira:

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4.36)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < 40 \quad (4.37)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(40, t) = 0. \quad (4.38)$$

Com base no desenvolvimento da solução da equação da onda anteriormente apresentado, é fácil verificar que a solução deste exemplo é dada pela série

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{40} \right) \cos \left(\frac{n\pi t}{20} \right). \quad (4.39)$$

Agora, utilizando a condição (4.37) em (4.39), chegaremos que o coeficiente

A_n é dado por

$$A_n = \frac{1}{20} \int_0^{40} f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{40} \right) dx$$

onde, utilizando os coeficientes das séries de Fourier de funções elementares, obtemos

$$A_n = \frac{160 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right)}{n^2 \pi^2}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.40)$$

Substituindo (4.40) em (4.39), obtemos a solução do nosso problema:

$$u(x, t) = \frac{160}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right)}{n^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{40} \right) \cos \left(\frac{n\pi t}{20} \right).$$

A figura 4.5 apresenta esta solução, onde é perceptível que ao ser solta da sua posição inicial, a corda inicia um movimento oscilatório e periódico, onde, no instante $t = 10$, $u = 0$ para qualquer x .

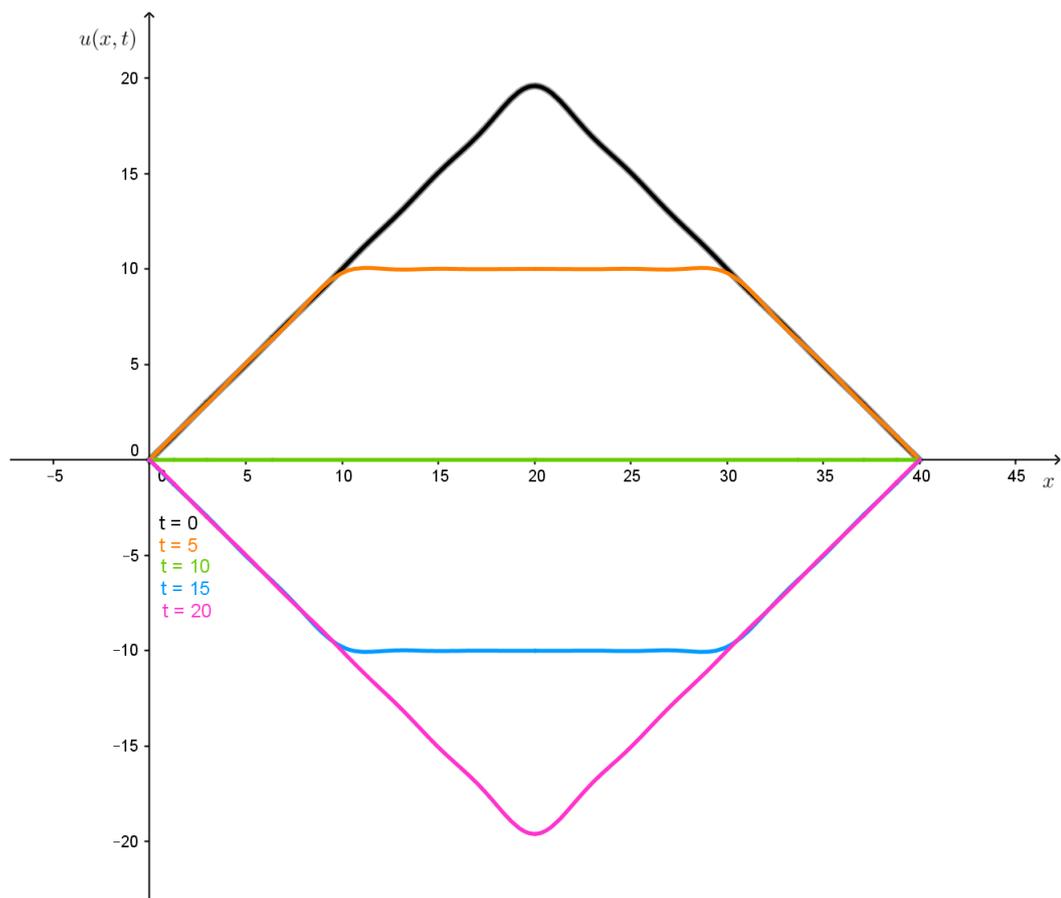


Figura 4.5: Ilustração da solução do exemplo 4.7 tomando os 20 primeiros termos da série.
Fonte: Dos autores, 2016.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por meio deste estudo, percebemos que realmente as equações diferenciais possuem grande aplicação em problemas relacionados a engenharia e o quão interessantes podem ser os problemas aplicados que são resolvidos com relações matemáticas. Isso, sem contar que algumas vezes precisa-se de conhecimento de Física, o que para os acadêmicos de licenciatura em Matemática, se torna um desafio, pois estes carecem de conhecimentos prévios o que tornaria esse estudo mais acessível.

Embora o nosso estudo não tenha sido muito aprofundado, pois estudamos apenas algumas equações e suas resoluções na forma homogênea, percebemos que grande parte das equações diferenciais não podem ser resolvidas com esses métodos mais elementares. Apresentamos aqui, apenas aplicações de condução de calor e vibrações de cordas, entretanto, os fenômenos que podem ser descritos por EDP's são inúmeros, como por exemplo: restauração de imagens, evolução de manchas de óleo, secagem de grãos, dentre outros.

Vale frisar que raramente encontraremos fenômenos que serão descritos por uma EDP homogênea, isso significa que as equações estudadas aqui são apenas protótipos e que fica como um desafio para trabalhos posteriores o estudo desse tipo de equações, porém, mais gerais.

Mesmo assim, conseguimos alcançar os nossos objetivos, analisando as equações diferenciais e suas características, compreendendo os métodos de resolução, dentre eles o de variáveis separáveis.

Como complementação deste trabalho, um estudo futuro poderia ser: rever os métodos aqui estudados para a resolução analítica, pelo método de variáveis separáveis, considerando condições de contorno de primeira espécie ou Dirichlet, segunda espécie ou Neumann e terceira espécie ou de Robin e ainda rever os métodos aqui estudados em outras coordenadas, como por exemplo as coordenadas cilíndricas.

REFERÊNCIAS

BOYCE; DIPRIMA. *Equações diferenciais elementares: e problemas de valores de contorno*. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

BOYER; MERZBACH. *História da matemática. Trad. Helena Castro*. São Paulo: Blucher, 2012.

CONTADOR. *Matemática, uma breve história*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2012.

FIGUEIREDO. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

GERHARD. *Solução analítica para problemas de difusão de calor bidimensionais e tridimensionais*. Chapecó: [s.n.], 2007.

SANTOS, R. J. *Equações diferenciais parciais: Uma introdução*. 2011.

VARGAS, M. História da matematização da natureza. *Estudos Avançados*, SciELO Brasil, v. 10, n. 28, p. 249–276, 1996.

ZILL; CULLEN. *Equações diferenciais. vol. 2. Trad. Alfredo Alves de Farias*. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.