

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DE ENGENHARIA MECÂNICA
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

VITOR BORTOLOTO

**ESTUDO DE ABSORVEDORES DINÂMICOS DO TIPO MASSA-MOLA
EM SISTEMAS MECÂNICOS**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

PATO BRANCO
2017

VITOR BORTOLOTO

**ESTUDO DE ABSORVEDORES DINÂMICOS DO TIPO MASSA-MOLA EM
SISTEMAS MECÂNICOS**

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação, apresentado à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso II, do Curso de Engenharia Mecânica da Coordenação de Engenharia Mecânica – DAMEC – da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, Campus Pato Branco, como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Rogério Novak

**PATO BRANCO
2017**

FOLHA DE APROVAÇÃO

ESTUDO DE ABSORVEDORES DINÂMICOS DO TIPO MASSA-MOLA EM SISTEMAS MECÂNICOS

VITOR BORTOLOTO

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado no dia 13/11/2017 como requisito parcial para a obtenção do Título de Engenheiro Mecânico, do curso de Engenharia Mecânica do Departamento Acadêmico de Mecânica (DAMEC) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Câmpus Pato Branco (UTFPR-PB). O candidato foi arguido pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora julgou o trabalho **APROVADO**.

Prof. Dr. Robson Gonçalves Trentin
(UTFPR)

Prof. Dr. Fábio R. Mandello Rodrigues
(UTFPR)

Profa. Dr. Paulo Rogério Novak
(UTFPR)
Orientador

Prof. Dr. Bruno Bellini Medeiros
Responsável pelo TCC do Curso de Eng. Mecânica

Aos meus amados pais, irmão, familiares e amigos...

AGRADECIMENTOS

Nessa jornada que trilhei até agora na minha vida, cada pessoa que conheci foi importante e contribuiu de alguma maneira para o meu aprendizado e formação de caráter, portanto gostaria de agradecer a todos que conheço.

Também gostaria de agradecer especialmente algumas pessoas. Primeiramente aos meus pais e a Vera, que sempre me apoiaram de todos os modos e permitiram eu chegar onde estou agora.

Aos meus amigos e companheiros de engenharia Philipi, Vilmar, Mateus, Fernando e os Lucas que me ajudaram a enfrentar as dificuldades do curso, não me deixaram desistir e fizeram meus dias mais divertidos.

A Eva, que sempre me incentivou, me apoiou, me aguentou até nos dias ruins e que faz meus dias melhores.

Aos meus professores, pelo conhecimento que me foi passado e pela orientação durante a minha graduação, em especial ao Prof. Paulo Rogério Novak, orientador deste estudo

A UTFPR e a todos ligados a ela, que movem essa organização fazendo ela um pouco melhor e maior a cada dia e permitem a formação de profissionais e pessoas, abrindo novos caminhos e realizando sonhos.

E para concluir agradeço a Deus, por me guiar, proteger e iluminar durante o caminho que venho percorrendo.

“O que sabemos é uma gota; o que ignoramos é um oceano. Mas o que seria o oceano senão infinitas gotas?”

(Isaac Newton)

RESUMO

Bortoloto, Vitor (2017). *Estudo de absorvedores dinâmicos do tipo massa-mola em sistemas mecânicos*, Pato Branco, 68 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

A utilização de absorvedores dinâmicos de vibrações é um método muito eficaz e barato de controle de vibrações. Apesar dos absorvedores dinâmicos passivos apresentarem menos vantagens em relação aos outros tipos de absorvedores, como por exemplo sua estreita banda de sintonização, eles ainda são elementos que valem a pena se estudar. Nesse estudo são modelados um sistema com absorvedor do tipo massa-mola e outro sistema com um absorvedor massa-mola amortecido. Depois de modelados os sistemas, foram dimensionados vários absorvedores diferentes e analisados seus efeitos sobre os sistemas principais através de valores obtidos por gráficos feitos em MATLAB e equações com o objetivo de encontrar valores ótimos para o projeto de absorvedores desses sistemas. Foram obtidos diferentes valores ótimos de razão de massa entre os projetos dos absorvedores. Para o ADV amortecido os melhores resultados encontrados foram para valores de $0,1 \leq \mu \leq 0,4$, enquanto que para o ADV não amortecido esses valores foram obtidos para $0,2 \leq \mu$.

Palavras-chave: Simulação em MATLAB, frequência natural, otimização, sistemas de dois graus de liberdade.

ABSTRACT

Bortoloto, Vitor (2017). A study of mass-spring dynamic absorbers on mechanical systems, Pato Branco, 68 p. Course Conclusion Paper – Mechanical Engineering Course, Federal Technological University of Paraná.

The use of dynamic vibration absorbers is a very effective and inexpensive method for vibration control. Despite passive dynamic vibration absorbers show less advantages than other kind of absorbers, for example their narrow tune band, they still are elements worthy of study. In this study two systems are modelled, one system with a mass-spring absorber and the other with a damped mass-spring absorber. After the modelling was done, a lot of different absorbers were scaled out and their effects on the main systems were analyzed through values gotten by graphics made on MATLAB and equations with the objective of finding optimal values of project for these systems's absorbers. The optimal values of mass ratio obtained were different between the projects of the absorbers. For the damped absorber, the best results were found for values of $0,1 \leq \mu \leq 0,4$, whereas for the undamped absorber these values were obtained for $0,2 \leq \mu$.

Key Words: MATLAB simulation, natural frequency, optimization, two-degrees of freedom systems.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Efeito de um absorvedor de vibrações não amortecido na resposta de uma máquina.....	30
Figura 2- Representação de um absorvedor dinâmico de vibrações não amortecido.	31
Figura 3- Representação de um absorvedor de vibrações em uma linha de alta tensão.	32
Figura 4 - Representação do sistema massa-mola estudado	35
Figura 5 – Representação do sistema massa-mola com amortecedor estudado	38
Figura 6 – Influência da razão de massas na banda operacional do ADV.	41
Figura 7 – Intervalo de banda no qual ocorre diminuição de amplitude da massa principal.....	42
Figura 8 - Efeitos de um ADV amortecido na resposta de um sistema	43
Figura 9 - Otimização pelo método dos picos iguais ($\mu = 0,1$).....	44
Figura 10 - Amplitude no domínio da frequência, $\mu = 0,001$	47
Figura 11 - Amplitude no domínio da frequência, $\mu = 0,01$	47
Figura 12 - Amplitude no domínio da frequência, $\mu = 0,1$	48
Figura 13 - Amplitude no domínio da frequência, $\mu = 0,2$	48
Figura 14 - Amplitude no domínio da frequência, $\mu = 0,3$	49
Figura 15 - Amplitude no domínio da frequência, $\mu = 0,4$	49
Figura 16 - Amplitude no domínio da frequência, $\mu = 0,5$	50
Figura 17 - Amplitude no domínio da frequência, $\mu = 0,6$	50
Figura 18 - Amplitude no domínio da frequência, $\mu = 0,7$	51
Figura 19 - Amplitude no domínio da frequência, $\mu = 0,8$	51
Figura 20 - Amplitude no domínio da frequência, $\mu = 0,9$	52
Figura 21 - Amplitude no domínio da frequência, $\mu = 1,0$	52
Figura 22 - Amplitude do sistema amortecido no domínio da frequência para $\mu = 0,001$	57
Figura 23 - Amplitude do sistema amortecido no domínio da frequência para $\mu = 0,01$	57
Figura 24 - Amplitude do sistema amortecido no domínio da frequência para $\mu = 0,1$	58

Figura 25 - Amplitude do sistema amortecido no domínio da frequência para $\mu = 0,2$	58
Figura 26 - Amplitude do sistema amortecido no domínio da frequência para $\mu = 0,3$	59
Figura 27 - Amplitude do sistema amortecido no domínio da frequência para $\mu = 0,4$	59
Figura 28 - Amplitude do sistema amortecido no domínio da frequência para $\mu = 0,5$	60
Figura 29 - Amplitude do sistema amortecido no domínio da frequência para $\mu = 0,6$	60
Figura 30 - Amplitude do sistema amortecido no domínio da frequência para $\mu = 0,7$	61
Figura 31 - Amplitude do sistema amortecido no domínio da frequência para $\mu = 0,8$	61
Figura 32 - Amplitude do sistema amortecido no domínio da frequência para $\mu = 0,9$	62
Figura 33 - Amplitude do sistema amortecido no domínio da frequência para $\mu = 1,0$	62

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Dados do sistema principal 1	46
Tabela 2 – Valores de massa e rigidez para o ADV	46
Tabela 3 – Valores das frequências naturais após adição do ADV	53
Tabela 4 – Valores das frequências em função da frequência natural do sistema principal.....	53
Tabela 5 – Amplitudes dos ADVs.....	54
Tabela 6 – Intervalos A-B com diminuição de amplitude da massa principal em função da razão das frequências naturais.....	55
Tabela 7 – Intervalos A-B com diminuição de amplitude da massa principal em radianos por segundo.....	55
Tabela 8 - Valores ótimos para o ADV amortecido	56
Tabela 9 - Valores das amplitudes das massas principal e secundária para diferentes razões de massa	63
Tabela 10 - Diferença da altura entre os picos de amplitude da massa principal.....	64

SIMBOLOGIA

Letras Latinas

m_1	Massa principal
m_2	Massa secundária (absorvedor)
k_1	Rigidez da mola do sistema principal
k_2	Rigidez da mola do sistema secundário
Fm_1	Força exercida pela mola 1
Fm_2	Força exercida pela mola 2
Fm_3	Força exercida pela mola 3
F_0	Força de excitação do sistema
x_1	Deslocamento da massa primária
x_2	Deslocamento da massa secundária
X_1	Amplitude da massa principal
X_2	Amplitude do absorvedor
f	Razão da frequência natural do absorvedor pela frequência natural do sistema primário
g	Razão da frequência de excitação pela frequência natural do sistema principal
c	Constante de amortecimento

Letras Gregas

ω	Frequência de excitação
ω_1	Frequência natural da massa principal
ω_2	Frequência natural do absorvedor
μ	Razão de massas
Ω_1	Primeira frequência natural do sistema com absorvedor
Ω_2	Segunda frequência natural do sistema com absorvedor
δ_{st}	Deflexão estática do sistema

ξ Fator de amortecimento

Siglas e abreviaturas

ADV Absorvedor dinâmico de vibrações

ADVs Absorvedores dinâmicos de vibrações

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	25
1.1 OBJETIVOS	25
1.1.1 Objetivos Gerais	25
1.1.2 Objetivos Específicos	26
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	27
2.1 INTRODUÇÃO ÀS VIBRAÇÕES.....	27
2.2 CLASSIFICAÇÃO DAS VIBRAÇÕES	28
2.3 CONTROLE DE VIBRAÇÃO	29
2.4 ABSORVEDORES DINÂMICOS DE VIBRAÇÕES	31
3 METODOLOGIA E MÉTODOS	34
3.1 EQUACIONAMENTO	35
3.1.1 Sistema Massa-mola não amortecido	35
3.1.2 Sistema Massa-mola amortecido	38
3.2 OTIMIZAÇÃO DOS ADV'S.....	40
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES	46
4.1 SISTEMA MASSA-MOLA NÃO AMORTECIDO.....	46
4.2 SISTEMA MASSA-MOLA AMORTECIDO.....	56
5 CONCLUSÃO.....	65
REFERÊNCIAS.....	67

1 INTRODUÇÃO

Vibrações mecânicas é uma área da engenharia que vem ganhando cada vez mais importância no cenário mundial da engenharia mecânica e civil, devido à grande necessidade de segurança nos projetos dessas áreas, muitos dos quais sofrem com os efeitos de vibrações. Garantir a segurança desses projetos é importante, pois também garante a segurança das pessoas que estão diretas ou indiretamente em contato com essas obras. Como por exemplo: a construção de arranha-céus, montagem de máquinas e estruturas metálicas que ofereçam algum tipo de perigo ambiental ou físico ao operador e demais pessoas que estejam na área caso ocorra uma falha desses elementos. Porém, à medida que a tecnologia avança, surgem novos estudos sobre as vibrações e assim pode-se entender melhor esses fenômenos, criando novas técnicas para controlar e utilizar esses efeitos a favor da engenharia.

Um recurso que está sendo muito utilizado na engenharia para o controle de vibrações é o absorvedor dinâmico de vibrações. A aplicação de absorvedores dinâmicos cresce a cada dia e é uma área de grande interesse dos pesquisadores. Além disso os absorvedores têm baixo custo de instalação, são de fácil construção e tem se apresentado muito eficazes.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivos Gerais

O objetivo deste trabalho consiste em simular sistemas passivos de vibrações com o auxílio da ferramenta computacional MATLAB. Primeiramente, pretende-se analisar os sistemas em vibração livre não amortecida sem um absorvedor dinâmico de vibrações e posteriormente com o absorvedor de vibrações, para frequências de excitação equivalentes. Com base nos resultados das simulações realizadas, deseja-se comparar as respostas dos sistemas a essas excitações.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Estudar sistemas em vibração livre ou forçada não amortecida com 1 grau de liberdade, nos quais seja pertinente a utilização de absorvedores de vibrações.

- Determinar as frequências naturais desses sistemas.

- Modelar e simular esses sistemas no *software* MATLAB.

- Adicionar absorvedores dinâmicos de vibrações aos sistemas e simulá-los novamente.

- Determinar as novas frequências naturais do sistema com o absorvedor dinâmico.

- Avaliar as respostas dos sistemas às vibrações.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 INTRODUÇÃO ÀS VIBRAÇÕES

As vibrações fazem parte de nossas vidas em diferentes formas. No próprio corpo humano as vibrações desempenham um papel muito importante, já que é graças a esse fenômeno que podemos ouvir e falar. As vibrações também estão presentes nos movimentos oscilatórios do coração e dos pulmões que nos mantêm vivos e similarmente aparecem quando realizamos atividades físicas como andar, correr, dançar, pular e nadar.

Segundo Silva e Beck (2012 p. 158)

Vibração ou oscilação é todo movimento que se repete em intervalos de tempos iguais. Deste modo, a vibração contém o estudo do movimento vibratório de um corpo em torno de uma posição de equilíbrio, assim como as forças e momentos a ele associados.

De acordo com Balachandran et al (2009), equipamentos e máquinas criados pelo homem também podem possuir ou criar vibrações, principalmente em máquinas com partes rotatórias. Nesse tipo de máquina, qualquer desbalanceamento pode causar vibrações, o que pode gerar desconforto para o operador da máquina ou pode levar a quebra do equipamento. Alguns exemplos de máquinas rotatórias em que isso pode ocorrer são: turbinas, ventiladores, máquinas de lavar roupas, bombas centrífugas e tornos mecânicos.

Todo edifício, componente mecânico ou órgão possui uma frequência natural de vibração, já que ela depende apenas da massa e rigidez dos corpos e toda matéria possui essas características. Quando o sistema é excitado e vibra na sua frequência natural, ocorre um fenômeno chamado de ressonância. Esse fenômeno faz com que a amplitude dos movimentos vibratórios do sistema tenda ao infinito, ou seja, causam deflexões muito grandes e também ocorre um grande aumento na força dinâmica que age sobre o sistema, fatores os quais levam a esse sistema a uma falha catastrófica. Portanto, geralmente as vibrações são um fenômeno indesejado, já que geram ruídos, fadiga e desgaste em componentes e podem gerar desconforto para as pessoas e até causar a quebra de equipamentos e estruturas.

As vibrações também afetam processos de corte de metais, fazendo com que o acabamento superficial do metal seja precário, e influenciam em equipamentos de medição de precisão, como por exemplo, microscópios eletrônicos, causando imprecisão nas aferições. Tudo isso torna o estudo de sistemas que estão sujeitos às vibrações mecânicas altamente relevantes, pois torna-se necessário verificar as fontes de vibração e possíveis soluções afim de prevenir a falha desses sistemas, garantir sua segurança e a qualidade no seu funcionamento.

2.2 CLASSIFICAÇÃO DAS VIBRAÇÕES

Silva e Beck (2012), dizem que as vibrações podem ser classificadas segundo os seguintes critérios: excitação externa, amortecimento, previsibilidade e linearidade, resultando assim na seguinte classificação:

- a) Vibrações Livres: pode-se dizer que um sistema está em vibração livre se o seu movimento oscilatório ocorre de forma natural, ou seja, é causado apenas por um deslocamento ou velocidade inicial, que não influencia ao longo do tempo no movimento.
- b) Vibrações Forçadas: um sistema é dito em vibração forçada se houver uma força ou torque agindo no sistema que foram aplicados externamente. O efeito dessa força ou torque influenciam no movimento do corpo ao longo do tempo, até que o movimento entre em regime permanente e então possa ser tratado como um sistema em vibração livre.
- c) Vibrações Determinísticas: se a frequência de excitação que age sobre um corpo for conhecida ela é chamada de determinística. Geralmente elas ocorrem em máquinas e estruturas que estão sujeitas sempre às mesmas forças e então é possível medir uma frequência de excitação padrão.
- d) Vibrações Aleatórias: esse tipo de vibração é o inverso das vibrações determinísticas, ou seja, são vibrações em que não se pode prever sua frequência de excitação em determinado instante. Normalmente as vibrações

aleatórias estão relacionadas com fenômenos naturais, como por exemplo, terremotos e furacões.

- e) Vibrações não amortecidas e amortecidas: se não há perda de energia no movimento oscilatório, a vibração é dita não amortecida. Portanto, se ocorre a perda de energia do sistema, a vibração é do tipo amortecida.
- f) Vibrações Lineares e não lineares: uma vibração é considerada linear se há uma proporção entre a excitação e o movimento gerado por essa excitação. Para esse tipo de vibração o princípio da superposição é válido. Em contrapartida se não há uma proporção entre a excitação e sua resposta, a vibração é classificada como não linear e nesse caso o princípio da superposição não pode ser aplicado.

Neste estudo serão avaliados apenas sistemas que estejam sob a influência de vibrações livres ou forçadas, não amortecidas, amortecidas e lineares.

2.3 CONTROLE DE VIBRAÇÃO

Controle de vibração nada mais é do que a alteração de um sistema vibratório com o objetivo de reduzir ou eliminar as vibrações desse sistema, para que o nível de vibração aceitável do sistema seja atingido.

Segundo Silva (2005 p. 158), existem três principais técnicas para se reduzir os níveis de vibração em um sistema:

- Atuar sobre a força de excitação eliminando-a, reduzindo sua amplitude e/ou alterando sua frequência.
- Atuar sobre a estrutura, variando seus parâmetros dinâmicos (massa, rigidez e amortecimento).
- Acoplar um sistema auxiliar ao sistema principal ou primário procurando neutralizar a vibração e/ou seus efeitos.

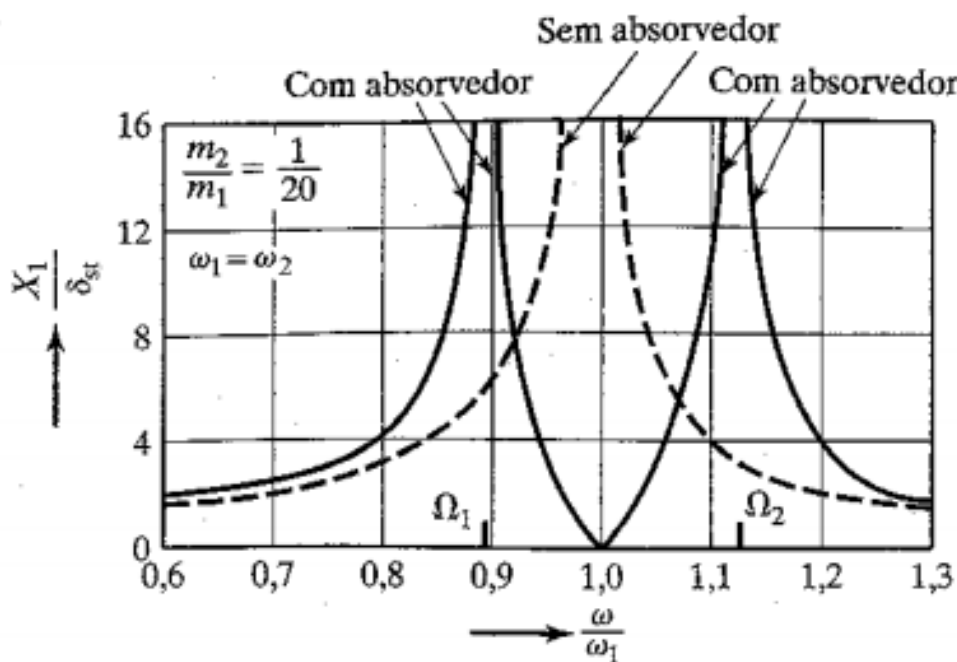
A primeira solução não é fácil de ser aplicada e quase nunca é possível alterar a frequência de excitação ou a amplitude da força, já que muitas vezes a fonte das vibrações são fenômenos naturais como por exemplo, o vento e abalos sísmicos. A segunda opção pode ser interessante se a estrutura primária

apresentar uma densidade modal relativamente baixa e possuir esforços do tipo banda estreita. Porém caso isso não ocorra, modificar a estrutura muitas vezes não é válido nem eficaz. Também deve ser levado em consideração que a estrutura faz parte de um outro projeto que se sofrer alterações pode ser comprometido. Sendo assim, a alternativa mais interessante para o controle de vibrações é trabalhar utilizando a terceira solução.

Essa solução consiste em acoplar um sistema secundário com massa e rigidez ao sistema primário que precisa ser protegido de vibração. Entretanto, a junção desses sistemas cria um sistema com dois graus de liberdade e conseqüentemente apresentará dois valores diferentes de frequência natural.

A figura abaixo representa um exemplo de absorvedor de vibrações não amortecidos quando usados em uma máquina.

Figura 1- Efeito de um absorvedor de vibrações não amortecido na resposta de uma máquina.

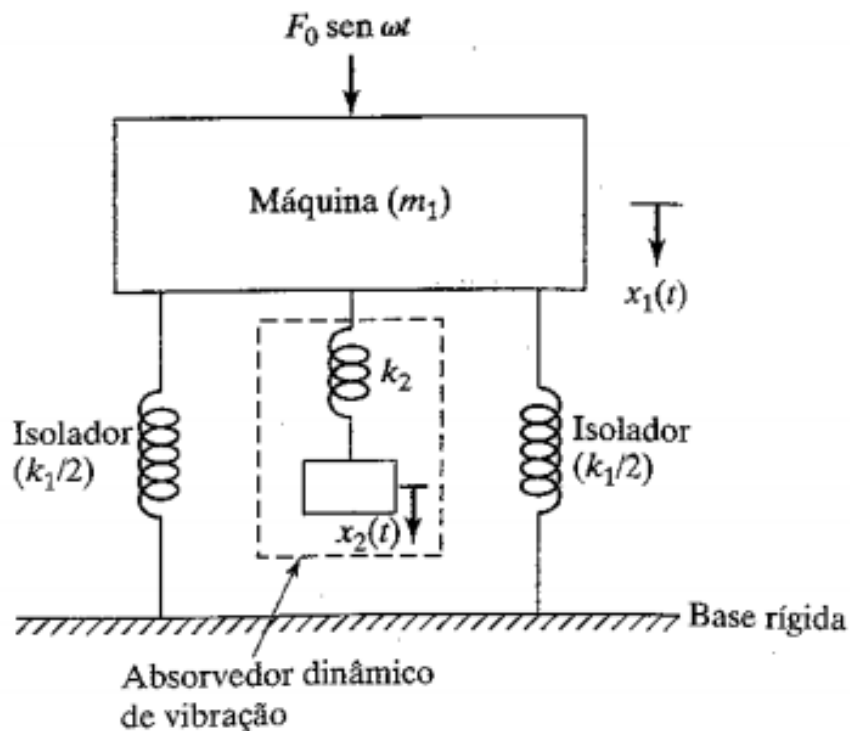


Fonte: Rao, S. S. (2011). *Vibrações Mecânicas*. Prentice Hall.

2.4 ABSORVEDORES DINÂMICOS DE VIBRAÇÕES

O sistema secundário acoplado citado anteriormente é denominado absorvedor de vibração ou absorvedor dinâmico de vibração. Uma representação simples da utilização desse recurso é mostrada na figura 2, onde m_1 , k_1 são a massa e rigidez do sistema primário respectivamente; m_2 , k_2 são a massa e rigidez do sistema secundário; e $F_0 \cdot \text{sen}(\omega t)$ é a força de excitação.

Figura 2- Representação de um absorvedor dinâmico de vibrações não amortecido.



Fonte: Rao, S. S. (2011). *Vibrações Mecânicas*. Prentice Hall.

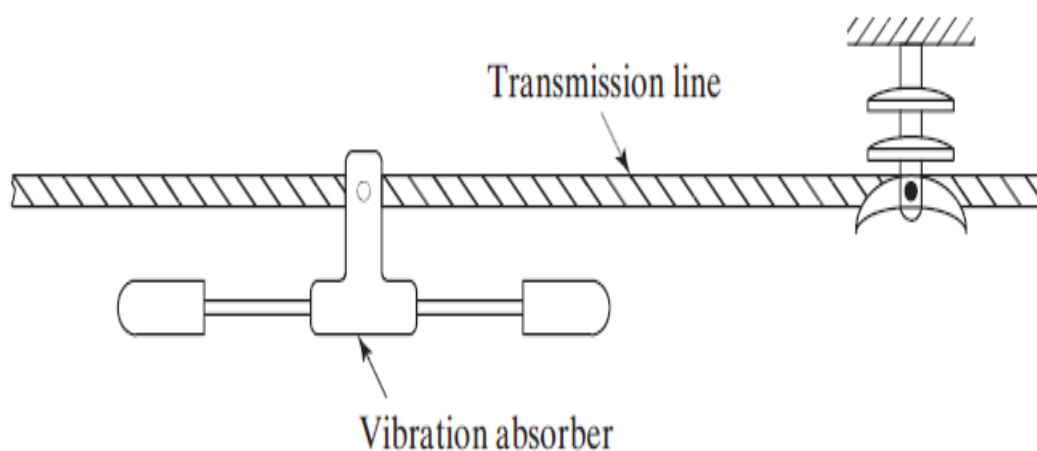
Caso o sistema primário fosse excitado à uma frequência igual a sua frequência natural, o sistema entraria em ressonância. Porém com a utilização do absorvedor dinâmico de vibrações para essa frequência, a vibração da massa do sistema primário é atenuada e, portanto, a amplitude desse sistema será pequena. Desse modo o sistema não falhará devido a ação das vibrações mecânicas.

Segundo Rao (2011), o absorvedor de vibrações é comumente usado em maquinário que operam a velocidade constante, porque o absorvedor de vibrações é regulado para uma frequência em particular e é efetivo em apenas uma estreita faixa de frequências.

Os absorvedores dinâmicos de vibrações são comumente encontrados em serras elétricas, lixadeiras e furadeiras. Porém existem algumas aplicações mais variadas, como por exemplo, a utilização de absorvedores de vibrações em linhas de transmissão de energia elétrica de alta tensão. Para essa aplicação os absorvedores dinâmicos de vibração têm o formato de halteres e são pendurados nessas linhas para reduzir a fadiga causada pelas forças do vento.

Esse tipo de absorvedor dinâmico de vibrações é chamado de *stockbridge* e pode ser visto na Figura 3.

Figura 3- Representação de um absorvedor de vibrações em uma linha de alta tensão.



Fonte: Rao, S. S. (2011). Vibrações Mecânicas. Prentice Hall.

Outro tipo de absorvedor dinâmico de vibrações é o do tipo pêndulo. Eles também são conhecidos como absorvedores centrífugos de pêndulo ou absorvedores de vibração de pêndulo giratório. Como o nome já indica, esse tipo de absorvedor de vibrações é utilizado em aplicações rotativas. Em eixos, por exemplo, eles são usados para moderar as vibrações não desejáveis. De acordo com Balachandran et al. (2009), para que se tenha um absorvedor de vibração efetivo nesse caso, a frequência natural do absorvedor tem que ser proporcional a velocidade de rotação do eixo, já que a velocidade de rotação pode variar por uma extensa faixa.

Ainda, os absorvedores dinâmicos de vibrações podem ser classificados em 3 tipos diferentes: passivos, ativos e adaptativos. Os absorvedores de vibração passivos possuem massa, rigidez e amortecimento fixos, o que limita sua aplicação à apenas uma determinada faixa de frequências e, portanto, não é recomendado

para situações em que haja mudança na frequência de excitação, como por exemplo em estruturas sujeitas à abalos sísmicos. As vantagens de se utilizar absorvedores dinâmicos de vibrações passivos são que eles possuem estabilidade e não precisam de energia.

Já os absorvedores de vibração ativos, segundo Aguiar (2011), são aqueles em que um elemento ativo (atuador) é adicionado paralelamente aos elementos de rigidez e amortecimento do ADV passivo tradicional, permitindo atenuar as vibrações em maior faixa de frequências. A vantagem apresentada por esse absorvedor é que a sintonização pode ser realizada ajustando a força aplicada pelo atuador, sem a necessidade de se alterar os parâmetros físicos (massa, rigidez, amortecimento) do absorvedor.

Por sua vez os absorvedores dinâmicos de vibrações adaptativos são absorvedores que permitem a alteração dos parâmetros de massa, rigidez e amortecimento para que ele atue em uma faixa de frequências maior. Nesse tipo de absorvedor, a alteração dos parâmetros físicos pode ser automática ou manual. Os absorvedores adaptativos são uma junção dos pontos positivos dos dois tipos citados anteriormente, portanto podem ser estáveis e também trabalhar em uma faixa de frequências maior que a dos absorvedores passivos.

3 METODOLOGIA E MÉTODOS

Os sistemas vibratórios possuem uma relação de causa (força de excitação) e efeito (movimento oscilatório). Essa relação é influenciada por variáveis tais como a condição inicial do sistema e forças externas. Como a maioria dos sistemas vibratórios são altamente complexos, ocorre uma simplificação do problema para se montar o modelo matemático, portanto apenas os fatores mais importantes são considerados.

No estudo realizado por Rao (2009), é dito que a análise de um sistema vibratório geralmente envolve as seguintes etapas: modelação matemática, derivação das equações governantes, solução das equações governantes e interpretação dos resultados.

1ª Etapa) Modelação Matemática: O modelo matemático serve para representar os elementos presentes no sistema em questão. O modelo pode começar simples para obter uma resposta rápida e posteriormente pode ser refinado para um resultado mais preciso.

2ª Etapa) Derivação das Equações Governantes: Nessa etapa serão montadas as equações que descrevem o comportamento do sistema (equação de movimento). Neste estudo a equação de movimento será obtida através da realização de um diagrama de corpo livre e da utilização da Segunda Lei de Newton.

3ª Etapa) Solução das Equações Governantes: Nessa parte a equação de movimento é solucionada para se obter a resposta do sistema. As equações de movimento podem ser resolvidas pelos métodos tradicionais de solução de equações diferenciais e também por programas computacionais. Nesse estudo será utilizado o MATLAB para solucionar as equações e então plotar as respostas dos sistemas.

4ª Etapa) Interpretação dos Resultados: Os resultados obtidos a partir das equações de movimento (deslocamento, velocidade e aceleração das massas dos sistemas) são analisados, levando em consideração o objetivo do estudo em questão, que nesse caso é a comparação entre os valores da amplitude dos sistemas sem o absorvedor dinâmico de vibrações com os valores das amplitudes desses sistemas utilizando o absorvedor dinâmico de vibrações.

Neste estudo serão utilizados absorvedores de vibração do tipo massa-mola não amortecido e um massa-mola amortecido apenas e as equações de movimento serão lineares, sem exceção.

3.1 EQUACIONAMENTO

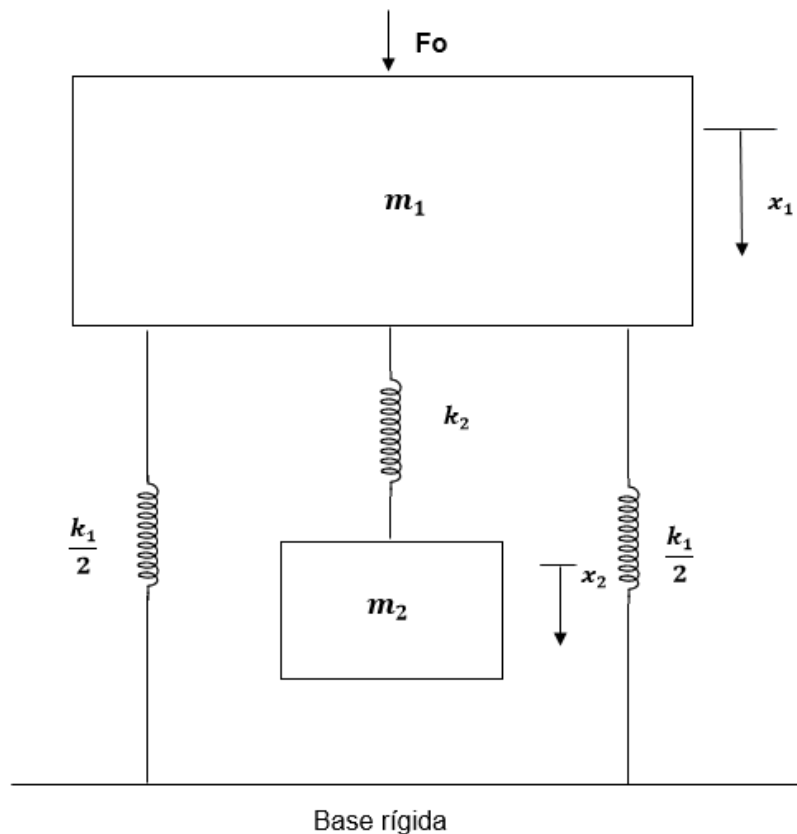
Para realizar este estudo foram escolhidos dois sistemas, um sistema no qual será utilizado um absorvedor de vibrações passivo do tipo massa-mola e outro sistema no qual terá um absorvedor de vibrações passivo do tipo massa-mola com a adição de um amortecedor.

A seguir esses sistemas serão exemplificados e então serão demonstrados os equacionamentos pertinentes para sua simulação e avaliação.

3.1.1 Sistema Massa-mola não amortecido

O primeiro sistema será modelado da seguinte forma:

Figura 4 - Representação do sistema massa-mola estudado



Fonte: Autoria Própria

Sendo que:

k = constante da mola

m = massa

F_0 = força de excitação

Diagrama de corpo livre:

1º Corpo:

$$\sum F = m_1 \ddot{x}_1 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} -Fm_1 - Fm_2 - Fm_3 + F_0 \text{ sen } \omega t &= m_1 \ddot{x}_1 \\ -\frac{k_1}{2} x - k_2(x_1 - x_2) - \frac{k_1}{2} + F_0 \text{ sen } \omega t &= m_1 \ddot{x}_1 \\ -k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2) + F_0 \text{ sen } \omega t &= m_1 \ddot{x}_1 \end{aligned}$$

2º Corpo:

$$\sum F = m_2 \ddot{x}_2 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} -Fm_2 &= m_2 \ddot{x}_2 \\ -k_2(x_2 - x_1) &= m_2 \ddot{x}_2 \end{aligned}$$

Equações de movimento:

1º Corpo:

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) = F_0 \text{ sen } \omega t \quad (3)$$

2º Corpo:

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0 \quad (4)$$

Em seguida assume-se uma solução harmônica:

$$x_1(t) = X_1 \text{ sen } (\omega t) \quad (5)$$

$$x_2(t) = X_2 \text{ sen } (\omega t) \quad (6)$$

Então temos que:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= X_1 \omega \operatorname{sen}(\omega t); & \dot{x}_2(t) &= X_2 \omega \operatorname{sen}(\omega t); \\ \ddot{x}_1(t) &= -X_1 \omega^2 \operatorname{sen}(\omega t); & \ddot{x}_2(t) &= -X_2 \omega^2 \operatorname{sen}(\omega t); \end{aligned}$$

Resolvendo as equações de movimento assumindo uma solução harmônica para as equações diferenciais ordinárias, são obtidas as seguintes equações:

$$X_1 = \frac{F_0(-\omega^2 m_2 + k_2)}{(-\omega^2 m_2 + k_2)(-\omega^2 m_1 + k_1 + k_2) - k_2^2} \quad (7)$$

$$X_2 = \frac{F_0 k_2}{(-\omega^2 m_2 + k_2)(-\omega^2 m_1 + k_1 + k_2) - k_2^2} \quad (8)$$

Nas equações acima X_1 e X_2 representam respectivamente as amplitudes dos corpos 1 e 2 do sistema, assim através do estudo dessas equações é possível observar os efeitos da utilização de um absorvedor dinâmico de vibrações. Pode-se observar que a amplitude X_1 é igual a 0 quando $\omega^2 = k_2/m_2$, por isso os ADV's são projetados para satisfazerem essa condição, já que assim o ponto de ressonância do sistema primário é transformado em um ponto com amplitude igual a zero.

Assim, para $X_1 = 0$ e $\omega^2 = k_2/m_2$, tem-se que a força exercida pelo absorvedor sobre a massa principal é dada por:

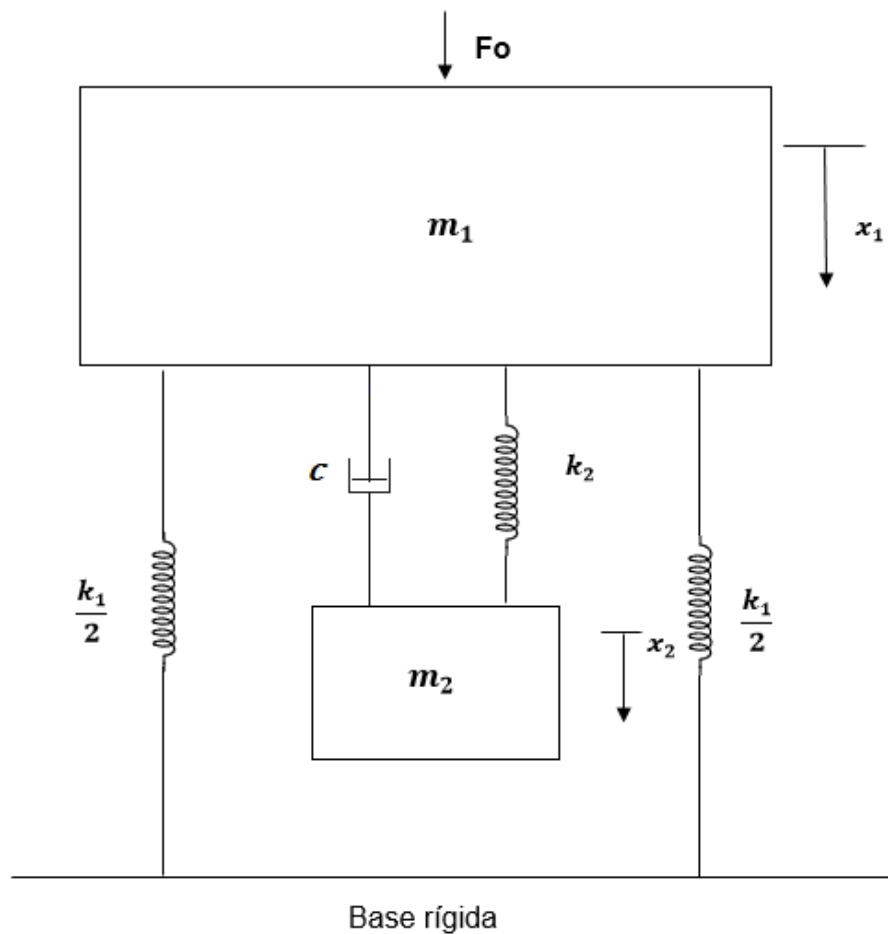
$$F_0 = k_2 X_2 \quad (9)$$

Essa força possui a mesma intensidade exercida pela força da massa primária, porém possui sentido contrário, fato que explica por que a amplitude do sistema é nula e comprova a eficácia da utilização de ADV's como técnica de controle de vibrações. A equação 8 também permite o cálculo da amplitude da massa do sistema secundário, que nesse caso seria o absorvedor de vibrações.

3.1.2 Sistema Massa-mola amortecido

Esse sistema é muito parecido com o anterior, temos apenas a adição de um amortecedor ligando a massa principal com a massa do amortecedor como pode ser visto na figura 5:

Figura 5 – Representação do sistema massa-mola com amortecedor estudado



Fonte: Autoria Própria

Sendo que:

k = constante da mola

m = massa

F_o = força de excitação

c = constante de amortecimento

Diagrama de corpo livre:

1º Corpo:

$$\sum F = m_1 \ddot{x}_1 \quad (10)$$

$$-Fm_1 - Fm_2 - Fm_3 - F_a + F_0 \text{ sen } \omega t = m_1 \ddot{x}_1$$

$$-\frac{k_1}{2} x - k_2(x_1 - x_2) - \frac{k_1}{2} - c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + F_0 \text{ sen } \omega t = m_1 \ddot{x}_1$$

$$-k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2) - c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + F_0 \text{ sen } \omega t = m_1 \ddot{x}_1$$

2º Corpo:

$$\sum F = m_2 \ddot{x}_2 \quad (11)$$

$$-Fm_2 - F_a = m_2 \ddot{x}_2$$

$$-k_2(x_2 - x_1) - c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = m_2 \ddot{x}_2$$

Equações de movimento:

1º Corpo:

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = F_0 \text{ sen } \omega t \quad (12)$$

2º Corpo:

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0 \quad (13)$$

Em seguida assume-se uma solução harmônica:

$$x_1(t) = X_1 e^{i\omega t}$$

$$x_2(t) = X_2 e^{i\omega t}$$

Então temos que as respostas em regime permanente das equações de movimento são:

$$X_1 = \frac{F_0(ic\omega - \omega^2 m_2 + k_2)}{[(-\omega^2 m_2 + k_2)(-\omega^2 m_1 + k_1) - k_2 m_2 \omega^2] + ic\omega(k_1 - \omega^2 m_1 - \omega^2 m_2)} \quad (14)$$

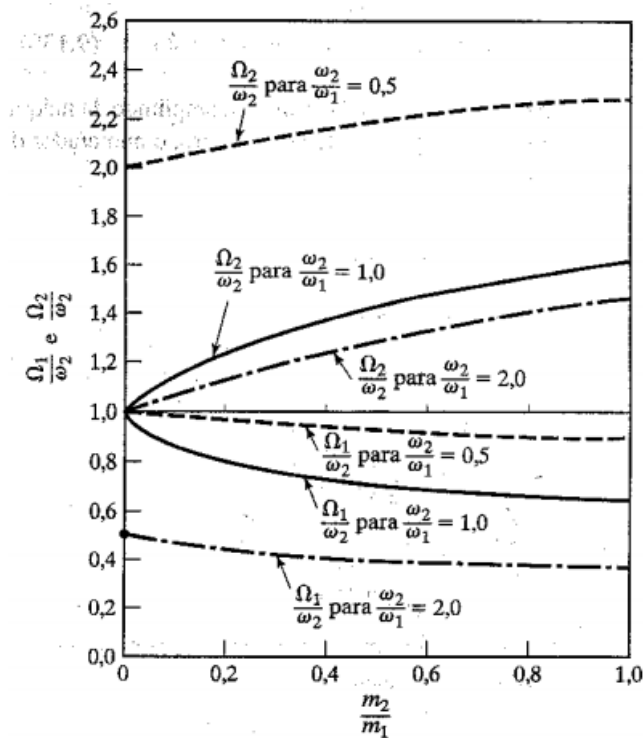
$$X_2 = \frac{F_0(k_2 + ic\omega)}{[(-\omega^2 m_2 + k_2)(-\omega^2 m_1 + k_1) - k_2 m_2 \omega^2] + ic\omega(k_1 - \omega^2 m_1 - \omega^2 m_2)} \quad (15)$$

3.2 OTIMIZAÇÃO DOS ADV'S

Para garantir a eficiência da utilização de absorvedores dinâmicos de vibrações no sistema é importante observar as restrições do projeto, como por exemplo, a magnitude da massa e a amplitude que o absorvedor pode ter. Dessa maneira é possível obter o absorvedor que consiga reduzir a vibração para uma maior faixa de frequências e ainda atenda às necessidades do projeto.

Um dos fatores importantes que pode ser observado é que quanto maior a razão entre a massa do absorvedor e a massa principal, mais larga é a banda operacional do ADV. Esses resultados podem ser observados no estudo feito por RAO (2011), na figura 6. Pode ser visto que para valores maiores de razão de massa, as linhas com relação as duas frequências naturais do sistema de dois graus de liberdade ficam mais distantes uma da outra, para qualquer que seja a relação da frequência natural do ADV com a frequência natural da massa principal.

Figura 6 – Influência da razão de massas na banda operacional do ADV.



Fonte: Rao, S. S. (2011). *Vibrações Mecânicas*. Prentice Hall.

Entretanto, é importante dizer que ao se aumentar muito a massa do ADV, ocorre um aumento das tensões de fadiga, o que não é desejável, já que diminui a vida útil das molas do absorvedor.

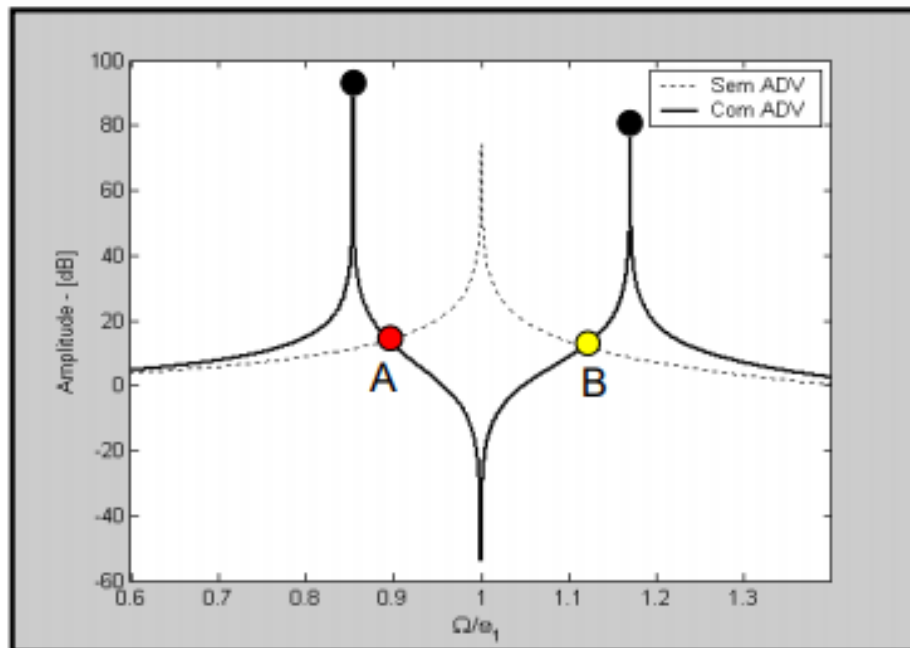
Além disso, no estudo conduzido por Cunha Jr. (1999) é apresentada uma equação que pode ser utilizada para determinar para quais valores de frequência ocorre redução da amplitude da massa principal. Essa equação é representada da seguinte forma:

$$g(A, B) = \frac{1}{4} (\sqrt[2]{2\mu + 16} \pm \sqrt[2]{2\mu}) \quad (16)$$

Sendo que $g(A, B)$ representa os pontos em que o gráfico de resposta da amplitude da massa principal do sistema sem absorvedor cruza com o gráfico do sistema com absorvedor, e então, no intervalo entre esses pontos ocorre a diminuição da amplitude da massa principal.

Na figura 7 é possível ver a representação gráfica da equação 6 para uma razão de massa $\mu=0,1$ e para razão de frequências $\omega_2/\omega_1 = 1$:

Figura 7 – Intervalo de banda no qual ocorre diminuição de amplitude da massa principal



Fonte: Cunha Jr. (1999)

Como já foi dito anteriormente, os ADVs passivos não são recomendados quando existe variação na frequência de excitação do sistema. Pode ser observado na figura 7, que alterações pequenas de frequência podem reduzir a capacidade de absorção de energia do absorvedor significativamente. Portanto, caso seja necessário atender uma banda de frequências maior sem ter que recorrer a utilização de um ADV ativo ou adaptativo é possível apenas utilizar um amortecedor no sistema do ADV passivo.

Caso seja necessário o uso de um ADV passivo amortecido, existem algumas equações que devem ser utilizadas para sua sintonização e otimização. Primeiramente é interessante expressar as equações de resposta desses sistemas em variáveis adimensionais, como foi feito nos estudos realizados por RAO (2011).

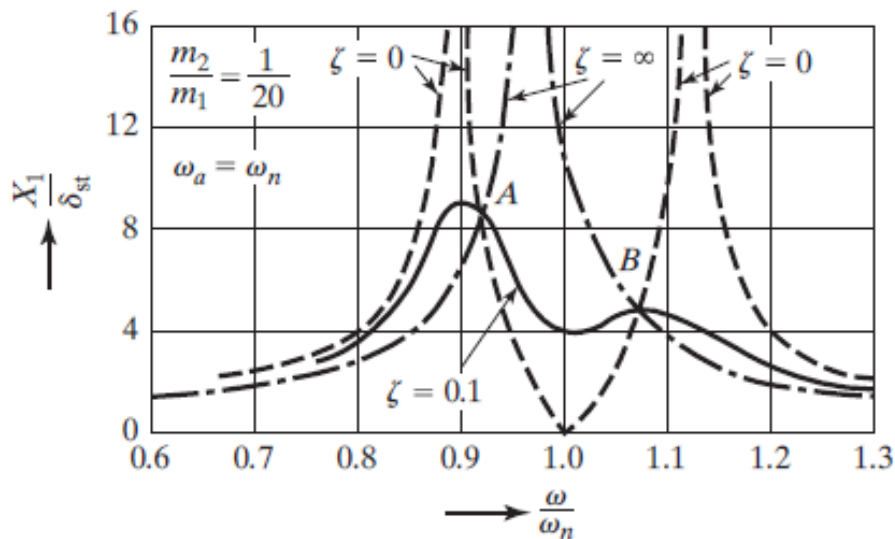
$$\frac{X_1}{\delta_{st}} = \left[\frac{(2\xi g)^2 + (g^2 - f^2)^2}{[(2\xi g)^2 (g^2 - 1 + \mu g^2)^2 + \{\mu f^2 g^2 - (g^2 - 1)(g^2 - f^2)\}^2]} \right]^{1/2} \quad (17)$$

$$\frac{X_2}{\delta_{st}} = \left[\frac{(2\xi g)^2 + f^4}{[(2\xi g)^2(g^2 - 1 + \mu g^2)^2 + \{\mu f^2 g^2 - (g^2 - 1)(g^2 - f^2)\}^2]} \right]^{1/2} \quad (18)$$

As equações 17 e 18 representam a amplitude dos corpos 1 e 2 em função de parâmetros adimensionais.

Em seu estudo ainda, RAO (2011) utiliza essas equações para plotar um gráfico, assumindo os seguintes valores para os parâmetros adimensionais: $\mu = 1/20$, $f = 1$ e alguns valores de ξ . Esse gráfico pode ser visto na figura 8:

Figura 8 - Efeitos de um ADV amortecido na resposta de um sistema



Fonte: Rao, S. S. (2011). *Vibrações Mecânicas*. Prentice Hall.

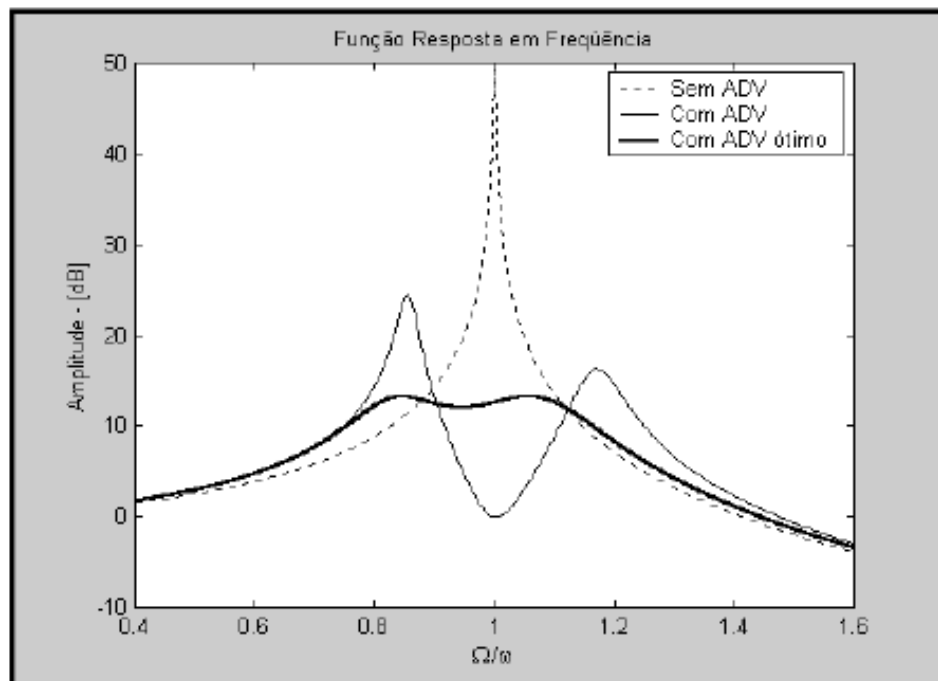
As linhas da figura representam a resposta da amplitude de movimento da massa principal no domínio da frequência para diferentes valores de fator de amortecimento.

Como pode-se observar, independente dos valores dos parâmetros utilizados para plotar as linhas, todas elas se cruzam nos pontos A e B, os quais são denominados “Pontos Invariantes”. Esses pontos podem ser encontrados assumindo valores de $\xi = 0$ e $\xi = \infty$ na equação 17 e manipulando a equação, assim a seguinte equação é obtida:

$$g^4 - 2g^2 \left(\frac{1 + f^2 + \mu f^2}{2 + \mu} \right) + \frac{2f^2}{2 + \mu} = 0 \quad (19)$$

É possível dimensionar um ADV amortecido com parâmetros ξ e f otimizados para atenderem uma maior banda de frequências e apresentarem uma menor amplitude de acordo com Den Hartog (1956) e Balachandran (2009). Para isso é preciso manipular os pontos invariantes. Segundo os seus estudos os parâmetros do projeto são ótimos quando a altura dos dois picos nos quais encontram-se os pontos invariantes A e B são iguais e apresentam uma inclinação nula, ou seja, apresentem “picos” mais suaves ou horizontais. Um exemplo demonstrativo está exemplificado na figura 9:

Figura 9 - Otimização pelo método dos picos iguais ($\mu = 0,1$)



Fonte: Cunha Jr. (1999)

Para atender ao requisito da altura dos picos serem iguais, o valor ótimo para o parâmetro “ f ” é dado por:

$$f_{opt} = \frac{1}{1 + \mu} \quad (20)$$

Porém segundo RAO (2011), um absorvedor que satisfaça a equação acima ainda não é um absorvedor ótimo, apenas sintonizado. Para que o absorvedor seja ótimo, ainda é preciso obter o melhor valor para o fator de amortecimento. A equação que resulta nesse valor é encontrada substituindo o valor de f_{opt} na equação da amplitude da massa principal e então fazendo a devida derivação dessa equação de amplitude em relação a “g”. Assim duas equações são obtidas.

Para o Ponto A:

$$\xi^2 = \frac{\mu \left(3 - \sqrt{\frac{\mu}{\mu + 2}} \right)}{8(1 + \mu)^3} \quad (21)$$

Para o Ponto B:

$$\xi^2 = \frac{\mu \left(3 + \sqrt{\frac{\mu}{\mu + 2}} \right)}{8(1 + \mu)^3} \quad (22)$$

Um valor médio dessas equações é proposto por RAO (2011) e Den Hartog (1956) para simplificar o dimensionamento do absorvedor. Essa nova equação é dada por:

$$\xi_{opt} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu)^3}} \quad (7)$$

Portanto, com a utilização dessas equações para ajustar os parâmetros, finalmente obtêm-se um absorvedor dinâmico de vibrações amortecido otimizado.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 SISTEMA MASSA-MOLA NÃO AMORTECIDO

No primeiro sistema foram utilizadas as variáveis mostradas na tabela 1:

Tabela 1 – Dados do sistema principal 1

DADOS DO SISTEMA PRINCIPAL	VALORES
k_1 [N/m]	120.730.000
m_1 [Kg]	306
F_0 [N]	250
ω_1 [rad/s]	628,321
X_1 [m]	0,0306

Fonte: Autoria Própria

Com a finalidade de obter informações para o bom projeto de um absorvedor dinâmico passivo não amortecido para esse sistema, foram adotados diversos valores para a massa e rigidez para o projeto do ADV, lembrando que todos os valores foram utilizados para obter um ADV com a mesma frequência natural do sistema principal. Na tabela 2 estão os valores utilizados:

Tabela 2 – Valores de massa e rigidez para o ADV

Razão de Massa	$\mu = 0,001$	$\mu = 0,01$	$\mu = 0,1$	$\mu = 0,2$	$\mu = 0,3$	$\mu = 0,4$
m_2 [kg]	0,30581	3,0581	30,581	61,162	91,743	122,324
k_2 [N/m]	120.730	1.207.299	12.073.006	24.146.011	36.219.017	48.292.022
Razão de Massa	$\mu = 0,5$	$\mu = 0,6$	$\mu = 0,7$	$\mu = 0,8$	$\mu = 0,9$	$\mu = 1$
m_2 [kg]	152,905	183,486	214,067	244,648	275,229	305,81
k_2 [N/m]	60.365.028	72.438.033	84.511.039	96.584.045	108.657.050	120.730.056

Fonte: Autoria Própria

Para obter os valores das novas frequências naturais após a adição do ADV ao sistema foi feito uso da equação 7. Com o auxílio do software MATLAB, essa equação foi plotada em um gráfico para cada combinação de valores mostradas na tabela 2. Em seguida estão os gráficos obtidos:

Figura 10 - Amplitude no domínio da frequência, $\mu = 0,001$

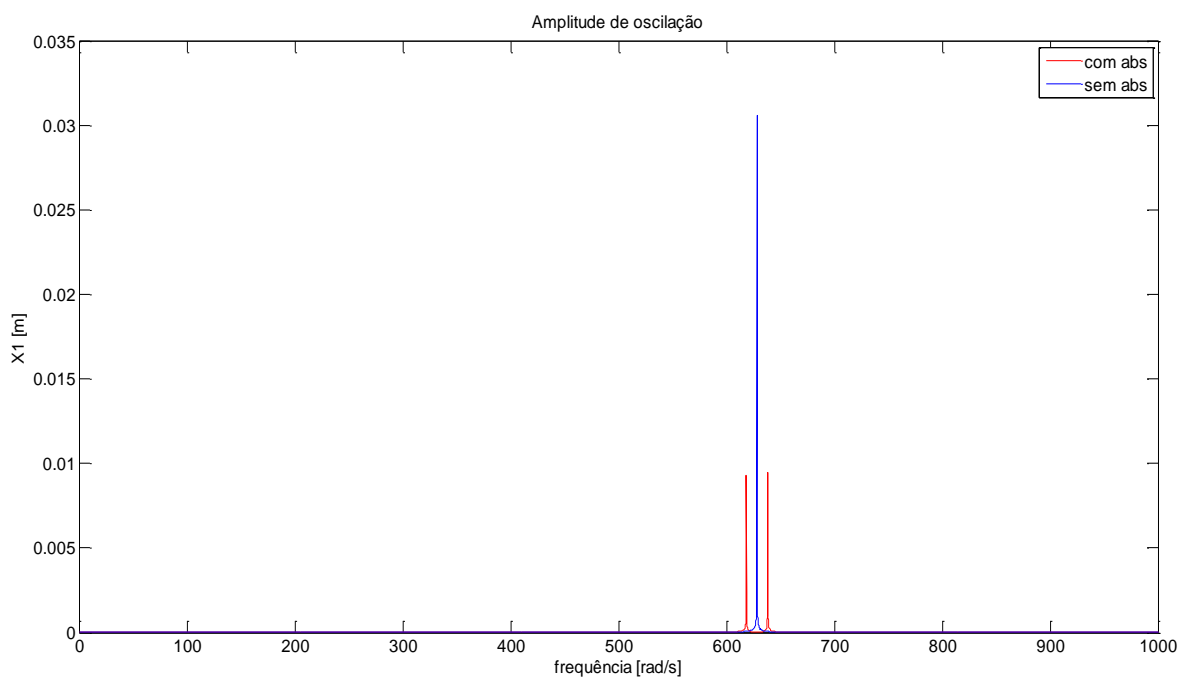


Figura 11 - Amplitude no domínio da frequência, $\mu = 0,01$

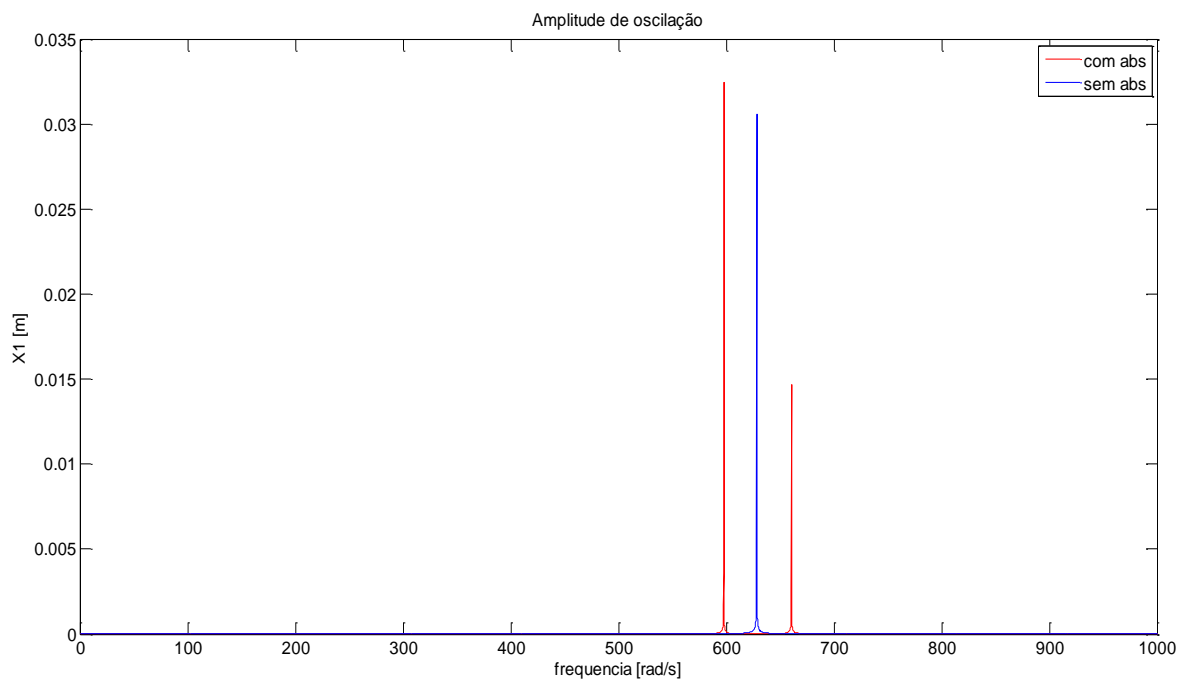


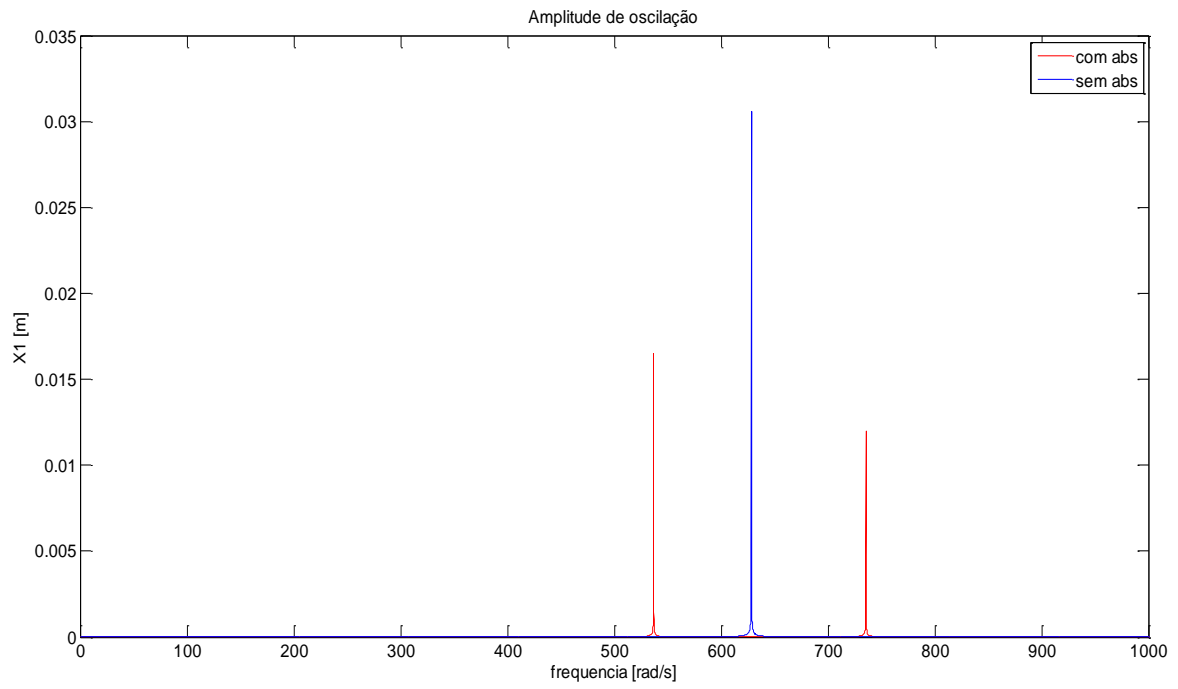
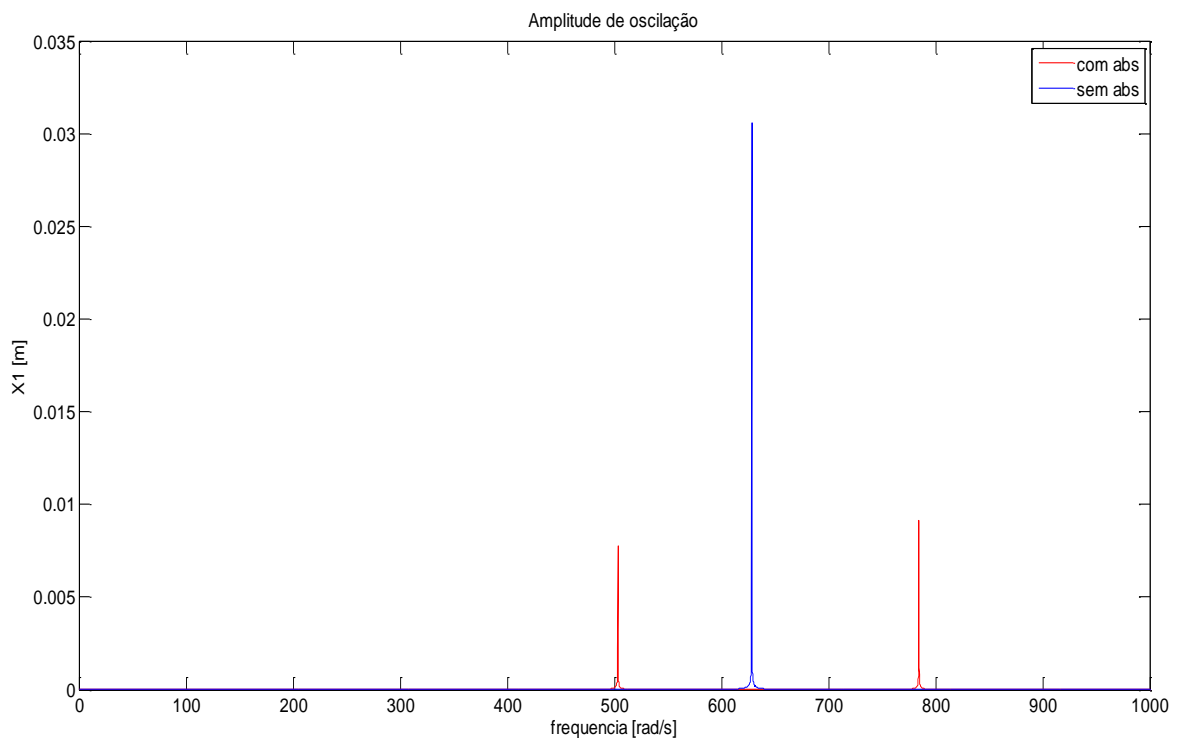
Figura 12 - Amplitude no domínio da frequência, $\mu = 0,1$ **Figura 13 - Amplitude no domínio da frequência, $\mu = 0,2$** 

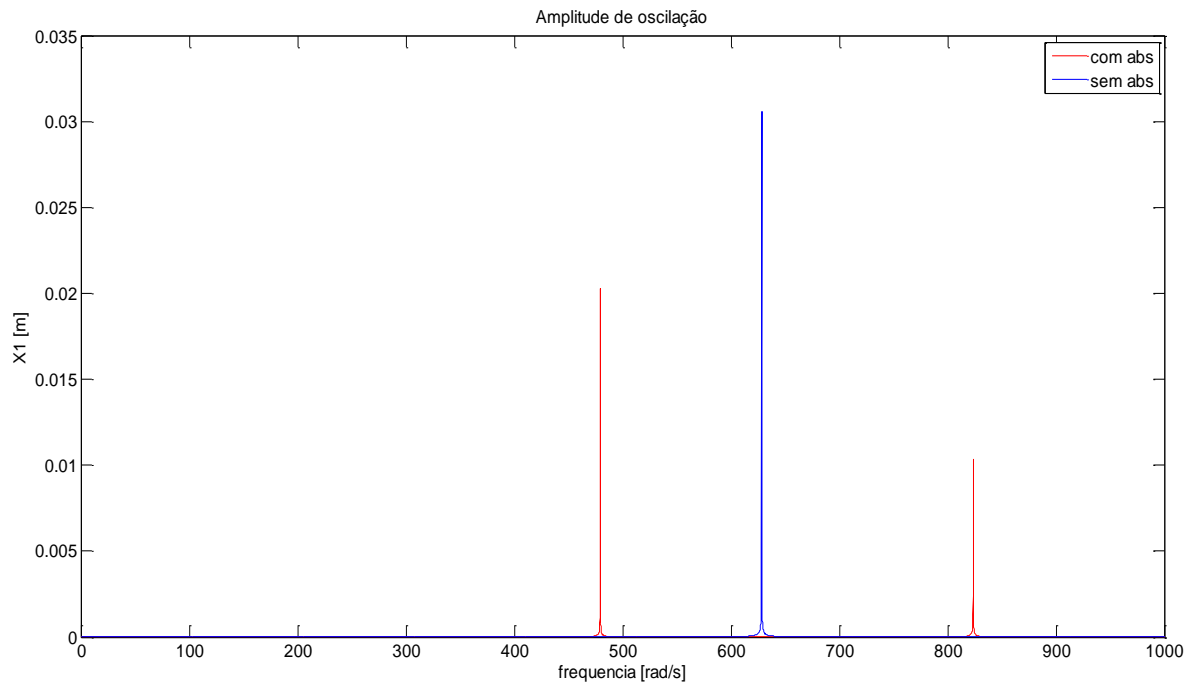
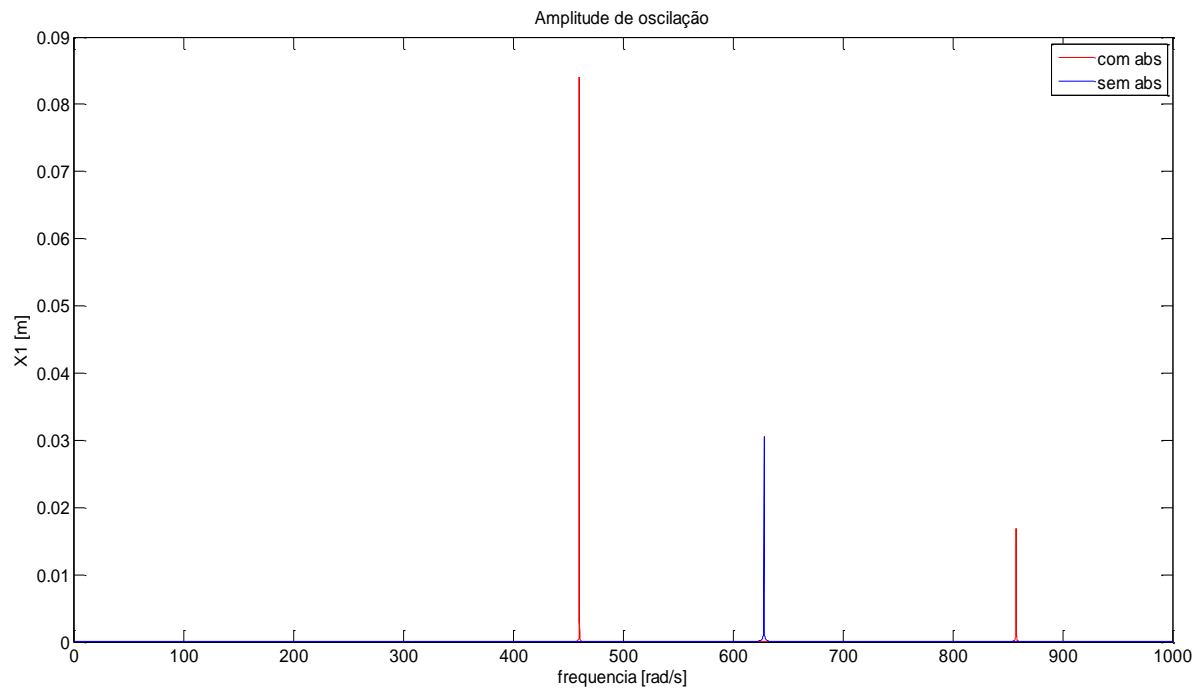
Figura 14 - Amplitude no domínio da frequência, $\mu = 0,3$ **Figura 15 - Amplitude no domínio da frequência, $\mu = 0,4$** 

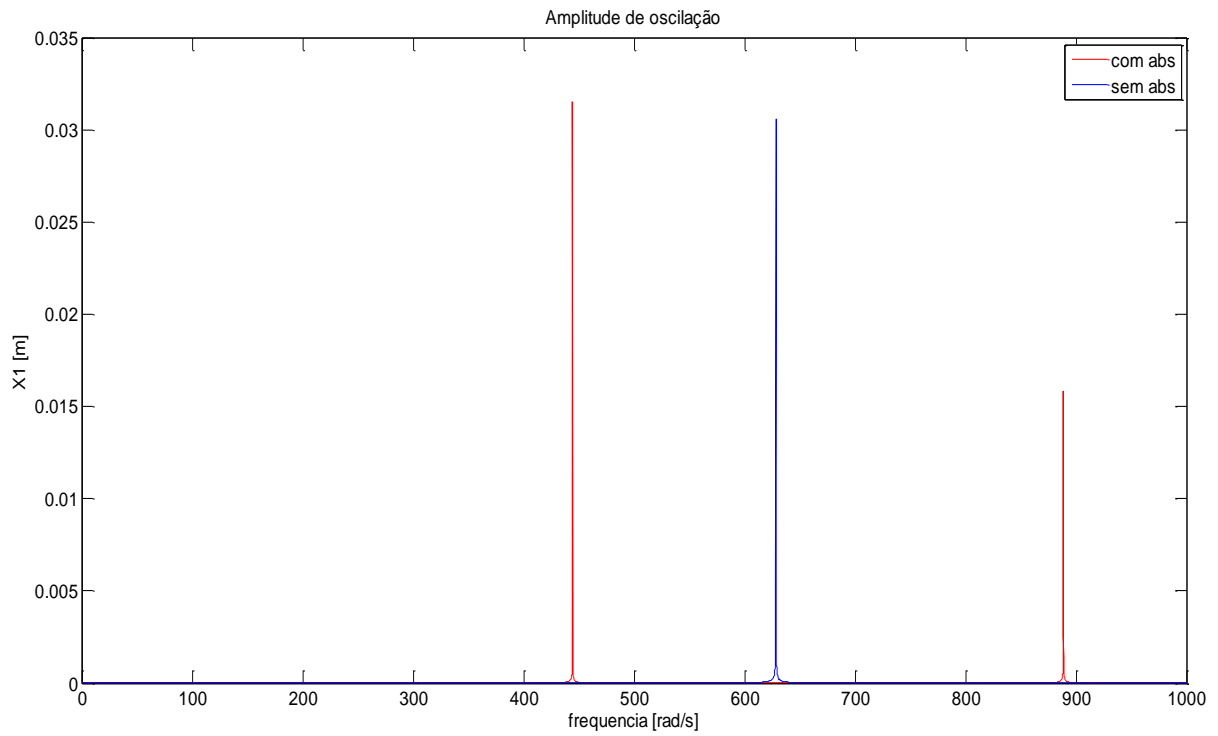
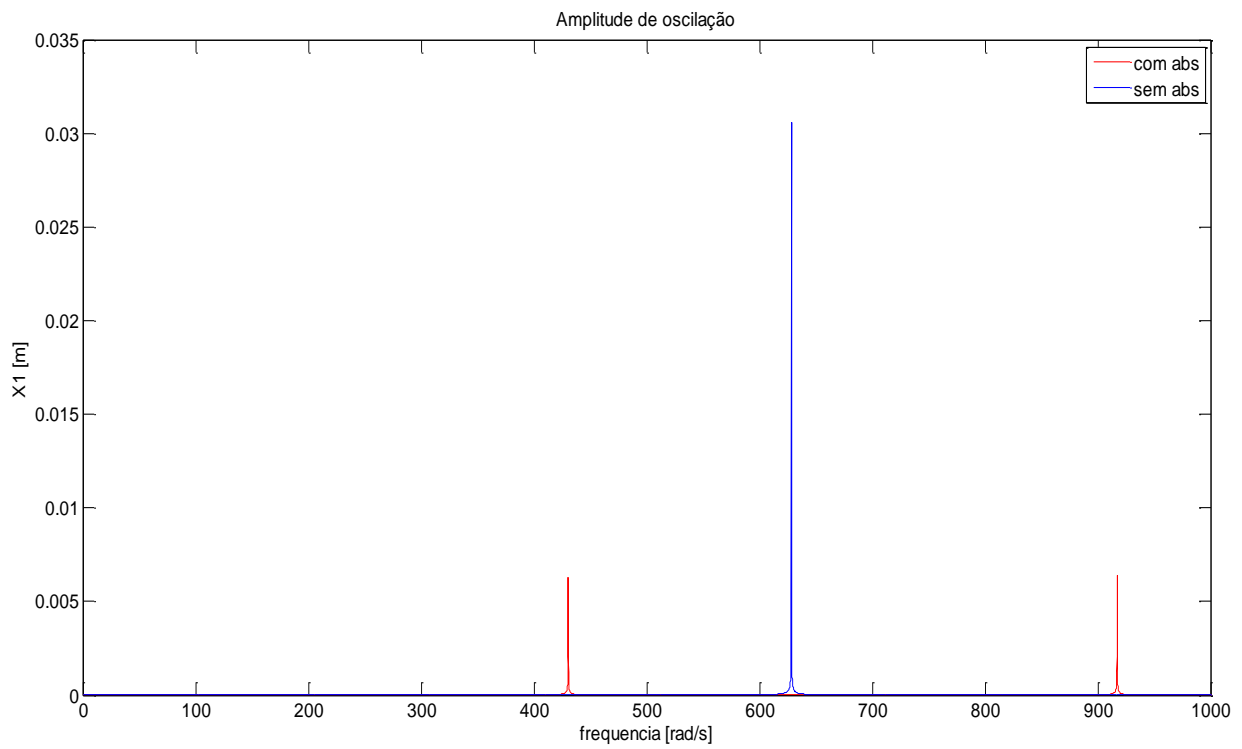
Figura 16 - Amplitude no domínio da frequência, $\mu = 0,5$ **Figura 17 - Amplitude no domínio da frequência, $\mu = 0,6$** 

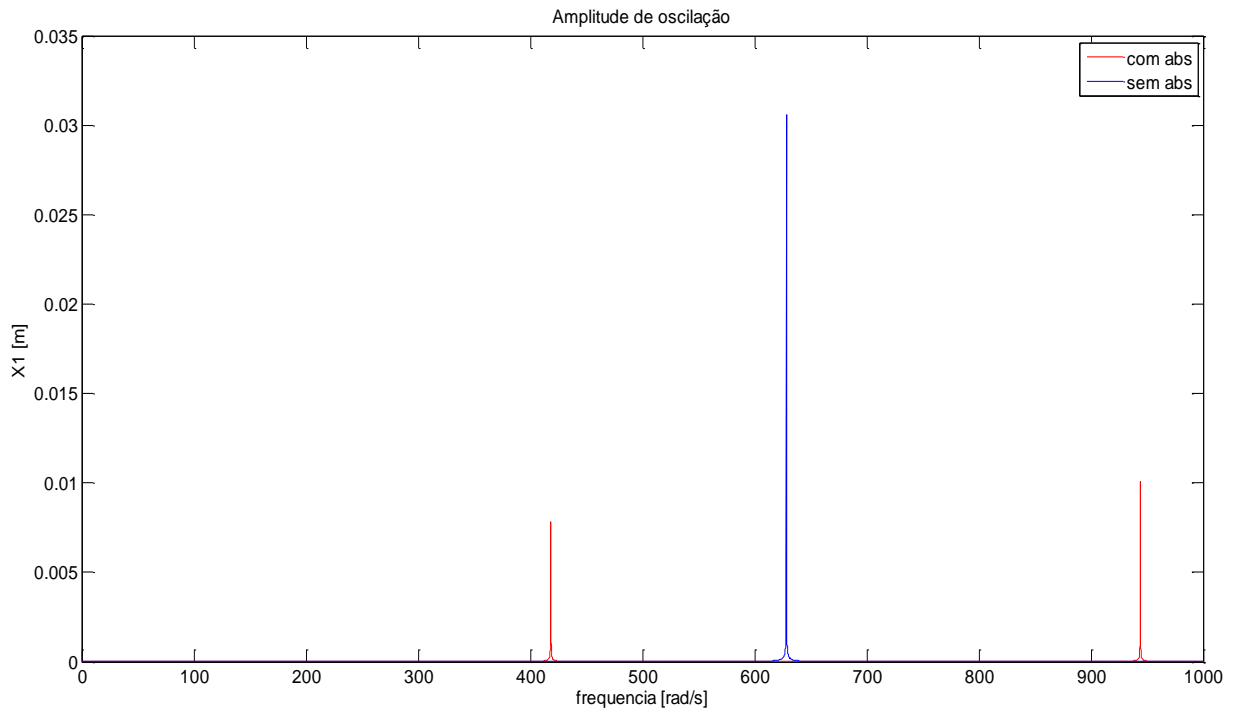
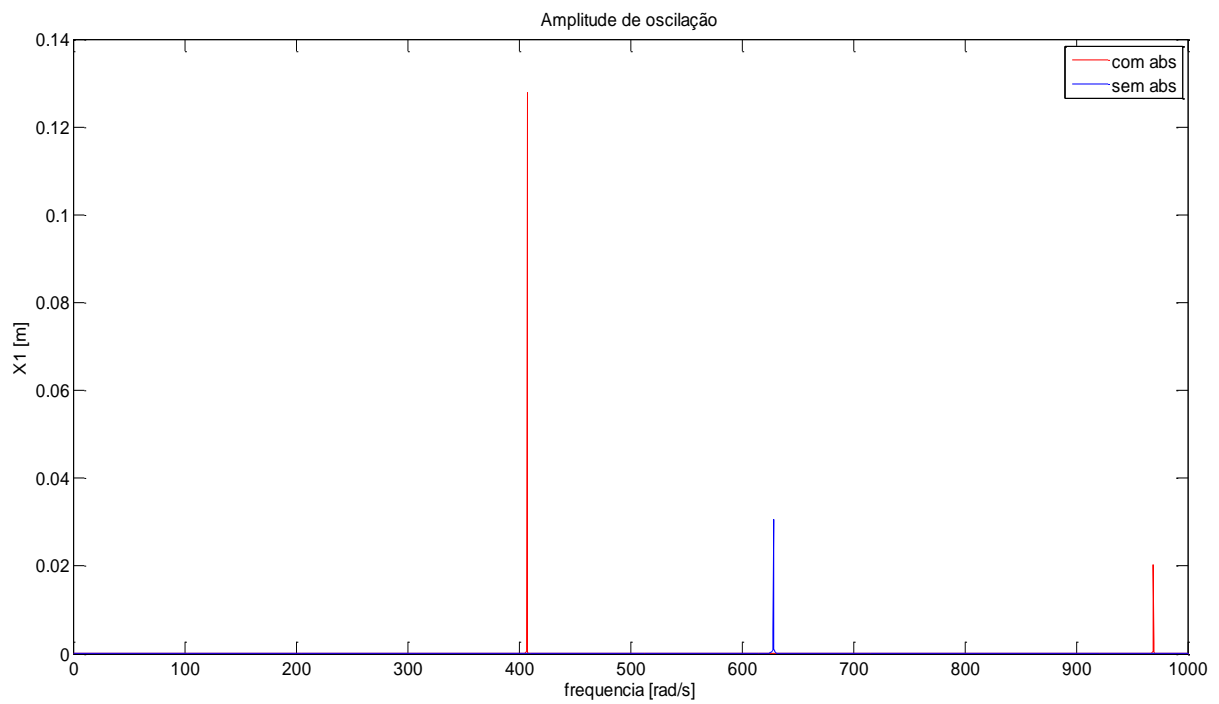
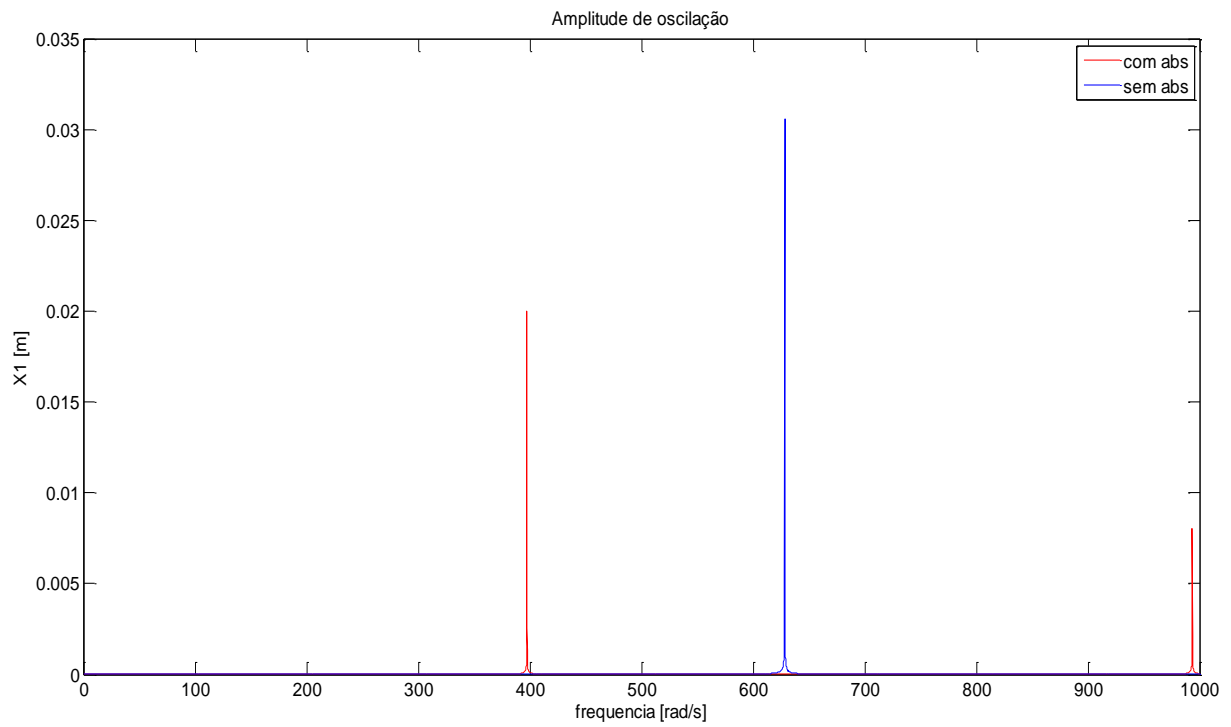
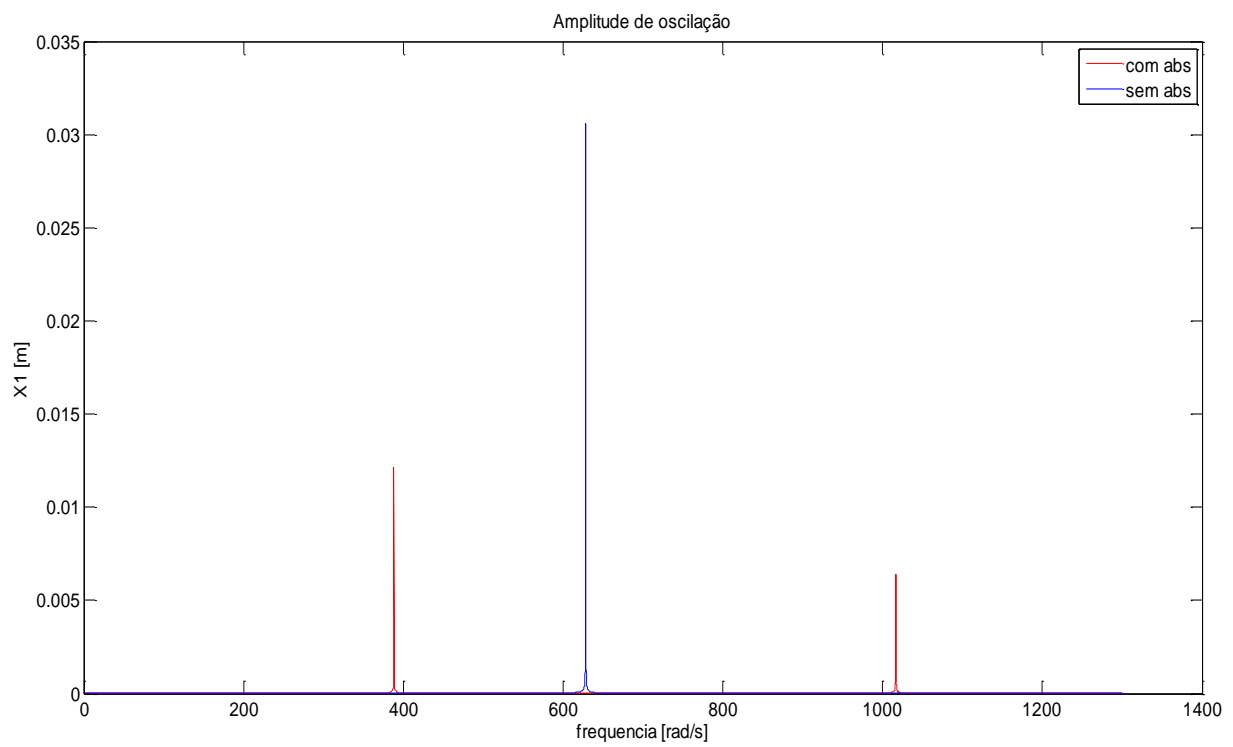
Figura 18 - Amplitude no domínio da frequência, $\mu = 0,7$ **Figura 19 - Amplitude no domínio da frequência, $\mu = 0,8$** 

Figura 20 - Amplitude no domínio da frequência, $\mu = 0,9$ Figura 21 - Amplitude no domínio da frequência, $\mu = 1,0$ 

Os resultados obtidos nos gráficos estão representados na tabela 3:

Tabela 3 – Valores das frequências naturais após adição do ADV

Razão de Massa	$\mu = 0,001$	$\mu = 0,01$	$\mu = 0,1$	$\mu = 0,2$	$\mu = 0,3$	$\mu = 0,4$
Ω_1 [rad/s]	618,5	597,7	536,8	503,3	479,4	460,3
Ω_2 {rad/s}	638,3	660,5	735,5	784,3	823,5	857,7
Razão de Massa	$\mu = 0,5$	$\mu = 0,6$	$\mu = 0,7$	$\mu = 0,8$	$\mu = 0,9$	$\mu = 1$
Ω_1 [rad/s]	444,3	430,5	418,2	390,4	397,4	388,3
Ω_2 {rad/s}	888,6	917,1	943,9	969,3	993,5	1016,6

Fonte: Autoria Própria

Esses valores de frequência também podem ser representados como a razão Ω_1/ω e Ω_2/ω :

Tabela 4 – Valores das frequências em função da frequência natural do sistema principal

Razão de Massa	$\mu = 0,001$	$\mu = 0,01$	$\mu = 0,1$	$\mu = 0,2$	$\mu = 0,3$	$\mu = 0,4$
Ω_1/ω	0,98	0,95	0,85	0,80	0,76	0,73
Ω_2/ω	1,02	1,05	1,17	1,25	1,31	1,37
Razão de Massa	$\mu = 0,5$	$\mu = 0,6$	$\mu = 0,7$	$\mu = 0,8$	$\mu = 0,9$	$\mu = 1$
Ω_1/ω	0,71	0,69	0,67	0,62	0,63	0,62
Ω_2/ω	1,41	1,46	1,50	1,54	1,58	1,62

Fonte: Autoria Própria

Na tabela 4 vemos que para a razão de massa $\mu = 0,5$, as novas frequências naturais Ω_1 e Ω_2 estão a uma distância de $\sqrt{2}$ da frequência natural do sistema sem absorvedor. Esse valor de $\sqrt{2}$ é interessante devido ao fenômeno da transmissibilidade, pois para frequências dentro desse intervalo, ocorre um aumento de amplitude de vibração ao se utilizar um amortecedor, portanto se as

frequências naturais fossem o único fator a ser considerado, o ADV configurado para o ponto de ressonância da massa principal mais adequado seria o de razão de massa $\mu = 0,5$.

Seguindo com o dimensionamento do absorvedor, com a utilização da equação 8 foram obtidos os valores de amplitude do absorvedor e como pode ser observado na tabela 5, percebe-se que quanto maior a razão de massas entre o sistema principal e o secundário, menor é o deslocamento do ADV.

Tabela 5 – Amplitudes dos ADVs

Razão de Massa	$\mu = 0,001$	$\mu = 0,01$	$\mu = 0,1$	$\mu = 0,2$	$\mu = 0,3$	$\mu = 0,4$
X_2 [m]	2,07E-03	2,07E-04	2,07E-05	1,04E-05	6,90E-06	5,18E-06
Razão de Massa	$\mu = 0,5$	$\mu = 0,6$	$\mu = 0,7$	$\mu = 0,8$	$\mu = 0,9$	$\mu = 1$
X_2 [m]	4,14E-06	3,45E-06	2,96E-06	2,59E-06	2,30E-06	2,07E-06

Fonte: Autoria Própria

Além disso, foram calculados os intervalos para os quais ocorre a diminuição de amplitude da massa principal com a utilização de um absorvedor dinâmico de vibrações passivo no sistema. Esses valores estão representados na tabela 6 em função das razões das frequências naturais e na tabela 7 em radianos por segundo.

Tabela 6 – Intervalos A-B com diminuição de amplitude da massa principal em função da razão das frequências naturais

Razão de Massa	$\mu = 0,001$	$\mu = 0,01$	$\mu = 0,1$	$\mu = 0,2$	$\mu = 0,3$	$\mu = 0,4$
A [Ω_1/ω]	0,99	0,97	0,89	0,85	0,82	0,80
B [Ω_2/ω]	1,01	1,04	1,12	1,17	1,21	1,25
Razão de Massa	$\mu = 0,5$	$\mu = 0,6$	$\mu = 0,7$	$\mu = 0,8$	$\mu = 0,9$	$\mu = 1$
A [Ω_1/ω]	0,78	0,76	0,75	0,73	0,72	0,71
B [Ω_2/ω]	1,28	1,31	1,34	1,37	1,39	1,41

Fonte: Autoria Própria

Tabela 7 – Intervalos A-B com diminuição de amplitude da massa principal em radianos por segundo

Razão de Massa	$\mu = 0,001$	$\mu = 0,01$	$\mu = 0,1$	$\mu = 0,2$	$\mu = 0,3$	$\mu = 0,4$
A [rad/s]	621,335	606,499	561,987	536,780	518,320	503,341
B [rad/s]	635,385	650,928	702,484	735,473	761,667	784,334
Razão de Massa	$\mu = 0,5$	$\mu = 0,6$	$\mu = 0,7$	$\mu = 0,8$	$\mu = 0,9$	$\mu = 1$
A [rad/s]	490,578	479,384	469,374	460,296	451,977	444,290
B [rad/s]	804,739	823,530	841,094	857,681	873,468	888,580

Fonte: Autoria Própria

Analisando a tabela 6 e a tabela 7, pode-se ver que quando a razão de massa é muito baixa ($\mu = 0,001$ e $\mu = 0,01$) o intervalo no qual a amplitude da massa principal diminui com o ADV é muito pequena, como já era esperado de um absorvedor de vibrações do tipo passivo. Porém a medida que a razão de massa aumenta, esse intervalo de absorção cresce significativamente. Os valores mais interessantes são obtidos para $\mu = 0,1$, pois apresenta um bom intervalo de absorção de vibração (140 rad/s) e um absorvedor com massa não muito elevada (30,581kg).

Os valores apresentados nas tabelas foram retirados das equações mostradas nas seções 3.1 e 3.2 desse estudo.

4.2 SISTEMA MASSA-MOLA AMORTECIDO

Para esse sistema foram usados os mesmos dados do sistema principal do item 4.1, que podem ser encontrados na tabela 1. Apenas os valores do sistema secundário foram alterados, obtendo assim os valores ótimos para os parâmetros do ADV amortecido. Na tabela 8 podem ser observados os resultados obtidos através da aplicação das equações da seção 3.2.

Tabela 8 - Valores ótimos para o ADV amortecido

μ	m_2 [Kg]	f_{opt}	ξ_{opt}	ω_{aopt} [rad/s]	k_{2opt} [N/m]
0,001	0,30581	0,999	0,01934	627,693	120.500,62
0,01	3,0581	0,990	0,06033	622,100	1.183.626,52
0,1	30,581	0,909	0,16785	571,201	9.978.656,32
0,2	61,162	0,833	0,20833	523,601	16.769.686,31
0,3	91,743	0,769	0,22629	483,324	21.433.445,22
0,4	122,324	0,714	0,23380	448,801	24.641.171,72
0,5	152,905	0,667	0,23570	418,881	26.831.498,09
0,6	183,486	0,625	0,23438	392,701	28.298.845,65
0,7	214,067	0,588	0,23115	369,601	29.245.404,50
0,8	244,648	0,556	0,22680	349,067	29.812.775,66
0,9	275,229	0,526	0,22182	330,695	30.101.819,19
1	305,81	0,500	0,21651	314,161	30.185.435,36

Fonte: Autoria Própria

A partir desses resultados foi possível então plotar os gráficos referentes as amplitudes dos sistemas para cada combinação de parâmetros ótimos do absorvedor. A seguir estão os gráficos obtidos no MATLAB:

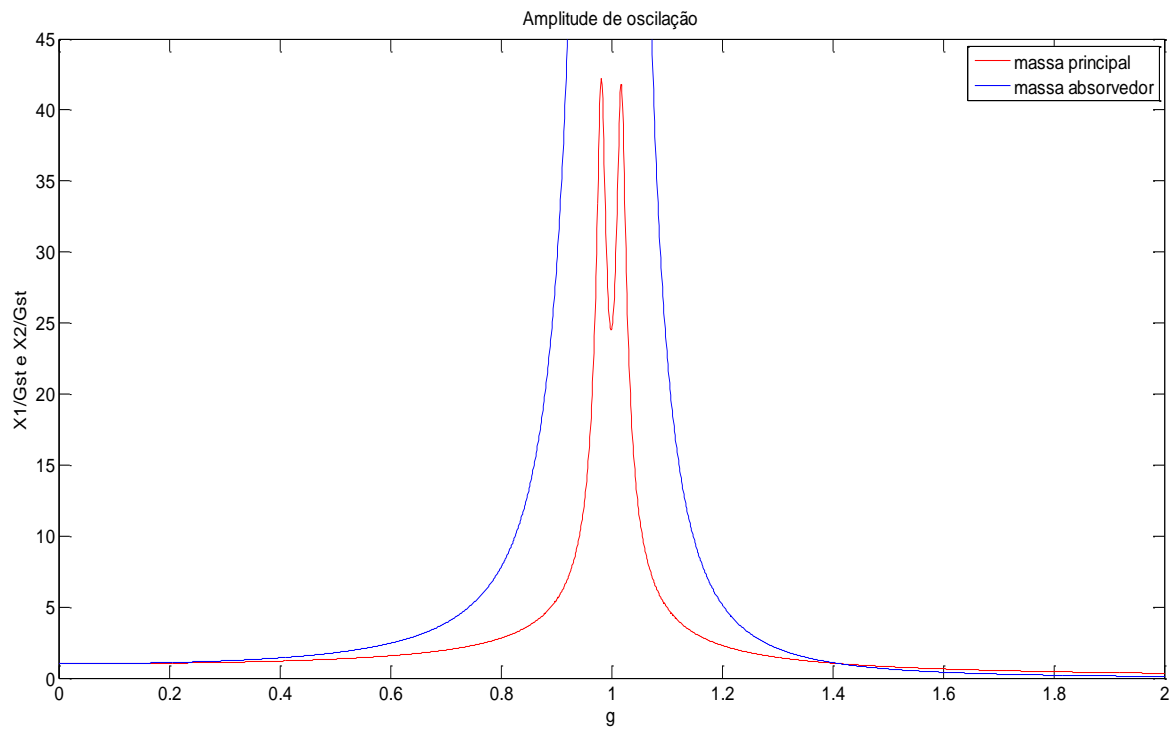
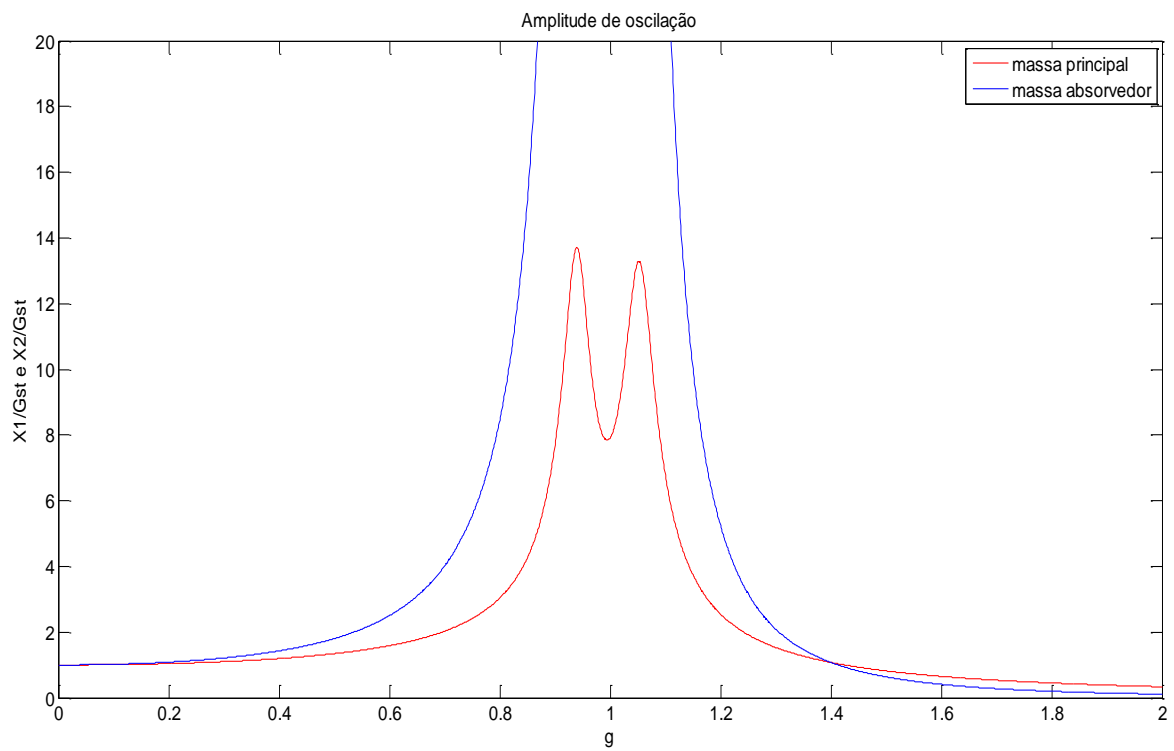
Figura 22 - Amplitude do sistema amortecido no domínio da frequência para $\mu = 0,001$ **Figura 23 - Amplitude do sistema amortecido no domínio da frequência para $\mu = 0,01$** 

Figura 24 - Amplitude do sistema amortecido no domínio da frequência para $\mu = 0,1$

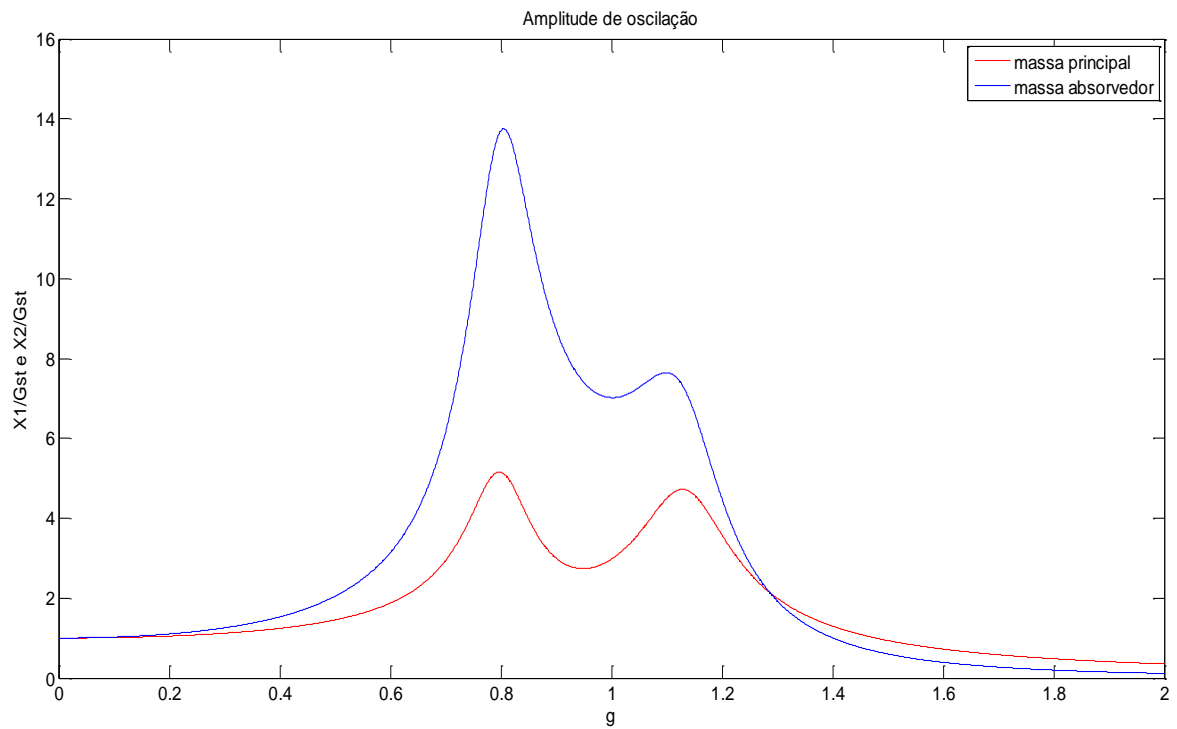


Figura 25 - Amplitude do sistema amortecido no domínio da frequência para $\mu = 0,2$

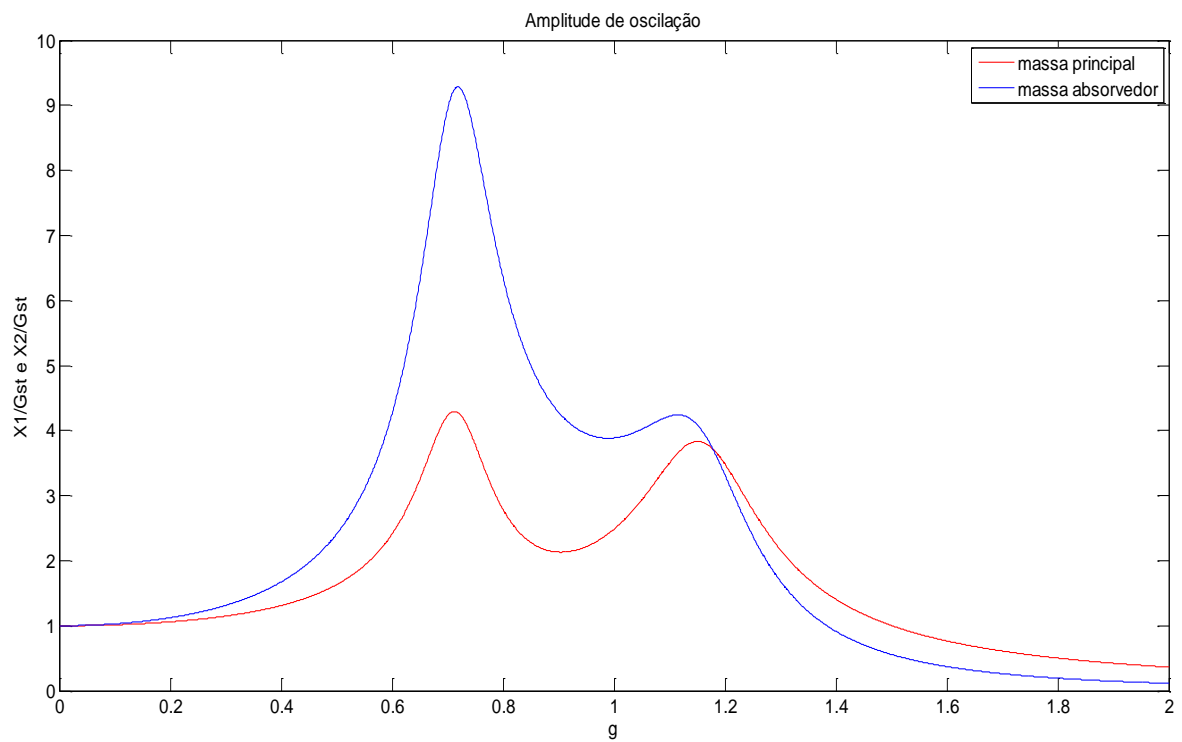


Figura 26 - Amplitude do sistema amortecido no domínio da frequência para $\mu = 0,3$

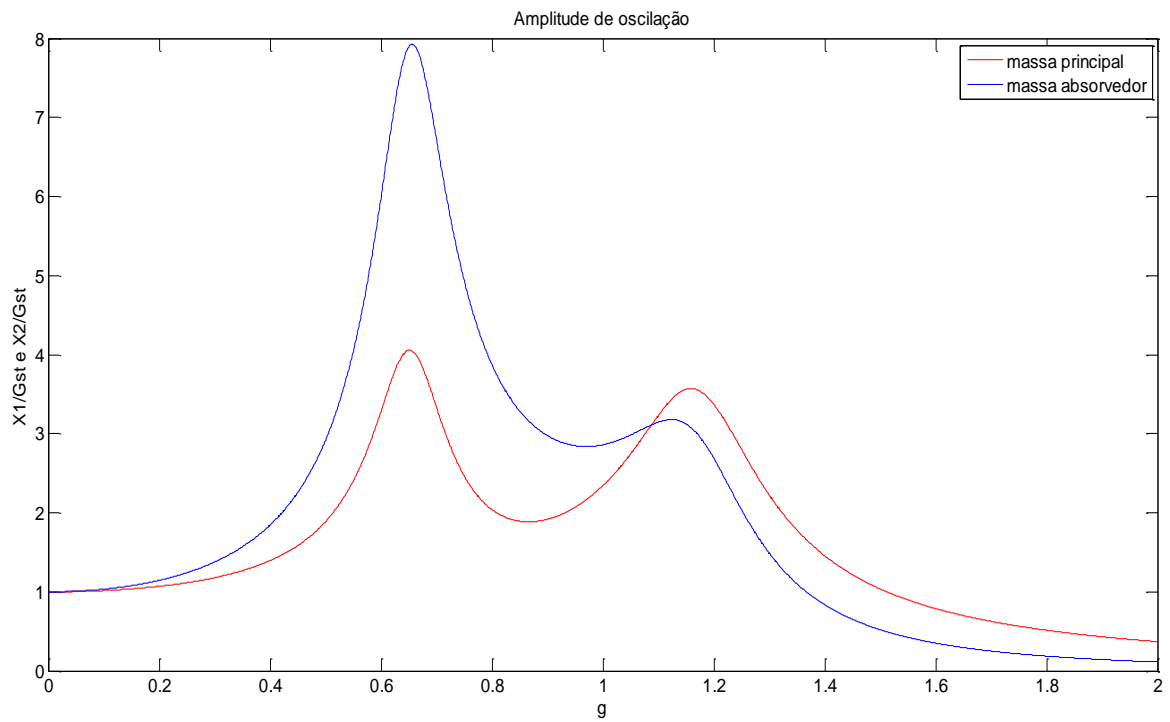


Figura 27 - Amplitude do sistema amortecido no domínio da frequência para $\mu = 0,4$

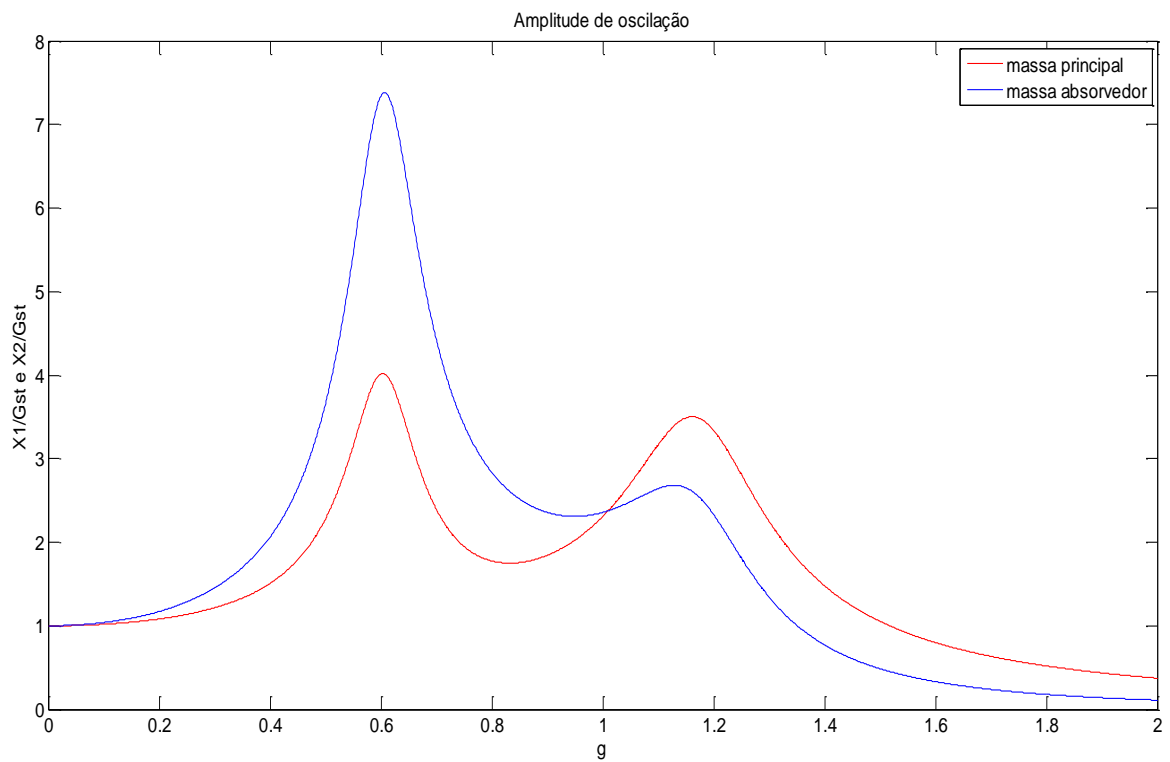


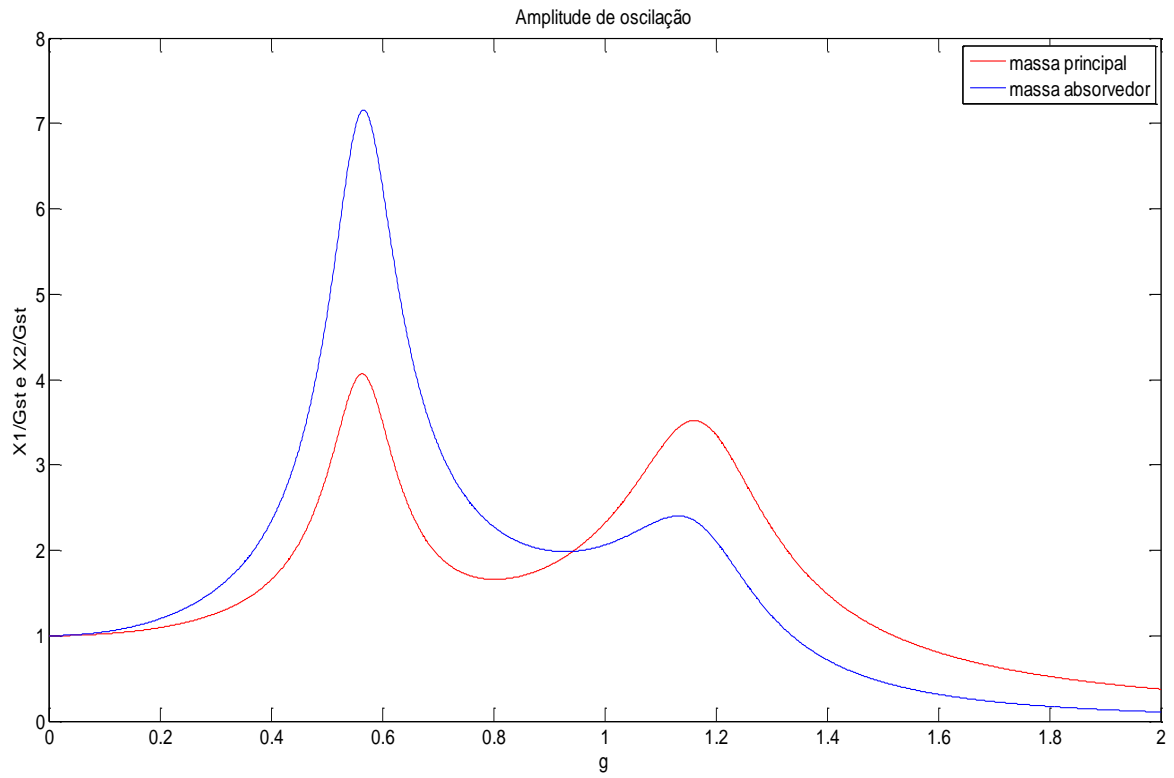
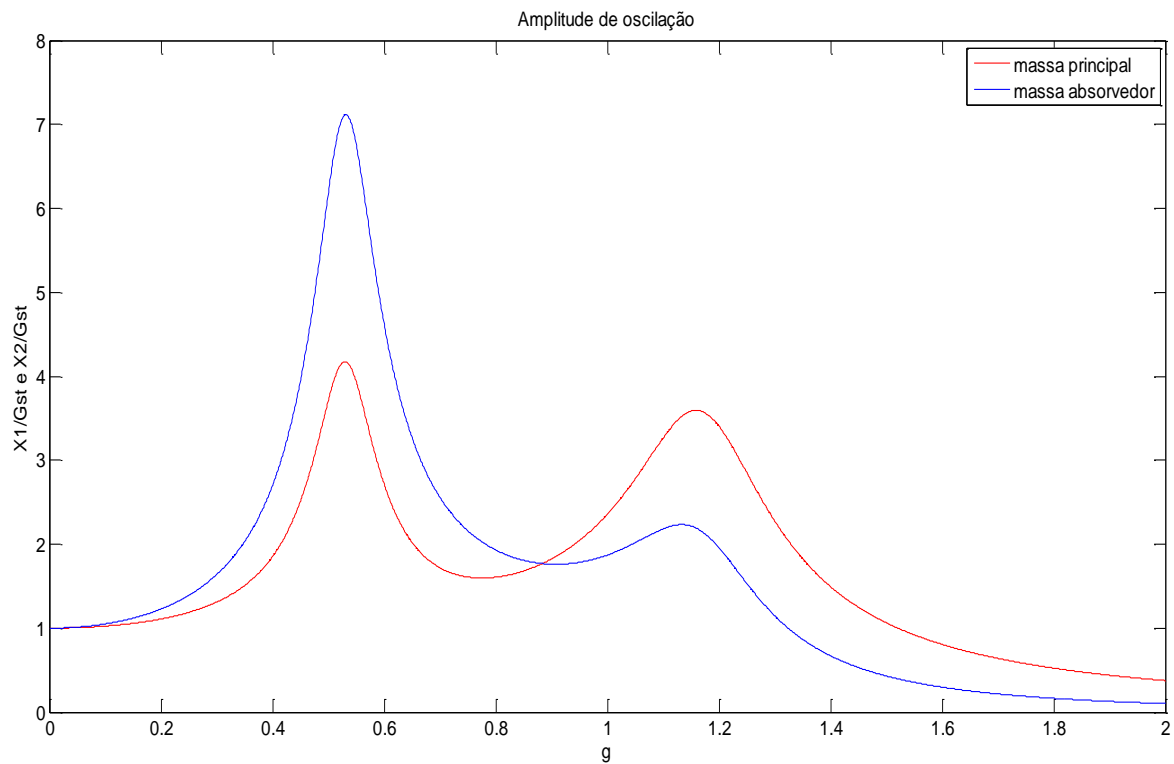
Figura 28 - Amplitude do sistema amortecido no domínio da frequência para $\mu = 0,5$ **Figura 29 - Amplitude do sistema amortecido no domínio da frequência para $\mu = 0,6$** 

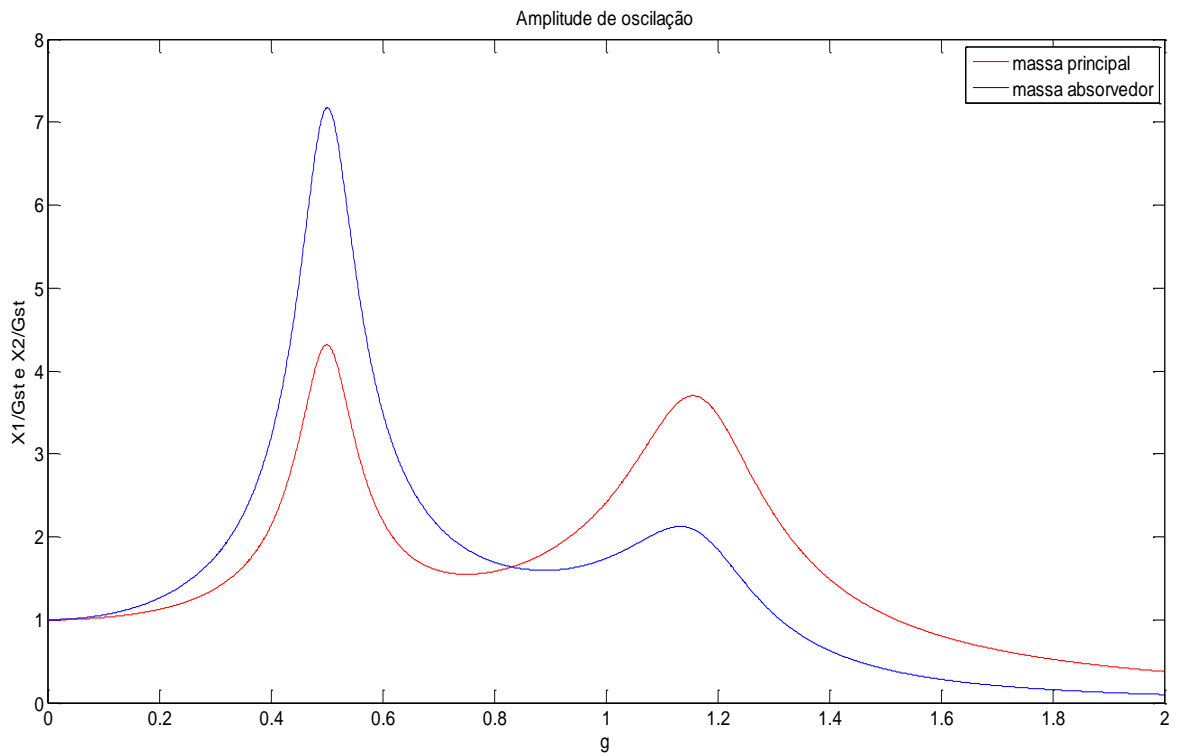
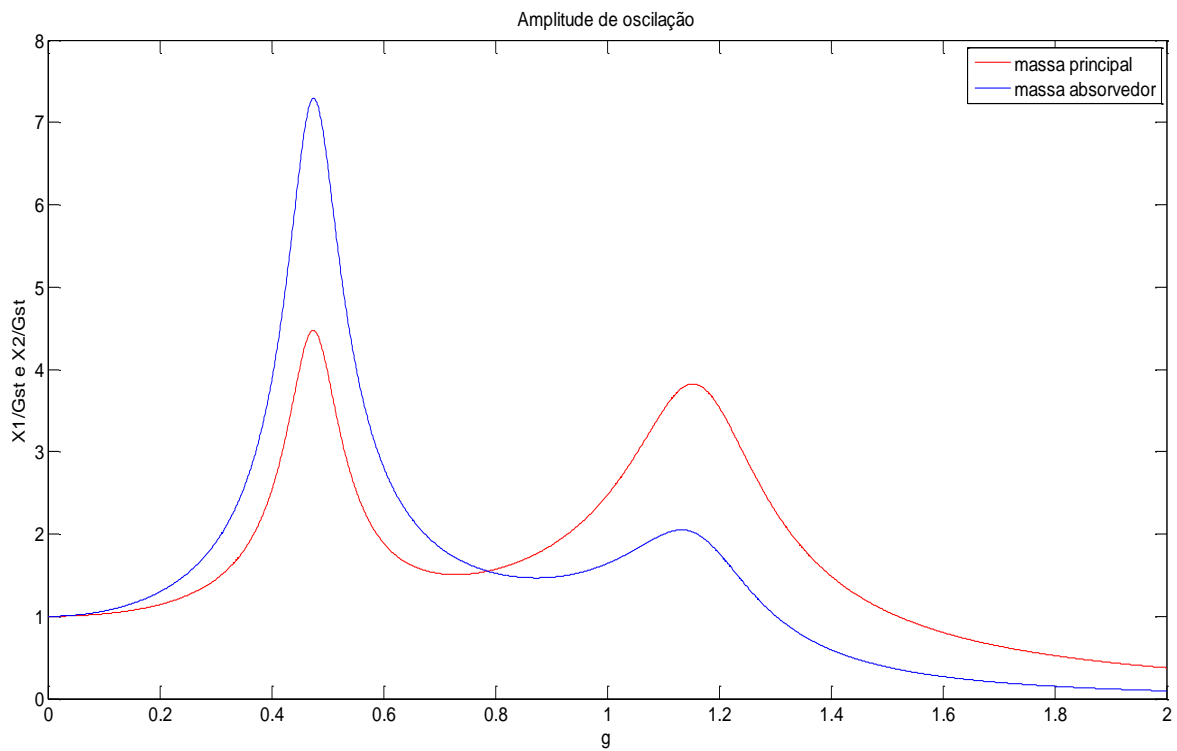
Figura 30 - Amplitude do sistema amortecido no domínio da frequência para $\mu = 0,7$ **Figura 31 - Amplitude do sistema amortecido no domínio da frequência para $\mu = 0,8$** 

Figura 32 - Amplitude do sistema amortecido no domínio da frequência para $\mu = 0,9$

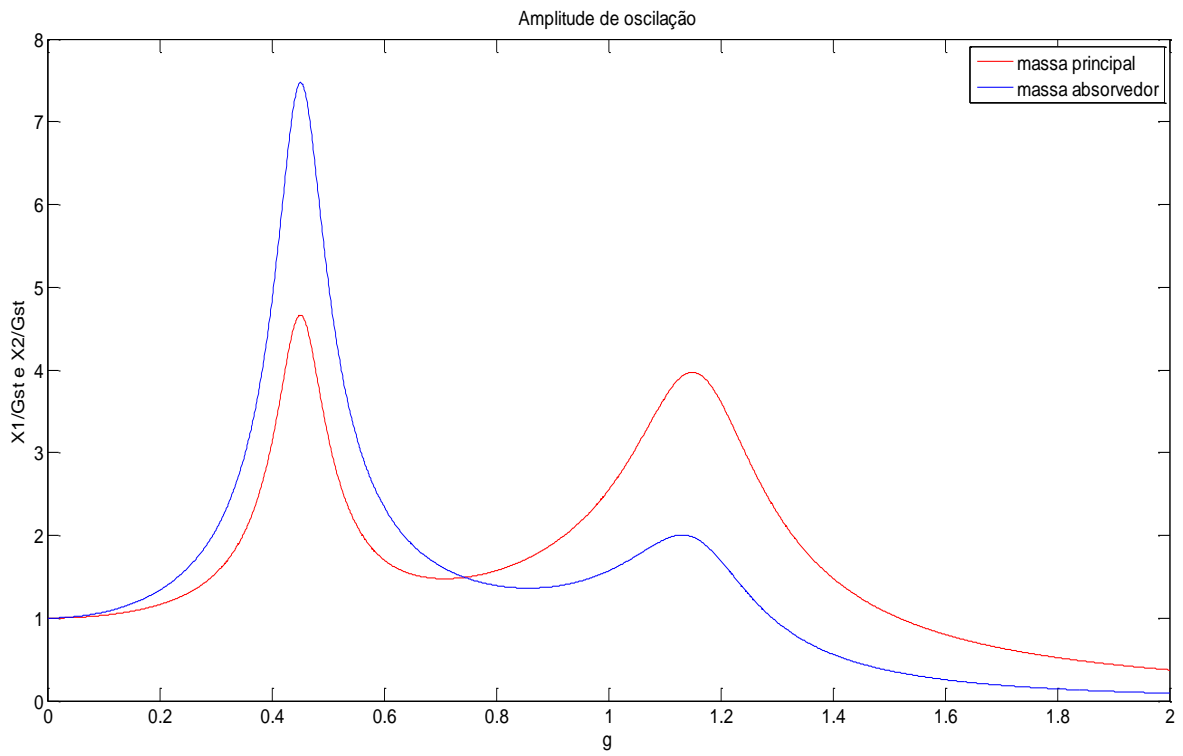
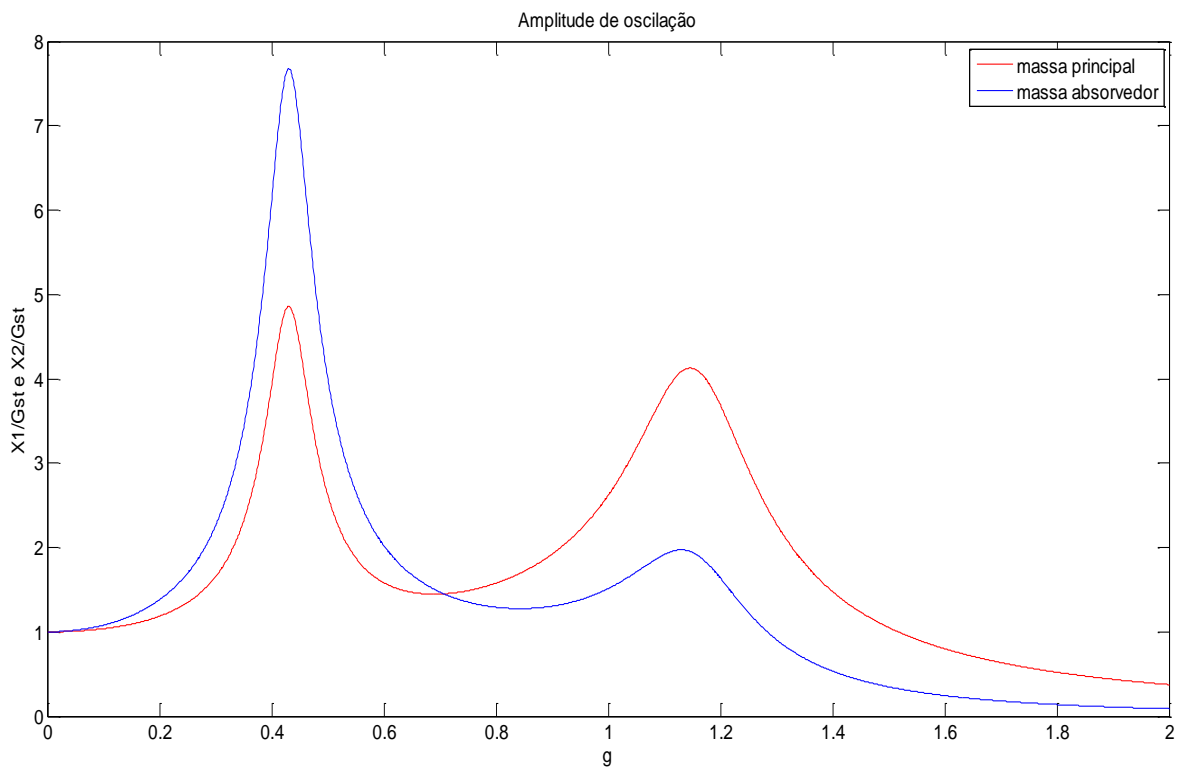


Figura 33 - Amplitude do sistema amortecido no domínio da frequência para $\mu = 1,0$



As amplitudes encontradas podem ser vistas na tabela 9:

Tabela 9 - Valores das amplitudes das massas principal e secundária para diferentes razões de massa

	$\mu = 0,001$		$\mu = 0,01$		$\mu = 0,1$		$\mu = 0,2$		$\mu = 0,3$		$\mu = 0,4$	
	1º pico	2º pico	1º pico	2º pico	1º pico	2º pico	1º pico	2º pico	1º pico	2º pico	1º pico	2º pico
X_1/δ_{st}	42,22	41,76	13,71	13,29	5,164	4,724	4,294	3,834	4,056	3,57	4,017	3,502
X_2/δ_{st}	844	792,6	92,37	75,61	13,75	7,646	9,284	4,242	7,928	3,179	7,379	2,681
	$\mu = 0,5$		$\mu = 0,6$		$\mu = 0,7$		$\mu = 0,8$		$\mu = 0,9$		$\mu = 1,0$	
	1º pico	2º pico	1º pico	2º pico	1º pico	2º pico	1º pico	2º pico	1º pico	2º pico	1º pico	2º pico
X_1/δ_{st}	4,066	3,519	4,174	3,595	4,316	3,701	4,473	3,822	4,664	3,973	4,857	4,126
X_2/δ_{st}	7,158	2,402	7,116	2,234	7,176	2,125	7,294	2,051	7,474	2,005	7,676	1,972

Fonte: Autoria Própria

Como pode ser observado na tabela 9, a amplitude da massa principal diminui conforme a razão de massa aumenta até $\mu = 0,4$ e depois volta a aumentar. Apesar de não ser um aumento tão significativo e ainda acontecer a diminuição da amplitude do absorvedor, não é interessante utilizar os parâmetros obtidos para o valor de $\mu = 0,5$ em diante para o projeto do ADV amortecido, não só pelo fato de que a massa do absorvedor aumenta, dificultando a implantação do absorvedor no sistema devido ao seu peso e tamanho, mas também com o aumento da amplitude da massa primária perde-se o objetivo da utilização do ADV, que é a redução da amplitude do sistema primário.

Um outro fator que também é interessante de observar, é a diferença da altura entre os picos de amplitude do sistema principal com a utilização de um absorvedor dinâmico de vibrações amortecido. Esses dados estão apresentados na tabela 10:

Tabela 10 - Diferença da altura entre os picos de amplitude da massa principal

	$\mu = 0,001$	$\mu = 0,01$	$\mu = 0,1$	$\mu = 0,2$	$\mu = 0,3$	$\mu = 0,4$
Diferença de altura entre picos	0,46	0,42	0,44	0,46	0,486	0,515
	$\mu = 0,5$	$\mu = 0,6$	$\mu = 0,7$	$\mu = 0,8$	$\mu = 0,9$	$\mu = 1,0$
Diferença de altura entre picos	0,547	0,579	0,615	0,651	0,691	0,731

Fonte: Autoria Própria

Como já foi dito anteriormente, no processo de otimização dos parâmetros do ADV, deseja-se uma resposta do sistema que gere picos de amplitude com alturas mais próximas possíveis e com inclinação mais suave. Ao analisar a tabela 9 e 10, é visto que pelo critério dos picos iguais e pelos valores das amplitudes, tanto da massa principal como da massa secundária, os melhores parâmetros obtidos foram para os valores de $\mu = 0,1$; $\mu = 0,2$; $\mu = 0,3$ e $\mu = 0,4$.

5 CONCLUSÃO

Ao analisar os resultados obtidos para o absorvedor não amortecido e o do absorvedor amortecido, algumas diferenças foram encontradas. Para o projeto de um ADV não amortecido, conclui-se que os melhores resultados obtidos em relação a banda de redução da amplitude de vibração foram para valores de $\mu < 0,2$, pois para valores maiores além de aumentar as tensões de fadiga na mola do absorvedor, com o aumento da massa fica mais difícil de posicionar o ADV na estrutura principal e também pode ser que um aumento significativo do peso no sistema principal não viável para o projeto. Já para os absorvedores dinâmicos de vibrações amortecidos, os melhores valores de projeto otimizado foram obtidos para razões de massa entre $\mu = 0,1$ e $\mu = 0,4$, pois para esses valores existe uma boa redução de amplitude nas frequências naturais do sistema com dois graus de liberdade sem um acréscimo grande de massa no sistema. Também, para valores de $\mu \geq 0,5$ as amplitudes voltam a aumentar e, portanto, esses parâmetros devem ser evitados para o projeto ótimo de um ADV amortecido. Porém existe a exceção de haver a necessidade de reduzir a amplitude do absorvedor, que assim como no projeto de um ADV não amortecido, quanto maior a razão de massas menor é a amplitude da massa auxiliar e então algum daqueles parâmetros pode ser interessante para o projeto.

Para finalizar, vale lembrar que os ADVs não amortecidos e os ADVs amortecidos possuem vantagens e desvantagens, portanto para cada aplicação um deles será mais adequado que o outro. Por exemplo, se não houver variação na frequência de excitação do sistema ou se essa frequência variar em uma banda estreita, deve-se usar um ADV não amortecido. Os absorvedores amortecidos devem ser utilizados apenas em casos que o ADV não consiga reduzir a vibração para a banda de operação do sistema, porque com a utilização de um ADV amortecido a amplitude de vibração da massa principal na frequência de ressonância será baixa, mas nunca vai ser nula, que seria o objetivo principal da utilização de um absorvedor dinâmico de vibrações.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, R. A. A. **ANÁLISE DA REDUÇÃO DE VIBRAÇÕES EM SISTEMAS MECÂNICOS UTILIZANDO LIGAS COM MEMÓRIA DE FORMA**. 2011. 139f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

Balachandran, Balakumar et al. **Vibrações**. 2ªed. Cengage Learning. 2009.

COSSOLINO, L. C.; PEREIRA, A. H. A. Amortecimento: classificação e métodos de determinação. **Universidade de São Carlos**, 2010.

CUNHA JR, S. S. **Estudo teórico e Numérico de Absorvedores Dinâmicos de Vibrações**. 1999. 144 f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, 1999.

DEN HARTOG, J. P. **Mechanical Vibrations**. 4ª ed. McGraw-Hill, NY. 1956.

DEN HARTOG, Jacob Pieter. **Vibrações nos sistemas mecânicos: Mauro Ormeu Cardoso Amorelli**. Editora Edgard Blücher Ltda, 1972.

DÍAZ, Y. A. M. **Um Estudo dos Absorvedores Dinâmicos de Vibrações Multimodais**. 2014. 113 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2014.

Marques, Rodrigo. **ESTUDO TEÓRICO E NUMÉRICO DE ABSORVEDORES DINÂMICOS DE VIBRAÇÕES ATIVOS E ADAPTATIVOS**. 2000. 106 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2000.

Méndez, Y. A. **Um Estudo dos Absorvedores Dinâmicos de Vibrações Multimodais**. 2014. 94 f. Dissertação (Pós-Graduação em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2014.

RAO, S. S. **Vibrações Mecânicas**. 5ªed. Prentice Hall. 2011.

SANTOS, A. S. **ESTUDO DE VIBRAÇÕES EÓLICAS EM LINHAS DE TRANSMISSÃO DE ENERGIA ELÉTRICA DE ALTA TENSÃO**. 2008. 195 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2008.

SILVA, Samuel da. **Vibrações Mecânicas. Notas de aula-2º Versão. Universidade do Oeste do Paraná. Foz do Iguaçu-PR**, 2009.

SILVA, R. M da; BECK, J. C. P. **Introdução à engenharia das vibrações**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2012.

SILVA, C. T. **Projeto e Localização Ótimos de Sistemas de Neutralizadores Dinâmicos Visco elásticos Usando Algoritmos Genéticos**. 2005. 155 f. Dissertação de Mestrado em Engenharia da Manufatura, Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

THÖLKEN, Denise. **Efeito da rigidez de pilar parede no comportamento sísmico de edifício de concreto armado**. 2013. 135 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2013.