

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ**  
**COORDENAÇÃO DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**EDUARDO JORGE DE PAULA LEÃO**

**ESTUDO DA FLAMBAGEM PARA PERFIS ESTRUTURAIS USANDO A ANÁLISE  
ANALÍTICA E O MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS**

**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**

**PATO BRANCO**

**2017**

**EDUARDO JORGE DE PAULA LEÃO**

**ESTUDO DA FLAMBAGEM PARA PERFIS ESTRUTURAIS USANDO A  
ANÁLISE ANALÍTICA E O MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS**

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação, apresentado à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2, do Curso de Engenharia Mecânica da Coordenação de Engenharia Mecânica – COEM – da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, Câmpus Pato Branco, como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro.

Orientador: Prof. Dr. Diego Rizzotto Rossetto

**PATO BRANCO**

**2017**

## FOLHA DE APROVAÇÃO

### ESTUDO DA FLAMBAGEM DE PERFIS ESTRUTURAIS USANDO A ANÁLISE ANALÍTICA E O MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS

Eduardo Jorge de Paula Leão

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado no dia 14/11/2017 como requisito parcial para a obtenção do Título de Engenheiro Mecânico, do curso de Engenharia Mecânica do Departamento Acadêmico de Mecânica (DAMEC) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Câmpus Pato Branco (UTFPR-PB). O candidato foi arguido pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora julgou o trabalho **APROVADO**.

---

Prof. Dr. Robson Gonçalves Trentin  
(UTFPR)

---

Prof. MsC. Roberto Nunes da Costa  
(UTFPR)

---

Prof. Dr. Diego Rizzotto Rossetto  
(UTFPR)  
Orientador

---

Prof. Dr. Bruno Bellini Medeiros  
Responsável pelo TCC do Curso de Eng. Mecânica

## DEDICATÓRIA

*Dedico este trabalho de conclusão de curso á meus pais e irmão, por toda amor e dedicação e também a meus amigos pela ajuda e todos esses anos de suporte, passando por dificuldades semelhantes, porém nunca desistindo.*

## **AGRADECIMENTOS**

Gostaria de agradecer principalmente a meus pais que foram meu suporte mais forte, me incentivando a nunca desistir e sempre correr atrás do que almejo.

As grandes amizades que fiz durante esses anos na faculdade. Como todos tinham um sonho em comum e passaram por dificuldades semelhantes no decorrer do curso, isso me ajudou com que influenciasse a termina-lo.

Aos amigos da república e outras amizades como o Luiz Afonso(Paranaíba), Guilherme(Nikito), Douglas, Crystian, Alessandro, Dhonathan, André, Matheus, Taislaine entre tantos outros agradeço pelas conversas sérias e outras jogadas fora, churrascos, rolês, e apoio que tive nas horas de necessidade.

Agradeço também pela ajuda e orientação do meu orientador Diego Rizzoto Rossetto com o qual não poderia ter terminado este trabalho.

Obrigado pelos docentes da UTFPR pelo esforço e contribuição por auxiliar na construção dos meus conhecimentos na engenharia.

Aos membros da banca, pela disposição e colaboração na conclusão deste trabalho.

A todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

## EPÍGRAFE

*Empty your mind. Be formless, shapeless, like water. Put water into a cup, it becomes the cup. Put water into a teapot, it becomes the teapot. Water can flow or creep or drip or crash. Be water, my friend (LEE, Bruce ,1965).*

Esvazie sua mente. Seja amorfo, não tenha forma, como a água. Ponha água em um copo, ela se torna o copo. Ponha água em uma chaleira, ela se torna a chaleira. Água pode fluir, ou deformar, ou gotejar, ou destruir. Seja água meu amigo (LEE, Bruce, 1965).

## RESUMO

LEÃO, Eduardo Jorge de Paula. **Estudo da flambagem de perfis estruturais usando a análise analítica e o método de elementos finitos**. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2017.

Este trabalho apresenta uma abordagem teórico-conceitual para estudar diferentes tipos de vigas sobre o efeito da flambagem global em um carregamento puramente compressivo, levando em consideração cálculos estruturais dentro do regime elástico do material e por simulação computacional. O estudo é baseado principalmente na norma brasileira NBR 8800:2008 que tem como objetivo verificar a sollicitação resistente de cada barra para diferentes perfis estruturais, obter as forças críticas de flambagem por flexão, torção e flexo-torção e as tensões admissíveis, para ser possível a constatação do modo preferencial de flambagem que cada viga irá possuir. Analisando pelo Método de Elementos Finitos (MEF) e conferindo os modos de flambagem através do *software* Ansys Inc. e as cargas que dão início a instabilidade estrutural por flambagem. Nos resultados é visto que para barras curtas é obtido um comportamento já esperado mais aceitável do que para barras compridas. Sendo discutido esses resultados pelo fato de ser usado um método simples no trabalho, não analisando a variação da tensão de elasticidade do material.

**Palavras-chave:** Instabilidade estrutural

## ABSTRACT

LEÃO, Eduardo Jorge de Paula. **Study of buckling of structural forms using analytical analysis and the finite element method.** Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2017.

This work presents a theoretical-conceptual approach to study different types of beams on the effect of global buckling on a purely compressive load, taking into account structural calculations within the elastic regime of the material and by computational simulation. The study is based mainly on the Brazilian standard NBR 8800: 2008, which aims to verify the resistant application of each bar for different structural forms, to obtain the critical forces of buckling by bending, twisting and union of boths and the permissible tensions, in order to be possible finding of the preferred mode of buckling that each beam will possess. Analyzing by the Finite Element Method (FEM) and checking the buckling modes through Ansys Inc. software and loads that initiate structural buckling instability. In the results it is seen that for short bars an expected behavior is more acceptable than for long bars. These results are discussed by the fact that a simple method is used in the work, not analyzing the variation of the elastic tension of the material.

**Keywords:** Structural Instability

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – VIGA DE SEÇÃO SIMPLES .....	17
FIGURA 2 - VIGA DE PERFIL W E SUAS VARIÁVEIS EM RELAÇÃO A MESA E ALMA .....	21
FIGURA 3 - TIPOS USUAIS DE PERFIS.....	21
FIGURA 4 - A TEORIA DA ESTABILIDADE .....	23
FIGURA 5 - COMPORTAMENTO DE VIGAS COM DIFERENTES SEÇÕES.....	25
FIGURA 6 - BARRA DE PERFIL I TORCIONADA .....	29
FIGURA 7 - FLUXOGRAMA DA ANÁLISE ANALÍTICA .....	31
FIGURA 8 - FLAMBAGEM ELÁSTICA E INELÁSTICA.....	33
FIGURA 9 - FUNÇÕES SEMI-EMPÍRICAS DE FLAMBAGEM.....	34
FIGURA 10 - TENSÃO CRÍTICA PARA VÁRIAS SEÇÕES. ....	35
FIGURA 11 - DOMÍNIO DIVIDIDO POR ELEMENTO TRIANGULARES. ....	37
FIGURA 12 - EVOLUÇÃO DOS PRINCIPAIS MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS.....	38
FIGURA 13 - ELEMENTO MOLLA COMPOSTO POR DOIS NÓS. ....	41
FIGURA 14 - DIVISÃO DE UM DOMÍNIO POR VÁRIOS ELEMENTOS DIFERENTES. ....	43
FIGURA 15 - SUPERPOSIÇÃO DAS RIGIDEZES LOCAIS EM UMA MATRIZ GLOBAL. ....	43
FIGURA 16 - SISTEMA GLOBAL.....	44
FIGURA 17 - ELEMENTOS TRIÂNGULOS E QUADRILÁTEROS.....	46
FIGURA 18 - ELEMENTOS TRIDIMENSIONAIS.....	46
FIGURA 19 - ELEMENTOS COM ÂNGULOS AGUDOS OU OBTUSOS. ....	47
FIGURA 20- PRIMEIRO PERFIL ESTRUTURAL W 150 X 37,1.....	52
FIGURA 21 - SEGUNDO PERFIL ESTRUTURAL QUADRICULAR VAZADO.....	53
FIGURA 22 - TERCEIRO PERFIL ESTRUTURAL CIRCULAR VAZADO. ....	54
FIGURA 23- QUARTO PERFIL ESTRUTURAL U. ....	56
FIGURA 24 - QUINTO PERFIL ESTRUTURAL Z.....	57
FIGURA 25 - CURVA DE TENSÃO ADMISSÍVEL PARA FLAMBAGEM. ....	60
FIGURA 26 - RELAÇÃO DO FATOR DE SEGURANÇA E O ÍNDICE DE ESBELTEZ.....	61
FIGURA 27 - BARRAS DE PERFIL W 150 X 37,1. ....	66
FIGURA 28 - BARRAS DE PERFIL QUADRADA. ....	67
FIGURA 29 - BARRAS DE PERFIL CIRCULAR VAZADAS.....	68
FIGURA 30 - BARRAS DE PERFIL U.....	69
FIGURA 31 - BARRAS DE PERFIL Z. ....	70
FIGURA 32 - PERFIL W DE COMPRIMENTO 7,5 METROS. ....	71
FIGURA 33 - PERFIL W DE COMPRIMENTO 4,5 METROS. ....	72
FIGURA 34 - PERFIL W DE COMPRIMENTO 3,5 METROS. ....	73
FIGURA 35 - PERFIL QUADRADO DE COMPRIMENTO 23 METROS. ....	74
FIGURA 36 - PERFIL QUADRADO DE COMPRIMENTO 15 METROS. ....	74
FIGURA 37 - PERFIL QUADRADO DE COMPRIMENTO 11 METROS. ....	76
FIGURA 38 - BARRA CIRCULAR DE COMPRIMENTO 2,1 METROS. ....	77
FIGURA 39 - BARRA CIRCULAR DE COMPRIMENTO 1,3 METROS. ....	77
FIGURA 40 - BARRA CIRCULAR DE COMPRIMENTO 1 METRO. ....	79
FIGURA 41 - BARRA DE PERFIL COM COMPRIMENTO 1,5 METROS.....	80

FIGURA 42 - BARRA DE PERFIL U COM TAMANHO DE 1 METRO.....	81
FIGURA 43 - PERFIL ESTRUTURAL U DE TAMANHO 0,8 METROS.....	81
FIGURA 44 - PERFIL ESTRUTURAL Z DE TAMANHO 6,6 METROS. ....	83
FIGURA 45 - PERFIL ESTRUTURAL Z DE TAMANHO IGUAL A 4,2 METROS. ....	84
FIGURA 46 - PERFIL ESTRUTURAL Z COM TAMANHO 3,1 METROS.....	84
FIGURA 47 - 1° MODO DE FLAMBAGEM PARA BARRA W DE 7,5 METROS.....	101
FIGURA 48 - 2° MODO DE FLAMBAGEM DA BARRA W DE 7,5 METROS.....	102
FIGURA 49 - 1° MODO DE FLAMBAGEM PARA BARRA W DE 4,5 METROS.....	103
FIGURA 50 - 2° MODO DE FLAMBAGEM DA BARRA W DE 4,5 METROS.....	104
FIGURA 51 - 3° MODO DE FLAMBAGEM PARA BARRA W DE 4,5 METROS. ....	105
FIGURA 52 - 1° MODO DE FLAMBAGEM PARA VIGA W DE 3,5 METROS.....	106
FIGURA 53 - 2° MODO DE FLAMBAGEM PARA VIGA W DE 3,5 METROS.....	107
FIGURA 54 - 3° MODO DE FLAMBAGEM PARA VIGA W DE 3,5 METROS.....	108
FIGURA 55 - 1° MODO DE FLAMBAGEM PARA VIGA QUADRADA DE 23 METROS. ....	109
FIGURA 56 - 1° MODO DE FLAMBAGEM PARA VIGA QUADRADA DE 15 METROS. ....	110
FIGURA 57 - 2° MODO DE FLAMBAGEM PARA VIGA QUADRADA DE 15 METROS. ....	111
FIGURA 58 - 1° MODO DE FLAMBAGEM PARA VIGA QUADRADA DE 11 METROS. ....	112
FIGURA 59 - 2° MODO DE FLAMBAGEM PARA VIGA QUADRADA DE 11 METROS. ....	113
FIGURA 60 - 3° MODO DE FLAMBAGEM PARA VIGA QUADRADA DE 11 METROS. ....	114
FIGURA 61 - 1° MODO DE FLAMBAGEM PARA VIGA CIRCULAR DE 2,1 METROS.....	115
FIGURA 62 - 1° MODO DE FLAMBAGEM PARA VIGA CIRCULAR DE 1,3 METROS.....	116
FIGURA 63 - 1° MODO DE FLAMBAGEM PARA VIGA CIRCULAR DE 1 METRO.....	117
FIGURA 64 - 1° MODO DE FLAMBAGEM PARA VIGA U DE 1,3 METROS.....	118
FIGURA 65 - 2° MODO DE FLAMBAGEM PARA VIGA U DE 1,3 METROS.....	119
FIGURA 66 - 3° MODO DE FLAMBAGEM PARA VIGA U DE 1,3 METROS.....	120
FIGURA 67 - 1° MODO DE FLAMBAGEM PARA VIGA U DE 1 METRO. ....	121
FIGURA 68 - 2° MODO DE FLAMBAR PARA VIGA U DE 1 METRO.....	122
FIGURA 69 - 1° MODO DE FLAMBAGEM PARA VIGA U DE 0,8 METROS.....	123
FIGURA 70 - 2° MODO DE FLAMBAGEM PARA VIGA U DE 0,8 METROS.....	124
FIGURA 71 - 1° MODO DE FLAMBAGEM PARA VIGA Z DE 6,6 METROS.....	125
FIGURA 72 - 2° MODO DE FLAMBAGEM PARA VIGA Z DE 6,6 METROS.....	126
FIGURA 73 - 1° MODO DE FLAMBAGEM PARA VIGA Z DE 4,2 METROS.....	127
FIGURA 74 - 2° MODO DE FLAMBAGEM PARA VIGA Z DE 4,2 METROS.....	128
FIGURA 75 - 1° MODO DE FLAMBAGEM PARA VIGA Z DE 3,1 METROS.....	129
FIGURA 76 - 3° MODO DE FLAMBAGEM PARA VIGA Z DE 3,1 METROS.....	130
FIGURA 77 - VALORES LIMITE DE B/T.....	131

## LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 - PRINCIPAIS VARIÁVEIS GEOMÉTRICAS.....	51
QUADRO 2 - MOMENTOS DE INÉRCIA E RAIOS DE GIRAÇÃO.....	51
QUADRO 3 - MEDIDAS DAS MESAS E ALMA.....	51
QUADRO 4 - PRINCIPAIS VARIÁVEIS GEOMÉTRICAS DO 2º PERFIL.....	53
QUADRO 5 - PRINCIPAIS VÁRIAVEIS GEOMETRICAS DO 3º PERFIL.....	54
QUADRO 6 - MOMENTOS DE INÉRCIA E RAIOS DE GIRAÇÃO.....	55
QUADRO 7- MOMENTOS DE INÉRCIA E RAIOS DE GIRAÇÃO. ....	57
QUADRO 8 - PRINCIPAIS VARIÁVEIS GEOMÉTRICAS.....	57

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - FLAMBAGEM LOCAL DAS BARRAS AXIALMENTE COMPRIMIDAS. ....	90
TABELA 2 - TENSÕES E FORÇAS ADMISSÍVEIS. ....	90
TABELA 3 - FORÇAS E TENSÕES DE FLAMBAGEM POR FLEXAO E TORÇÃO.....	91
TABELA 4 - SOLICITAÇÃO RESISTENTE A FLAMBAGEM POR COMPRESSÃO. ....	91
TABELA 5 - FLAMBAGEM LOCAL DAS BARRAS AXIALMENTE COMPRIMIDAS. ....	92
TABELA 6 - TENSÕES E FORÇAS ADMISSÍVEIS. ....	92
TABELA 7 - FORÇAS E TENSOES PARA FLAMBAGEM POR FLEXAO. ....	92
TABELA 8 - SOLICITAÇÃO RESISTENTE A FLAMBAGEM POR COMPRESSÃO. ....	93
TABELA 9 - FLAMBAGEM LOCAL DAS BARRAS. ....	94
TABELA 10 - TENSÕES E FORÇAS ADMISSÍVEIS. ....	94
TABELA 11 - FORÇAS E TENSÕES CRÍTICAS. ....	94
TABELA 12 - SOLICITAÇÃO RESISTENTE A FLAMBAGEM. ....	95
TABELA 13 - FLAMBAGEM LOCAL DAS BARRAS. ....	96
TABELA 14 - MEDIDAS GEOMÉTRICAS COMPLEMENTARES.....	96
TABELA 15 - BARICENTRO DA FIGURA COMPOSTA. ....	96
TABELA 16 - PRINCIPAIS VARIÁVEIS GEOMÉTRICAS. ....	97
TABELA 17 - TENSÕES ADMISSÍVEIS E FORÇAS CRÍTICAS. ....	97
TABELA 18 - FORÇAS E TENSÕES CRÍTICAS. ....	98
TABELA 19 - FORÇAS E TENSÕES CRÍTICAS PARA TORÇÃO E FLEXO-TORÇÃO.....	98
TABELA 20 - SOLICITAÇÃO RESISTENTE PARA FLAMBAGEM POR COMPRESSÃO. ....	98
TABELA 21 - TENSÕES ADMISSÍVEIS E FORÇAS CRÍTICAS. ....	99
TABELA 22 - FORÇAS E TENSÕES CRÍTICAS PARA FLAMBAGEM POR FLEXÃO. ....	99
TABELA 23 - FORÇAS E TENSOES PARA FLAMBAGEM POR TORÇAO E FLEXO-TORÇÃO. .	99
TABELA 24 - SOLICITAÇÃO RESISTENTE A FLAMBAGEM POR COMPRESSÃO. ....	100

## SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO .....	14
1.1 OBJETIVO GERAL .....	15
1.2 OBJETIVO ESPECÍFICOS.....	15
2 REFERENCIAL TEÓRICO .....	16
2.1 FLAMBAGEM.....	16
2.1.1 Equação de Euler .....	17
2.1.2 Modos de flambar.....	19
2.1.3 Conceitos Gerais.....	20
2.1.4 Flambagem Local e Global.....	25
2.1.5 Flambagem por flexão, torção e flexo-torção .....	28
2.1.6 Flambagem Inelástica .....	32
2.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	35
2.2.1 Método de Rayleigh-Ritz .....	39
2.2.2 Análise Estática Linear .....	40
2.2.3 Método do Autovalor .....	41
2.2.4 Tipos de Elementos.....	45
3 METODOLOGIA.....	49
3.1 ESTUDO DO PROBLEMA USANDO MÉTODO ANALÍTICO .....	49
3.1.1 Propriedades do material e dos perfis estruturais. ....	50
3.2 PROJETO DAS VIGAS PARA FLAMBAGEM ELÁSTICA OU INELÁSTICA.....	58
3.3 ESTUDO DO PROBLEMA USANDO MÉTODO COMPUTACIONAL .....	62
3.3.1 Características Adotadas Para o Funcionamento das Simulações. ....	63
4 RESULTADOS .....	65
4.1 ANÁLISE ANALÍTICA.....	65
4.1.1 Estudo analítico do perfil W150 X 37,1. ....	65
4.1.2 Estudo analítico do perfil quadricular vazado .....	67

4.1.3 Estudo analítico do perfil de geometria circular vazada. ....	68
4.1.4 Estudo analítico do perfil U.....	69
4.1.5 Estudo analítico do perfil Z.....	70
4.2 ANÁLISE COMPUTACIONAL.....	70
4.2.1 Estudo computacional do perfil estrutural W150x37,1. ....	71
4.2.2 Estudo computacional do perfil estrutural quadrado vazado. ....	74
4.2.3 Estudo computacional de barras circulares vazadas. ....	76
4.2.4 Estudo computacional de barras do perfil estrutural U.....	79
4.2.5 Estudo computacional de barras com perfil estrutural Z.....	82
5 CONCLUSÕES .....	86
REFERÊNCIAS.....	88
APÊNDICE A – Procedimentos de cálculos Analíticos para o Perfis Estrutural W150 X 37,1.....	90
APÊNDICE B – Procedimentos de Cálculos Analíticos para o Perfis Estrutural Quadrangular.....	92
APÊNDICE C – Procedimentos de Cálculos Analíticos para o Perfis Estrutural Circular.....	94
APÊNDICE D – Procedimentos de Cálculos Analíticos para o Perfis Estrutural L U. 96	
APÊNDICE E – Procedimentos de Cálculos Analíticos para o Perfis Estrutural Z. 99	
APÊNDICE F – Modos de Flambagem .....	101
ANEXOS .....	131

## 1 INTRODUÇÃO

Atualmente o tempo para desenvolver projetos dentro das empresas é muito curto, isso fez com que profissionais e estudantes de engenharia sejam mais organizados e separem melhor o que deveria ser feito, sendo mais dinâmicos, fazendo-os focar na obtenção de resultados precisos mais rapidamente.

Nos últimos anos a técnica de elementos finitos se demonstrou uma ferramenta muito poderosa para resolver problemas de engenharia. O fácil acesso a diferentes *softwares de engenharia* propiciou não somente um avanço muito grande dentro das empresas, mas também tornou dentro da prática de simulações o mal-uso das ferramentas. Sendo assim é muito importante fazer uma analogia de resultados em todas as áreas de engenharia, tentando fazer uma comparação entre resultados práticos e os obtidos em simulações.

Na área de resistência dos materiais, os cálculos dependem das propriedades intrínsecas do mesmo e do carregamento atuante, além do que sua geometria também influencia na distribuição de tensões internas dentro do material criando regiões preferenciais de deformação.

Um dos modos de falha que o material pode apresentar é a flambagem, o qual é uma instabilidade estrutural que o material pode apresentar devido a um carregamento compressivo para um perfil esbelto, tema do qual este escopo irá estudar. Como o método analítico é muito simples de fazer será feito um comparativo entre resultados analíticos e os obtidos por elementos finitos, pois existem resultados que para parte analítica ou ainda não é possível obter, ou tem grande dificuldade em relação ao outro método. Dada uma peça com alta esbeltez (comprida e com pequena espessura) ao sofrer tensões compressivas, é gerada em sua geometria deformações tão grandes que ocasionam uma instabilidade estrutural, ocasionando na ruína antes mesmo de alcançar o limite máximo que o material poderia aguentar.

A estrutura deste trabalho consiste, primeiramente, em entender os conceitos de flambagem e suas aplicações e do método de elementos finitos através da revisão bibliográfica. Em sequência, serão feitas análises comparativas, cujos resultados serão discutidos ao final do trabalho, elaborando-se as devidas conclusões.

## 1.1 OBJETIVO GERAL

Obtenção e comparação da tensão admissível para os perfis estruturais padronizados de seção quadrada e circular vazadas, perfil W do tipo I, U e Z, sujeitos a carregamento de compressão, utilizando método analítico e por elementos finitos verificando a flambagem por flexão, torção e flexo-torção.

## 1.2 OBJETIVO ESPECÍFICOS

- Seguindo a norma NBR 8800-2008 encontrar a resistência mecânica de cada barra, as quais foram adotados comprimentos variados seguindo a recomendação da norma para compressão, e verificar de forma analítica se terá flambagem local como também global em elementos estruturais, ou seja, verificar a deformação tanto na alma como também, se o elemento possuir, mesa superior e/ou inferior;
- Fazer análise estática em um *software* de elementos finitos com ênfase nos modos de flambagem do perfil estrutural com um carregamento compressivo;
- Comparação entre os resultados analíticos e os obtidos pelo *software*.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

O referencial bibliográfico será dividido em duas partes, uma composta pela contextualização dos mecanismos de falhas por flambagem, desde suas principais variáveis que interferem no dimensionamento das vigas tanto quanto os tipos diferentes de flambagem que podem ocorrer devido a diferentes carregamentos. E a outra parte mostrará as características básicas de uma ferramenta computacional muito utilizada hoje em dia na engenharia que é elementos finitos, como é estabelecido sua lógica por traz do método. E assim depois de introduzido os conceitos básicos será caracterizado na metodologia como proceder para encontrar as diferenças nos resultados analíticos e computacionais.

### 2.1 FLAMBAGEM

Este é o modo no qual um material pode sofrer deformação podendo levar até a sua ruptura através de um esforço de compressão, sem que a tensão necessariamente tenha atingido valores críticos de projeto. Existe muito estudos em várias áreas da engenharia levando em consideração as diferentes tensões que um material pode sofrer.

Para conseguirmos realizar a solução de problemas diferenciais em um domínio discreto, introduzindo os conceitos básicos de maneira geral do método de elementos finitos, onde se usa métodos numéricos de diferenças de variáveis atuantes no problema dividido em vários elementos na malha com valores iniciais e condições de contorno. A vibração de ressonância é um fator que pode levar a fratura de um sistema mecânico sobre o efeito de baixas ou altas tensões cíclicas com uma determinada frequência, muito estudado em componentes mecânicos.

A flambagem não é muito diferente, tanto em sofrer fratura por tensões abaixo do estipulado do projeto como tendo também vários modos de ocorrer, pois nosso sistema também pode sofrer vários modos de comportamento de sua

geometria, e assim como os modos de ressonância, podem ser descobertos através do método de elementos finitos.

Ocorre normalmente em peças esbeltas que sofrem grandes cargas de compressão. Pode ocorrer em diversas áreas da engenharia como para a automotiva em caso de bielas, e tuchos de válvulas do motor, na área mecânico estrutural como em silos de armazenamento o efeito *Elephant's foot buckling* ocorre normalmente em tanques de armazenamento (J.G. Teng, 2004) que é o afundamento de uma estrutura rígida o qual suporta um peso qualquer causando ondulações perpendiculares ao carregamento, e na área civil principalmente em pilares metálicos.

Resolvendo um problema de estática por exemplo, usamos variáveis vetoriais como força, deslocamentos e tensões. Seguindo este raciocínio para a resolução de problemas estáticos com foco na flambagem, iremos trazer como ferramentas para obter os resultados esperados o uso de análises analíticas e computacionais, para assim poder aferir suas diferenças nos resultados teóricos obtidos.

### 2.1.1 Equação de Euler

Criada por Euler a demonstração da formula no qual é apresentada por Hibbeler (2009) o qual representa um sistema estático definido por uma equação diferencial de segunda ordem, no qual para uma barra ideal biapoiada de comprimento  $l$  sofre um carregamento simples de flexão. Temos que para a figura 1 abaixo:

**Figura 1 – Viga de seção simples**



Fonte: Adaptado de P. WALTER (2009).

Uma simples equação diferencial 2.1 que modela bem o sistema dada por:

$$\frac{d^2v}{dx} = -\frac{M}{E*I} \quad (2.1)$$

Onde a equação diferencial de segunda ordem diz que uma força cortante “ $v$ ” diferenciada duas vezes em relação a variável “ $x$ ”, que em relação a qualquer posição do domínio avaliado  $0 < x < l$ , é igual a momento fletor  $M$  dividido pela tensão de escoamento  $E$ , e a variável “ $I$ ” que é o momento de inércia, garantindo a igualdade dos dois lados da equação, sendo que o momento também é dependente da posição  $x$  da barra, ou seja,  $M(x) = P(x) * v$ , onde  $P$  é carga axial em Newtons e  $v$  é a deflexão da viga em metros no sistema SI.

Sabendo que a solução de uma equação 2.2 de segunda ordem tem sua solução da forma.

$$v = C_1 * \cos\left(\sqrt{\frac{P}{E*I}} * x\right) + C_2 * \sin\left(\sqrt{\frac{P}{E*I}} * x\right) \quad (2.2)$$

Aplicando as condições de contorno da nossa barra. Para  $x = 0$ ,  $v = 0$ , e para  $x = l$ , para um carregando simples, o cortante é máximo na metade da barra e zero para os extremos, fazendo as substituições dos valores é obtido que:

$$0 = C_1 * \cos 0 + C_2 * \sin(0), \text{ para } x = 0.$$

E isolando  $C_1$  adquire o valor de  $C_1 = 0$ , substituindo na expressão 2.1  $C_1$  e aplicando a segunda condição de contorno  $C_2$  possui o seguinte valor:

$$0 = C_2 * \sin\left(\sqrt{\frac{P}{E*I}} * l\right) \quad (2.3)$$

Como se deseja a solução não-trivial. A equação acima só pode ser resolvida quando o seno é igual a zero. Portanto, para a família de valores onde:

$$\left( \sqrt{\frac{P}{E \cdot I}} * l \right) = n * \pi \quad (2.4)$$

Onde “  $n$  ” tem os valores inteiros de 1 até o infinito, porem para efeito de cálculo é normalmente avaliado somente para  $n=1$ . Elevando ao quadrado os dois lados da equação, e isolando a variável  $P$  da equação 2.4, fica da seguinte forma a força de flambagem:

$$P = \frac{n^2 * \pi^2 * E * I}{l^2} \quad (2.5)$$

Essa é a principal e mais simples equação para se encontrar a força axial de flambagem elástica em uma barra primeiramente desenvolvida por Euler (HIBBELER, 2004).

Em um exemplo didático é costumeiro idealizar o problema para deixar mais simples os cálculos e o entendimento, segundo Timoshenko (1961) a representação do nosso sistema só pode ser verdadeira se levado em consideração três suposições. A barra deve ser isenta de imperfeições ou tensões residuais (processo de fabricação), ou seja, material completamente homogêneo (barra ideal). Material de comportamento elástico, e carga perfeitamente centrada. O valor de  $n$  nos dá o modo do estado de equilíbrio do sistema. Dependendo de seu valor encontramos o esforço necessário para a barra sofrer o seu respectivo modo de flambar.

Esse valor é chamado de  $P_{crit}$  e é usado para encontrarmos a força crítica ao modo de flambar calculado. Dividindo pela área transversal da seção, e por um coeficiente de segurança é calculado de maneira muito simplista uma tensão segura para que o nosso material não sofra deformação excessiva a ponto de chegar na zona plástica e posteriormente sua ruptura.

### 2.1.2 Modos de flambar

É importante notar que flambagem e o método de elementos finitos se assemelham em alguns aspectos referente a vibração mecânica. Assim como

existem modos de vibração para um equipamento, o qual para efeito de projeto evita-se que o sistema opere em frequências de ressonância, devido ao aumento das amplitudes das cargas cíclicas (RAO,2008).

Para flambagem também existe diferentes modos de flambar para um perfil longo e delgado dependendo da carga que ele está suportando. Variando o valor de  $n$  segundo a equação 2.5 é possível encontrar várias forças diferentes para cada valor encontrando um dos modos de flambar do componente em compressão, podendo ela ser global ou local para o perfil, fazendo o perfil entrar em instabilidade devido a fatores de flexão, torção, flexo-torção, ou distorcional, entre outros (PFEIL, 2009). Porém é sabido que o mais importante para um projeto estrutural é que ele aguarde as menores tensões que podem surgir antes do seu escoamento em regime elástico (HIBBELER, 2009).

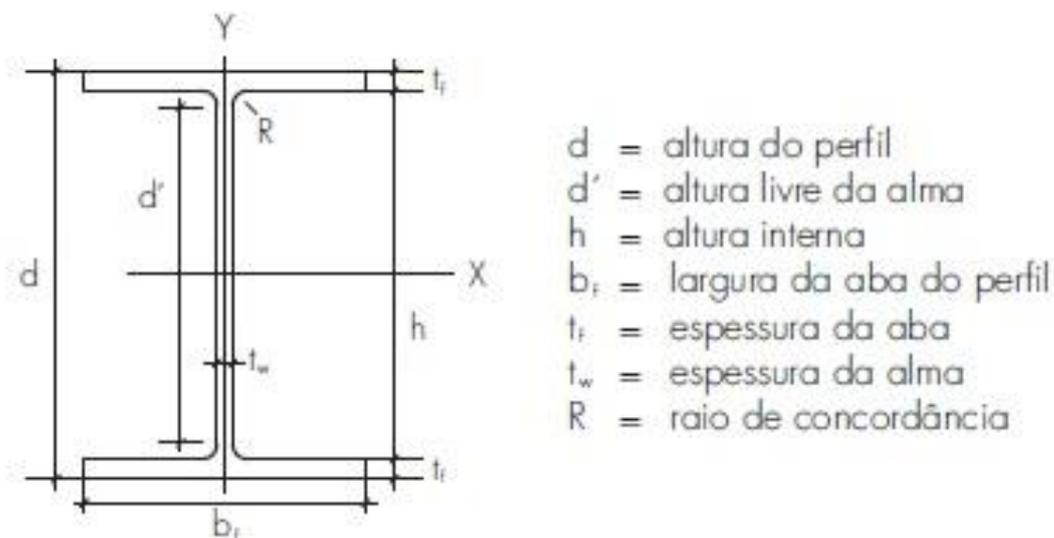
### 2.1.3 Conceitos Gerais

Como visto na seção 2.1.1, temos várias variáveis correlacionadas atuando no problema. Tanto as variáveis do carregamento, como para as variáveis intrínsecas à geometria da peça, e o material, influenciam muito no sistema, sendo necessário entender como se dá a estabilidade estrutural de uma barra é necessário analisar todos os fatores em conjunto.

Por exemplo para um carregamento simples, analisando a equação diferencial 2.12 as tensões de cisalhamento na barra que se encontra máxima nos apoios e o momento fletor que é máximo no meio da barra, mudando o material influenciaremos no quanto ele aguenta elasticamente, e mudando sua geometria, podemos mudar seu comprimento e sua seção transversal, fazendo com que ele fique mais robusto.

A geometria de um elemento estrutural é dividida geralmente em alma, e mesa. A alma é a parte correspondente à altura perfil metálico, e a parte inferior ou superior é o banzo, aba ou mais popularmente conhecido por mesa. Podendo este último ser laminado juntamente com a alma no processo de fabricação, ou soldado separadamente ao elemento principal. Na figura 2 logo abaixo é visto para um perfil do tipo W as principais medidas da alma e mesa, que é o comprimento e espessura de cada parte componente do perfil.

Figura 2 - Viga de perfil W e suas variáveis em relação a mesa e alma.

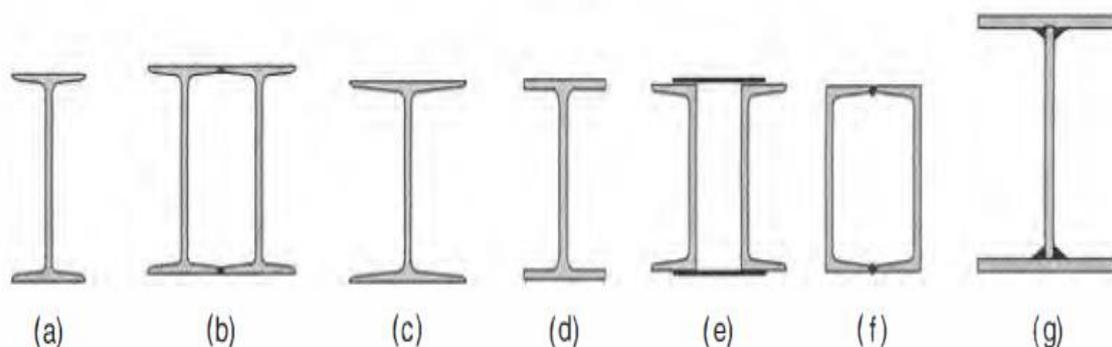


Fonte: Adaptado do catálogo comercial GERDAU.

Temos assim vários tipos de perfis, como os quadrados, redondos, as cantoneiras, e os perfis padronizados mais utilizados na construção civil, como os perfis T, W, Z, U entre outros.

É necessário analisar como se dá a composição estrutural do perfil, se ele possui mesa, se pode ocorrer deformação apenas na alma, ou na mesa, ou nas duas ao mesmo tempo podendo ter intensidades diferentes, isso é necessário pois assim pode-se averiguar qual será a região mais crítica. Na figura 3 abaixo é visto os alguns dos principais perfis mais usados em estruturas metálicas.

Figura 3 - Tipos usuais de perfis



Fonte: Adaptado de P. WALTER (2009).

No qual o perfil (a) é o perfil I simples, (b) I duplo, (c) perfil H, (d) perfil W, (e). Duplo U aberto, (f). Duplo U fechado, (g) Perfil Soldado. As chapas que constituem um perfil podem ter seção simples ou múltipla, esta última tendo as chapas justapostas ou afastadas ligadas por treliças (P. WALTER, 2009).

Desenvolvido primeiramente a equação 2.5 por Euler. Ela pode ser reescrita levando em consideração propriedades que podem ser vistas melhor observadas na figura 3, como a área da seção transversal é diferente dependendo do seu plano,  $x$  ou  $y$ , existe um fator chamado índice de esbeltez ( $\lambda$ ), o qual pode ser substituído na equação 2.5 deixando-a na forma:

$$P = \frac{\pi^2 * E * I}{\lambda^2} \quad (2.6)$$

Ele é igual a um fator de flambagem  $k$  vezes o comprimento destravado da barra  $L_x$  dividido pelo raio de giração  $r_x$  em relação ao mesmo eixo da seção (HIBBELER, 2009). Essa variável denota o quão difícil é ocorrer deformação na barra por forças flexo-compressivas, sendo que quanto maior seu valor mais facilmente a barra tende a flambar. Como podemos ver na equação (2.7) abaixo:

$$\lambda_x = \frac{k_x * L_x}{r_x} \quad (2.7)$$

O fator  $k$  é denominado como fator de comprimento efetivo, ele é definido dependendo da condição de contorno que se encontra nos engates da barra, se as restrições de deslocamento forem de primeira ordem ela terá uma das extremidades disponíveis para deslocamento sofrendo força no mesmo sentido, e se for de segundo gênero terá possibilidade de movimento tanto para o eixo  $x - x$  como o eixo  $y - y$ , sofrendo forças de reação nos dois sentidos, como também possuem rotação em torno de seu eixo  $z - z$ , já que não estão engastadas. O raio de giração pode ser encontrado também da seguinte forma:

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (2.8)$$

Influenciando no comprimento efetivo  $Le$ , que é calculado da seguinte maneira:

$$Le = K * L \quad (2.9)$$

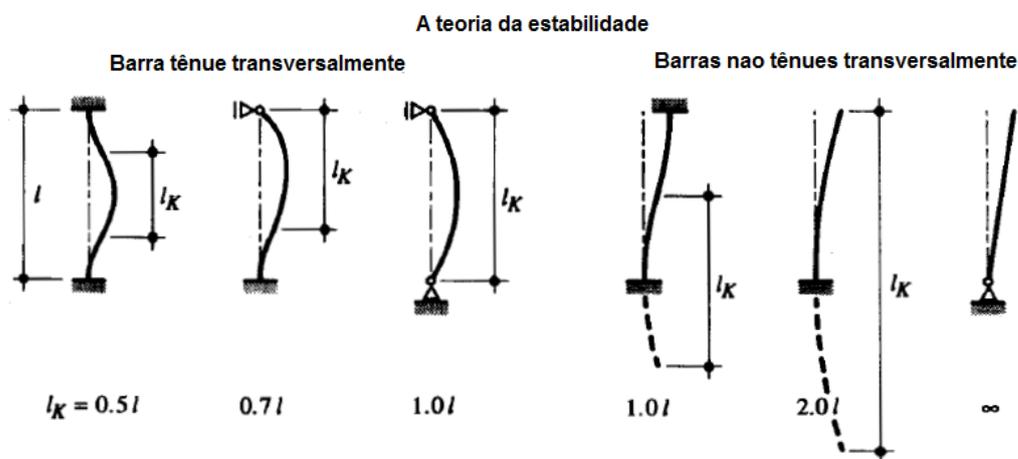
Este comprimento representa a distância entre os pontos de momento nulo da barra multiplicando com o fator do tipo de apoio. Pode ser substituído alguns termos e escrever a formula da tensão critica substituindo o fator  $\lambda$ , em função do comprimento efetivo e do raio de giração. Ficando da seguinte forma:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 * E * I}{\left(\frac{K * L}{r}\right)^2} \quad \text{Eq. (2.10)}$$

Através das equações 2.7, 2.6, e 2.10 fica claro como ocorre a influência dos valores no cálculo da tensão máxima que a barra aguenta antes da fratura, quanto maior for o comprimento maior será o índice, e conseqüentemente menor será a tensão máxima (HIBBELER, 2009).

O fator  $k$  pode possuir vários valores dependendo da condição em que se encontra os apoios da barra, multiplicando-se assim o comprimento real da barra, eles podem ser vistos na figura 4 abaixo:

**Figura 4 - A teoria da estabilidade**



Fonte: Adaptado de M.A. Hirt, R. Bez (1994).

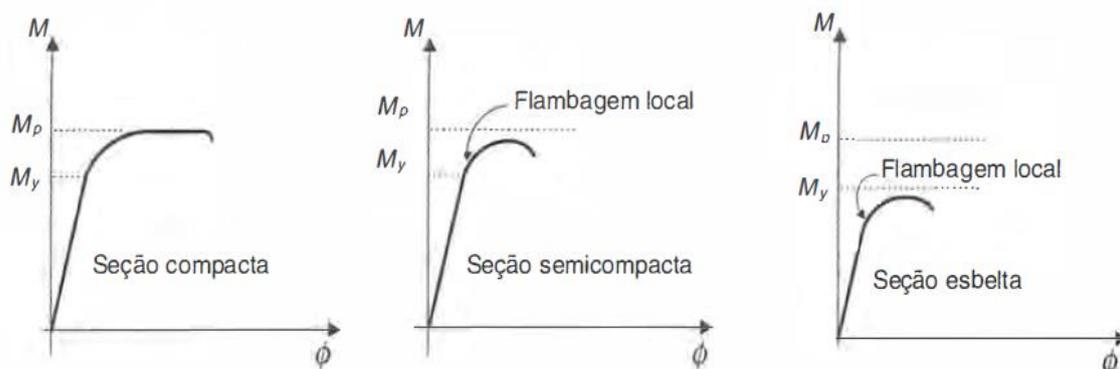
A geometria de cada barra também remete a uma importante propriedade nos cálculos, a área transversal e o momento de inércia. Como será usado o mesmo material a tensão de escoamento é a mesma para todas as barras. Assim o fator fundamental que influenciará o cálculo da força crítica ( $P_{crit}$ ) e da tensão crítica ( $\sigma_{crit}$ ) é a geometria de cada barra, pois a viga tende a flambar no plano preferencial em que ocorre maior deformação, bem como já sabemos é o que possui o menor momento de inércia (HIBBELER, 2009).

No caso de uma coluna com seção transversal circular ou quadrada, o momento de inércia  $I$  da seção transversal em relação a qualquer eixo que passa pelo centroide será o mesmo, e a coluna poderá então flambar em qualquer um dos planos, exceto pelas restrições que poderão ser impostas pelos vínculos nas extremidades (BEER et al., 2011).

De acordo com a norma brasileira NBR 8800-2008 a classificação dos perfis depende do índice de esbeltez, a qual está relacionada com a razão entre a espessura e a largura da barra. Sendo classificados como compactas, semicompactas ou esbeltas.

Uma parte da barra pode sofrer mais deformação que a outra fazendo com que ocorra plastificação da seção. Barras compactas atingem plastificação total e rotação em suas rótulas possuindo uma configuração inelástica por serem mais estáveis elas escoam até a ruptura mais facilmente antes de flambar elasticamente. As semicompactas ou intermediárias, sofrem uma flambagem inelástica, ou seja, a tensão admissível é maior que o limite elástico do material, tendem a flambar somente depois que começar a deformar plasticamente. E as esbeltas são mais instáveis ocorrendo a flambagem local, sendo mais difíceis de fraturar não ultrapassando o escoamento (HIBBELER, 2009) (PFEIL, 2009). Essa diferença de comportamento não importa o tipo de carregamento, podendo ser de tração, compressão ou flexão do perfil pode ocorrer para qualquer um deles, isto porque é na magnitude da tensão que importará ao ser comparada com o que o material realmente aguenta, respeitando sua tensão admissível. Isto pode ser visto na figura 5 logo abaixo:

**Figura 5 - Comportamento de vigas para flexão com diferentes seções.**



**Fonte: Adaptado de P. WALTER (2009).**

O que se pode abstrair de importante na figura acima é a resposta que a barra demonstra ao sofrer um carregamento está sob a influência da flambagem local de seus respectivos momentos fletores resistentes em cada parte da viga e a flambagem global. Como existem diferenças na rigidez, geometria, e carregamento, algumas barras tendem a falhar plasticamente depois do escoamento e outras não possuem nem plastificação, falhando devido à instabilidade estrutural (HIBBELER, 2009) (PFEIL, 2009), sendo esse o caso para a plastificação das rótulas das barras para um carregamento de flexão.

#### 2.1.4 Flambagem Local e Global

Em relação à estabilidade geométrica do perfil já foi demonstrado nas seções 2.1.1 e 2.1.2 as principais variáveis, conceitos, formulação matemática, e ocorrências na engenharia. Foi visto também que algumas vigas são constituídas por chapas soldadas em sua alma, ou fundidas junto com a alma, isso implica numa diferença nas rigidezes de cada elemento da viga, ou seja, diferentes partes da viga sofrem mais esforço do que a viga como um todo, fazendo com que esses locais isolados tendam a sofrer um deslocamento mais acentuado em

comparação com a estrutura, ou o maior comprimento resistente da barra. Esse é o conceito estabelecido quando calculados a diferença entre as flambagens locais e global do elemento.

A flambagem local ocorre devido a deformação transversal acentuada em uma parte da chapa constituinte do perfil, ela depende da esbelteza da chapa o que se caracteriza por deslocamentos laterais na forma de ondulações (P. WALTER, 2009). Na seção 5.3 da norma NBR 8800:2008 é especificado que a força de compressão solicitante não deve ser maior que a força resistente.

$$N_{c,Sd} \leq N_{c,Rd} \quad (2.11)$$

Onde a força resistente de compressão  $N_{c,Sd}$  deve ser igual à:

$$N_{c,Sd} = \frac{x*Q*A_g*f_y}{\gamma_{al}} \quad (2.12)$$

No qual  $x$  é o fator redutor de capacidade resistente associado a compressão,  $Q$  é o fator de redução total associado à flambagem local, obtido nos anexos da norma, e  $A_g$  é a área bruta da seção transversal da barra,  $f_y$  é a tensão de escoamento do aço, e  $\gamma_{al}$  um coeficiente de ponderação normalmente de valor 1,1 para compressão centrada em condições normais de uso segundo tabela 3 da norma NBR 8800 o qual serve para minorar a tensão resistente.

Temos também que o  $X$  pode ser calculado segundo a seção 5.3.3.1 da norma, ela está em função do  $\lambda_0$  que está em função da geometria da seção, sua fórmula mais básica é calculada da seguinte forma:

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{Q*A_g*f_y}{N_e}} \quad (2.13)$$

$$\text{Quando } \lambda_0 \leq 1,5: X = 0,658\lambda_0^2 \quad (2.14)$$

$$\text{Quando } \lambda_0 > 1,5: X = \frac{0,877}{\lambda_0^2} \quad (2.15)$$

O coeficiente de flambagem local ( $Q$ ) que considera a influência da flambagem local na resistência do elemento é dividido em 2 coeficientes, os quais variam de zero à um.

$Q_s$ : coeficiente de redução da resistência devido à flambagem local em elementos apoiados e livres (AL).

$Q_a$ : coeficiente de redução da resistência devido à flambagem local em elementos apoiado-apoiados (AA).

Em seções compostas de elementos AL e AA, o coeficiente  $Q$  é dado pelo produto dos coeficientes  $Q_s$  e  $Q_a$ .

$$Q = Q_a * Q_s \quad (2.16)$$

Em seções compostas apenas por elementos comprimidos AL, o coeficiente  $Q$  será o menor dos coeficientes  $Q_s$  entre os diversos elementos que compõem a seção, portanto terá apenas o valor  $Q_s$  na fórmula,  $Q_a$  será igual a um. E ao contrário também se demonstra verdadeiro apenas.

O parâmetro de flambagem local  $Q$  será igual a "1" se a relação largura-espessura dos elementos do componente da seção não ultrapassarem os limites indicados na tabela F1 da norma NBR 8800:2008.

Tendo especificado as principais variáveis usadas nos cálculos de flambagem a norma define também como se deve proceder para descobrir. É definido no item F.2 da norma ou visto no anexo como os elementos irão sofrer flambagem devido à instabilidade estrutural, se a relação entre largura-espessura for menor que o limite não haverá flambagem no elemento da barra. Como demonstrado na equação 2.17 logo abaixo:

$$\left(\frac{b}{t}\right) \leq \left(\frac{b}{t}\right)_{lim} \quad (2.17)$$

Fazendo com que o fator de redução local  $Q$  seja igual a 1. Caso contrário se a relação superior for maior que razão limite haverá flambagem do elemento, fazendo com seja calculado os valores de  $Q_a$ , da mesa, e  $Q_s$ , da alma.

### 2.1.5 Flambagem por flexão, torção e flexo-torção

Como foi visto é necessário calcular os esforços de flambagem para um carregamento de compressão, entretanto, é preciso averiguar qual esforço é o mais crítico para a seção analisada. É explicado na norma NBR 8800:2008 que para cada seção há um tipo preferencial de ocorrer a flambagem, isso se deve a sua construção geométrica, para descobrir o mais crítico é feita uma avaliação do perfil em relação a todos modos de flambagem que podem ocorrer, e é dimensionado para aquele perfil usando-se a menor tensão crítica que ele pode suportar.

Para a flexão pode ser avaliado em relação aos dois planos da seção transversal do perfil. Tanto em relação ao eixo x-x e o eixo y-y, se a construção de uma estrutura não tiver um sistema de travamento a coluna sujeita a flambagem tenderá a flambar sempre para o eixo que possuir um momento de inercia menor. O cálculo se dá pelas equações 2.18 e 2.19 logo abaixo:

$$N_{ex} = \frac{\pi^2 * E * I}{(K_x * L_x)^2} \quad (2.18)$$

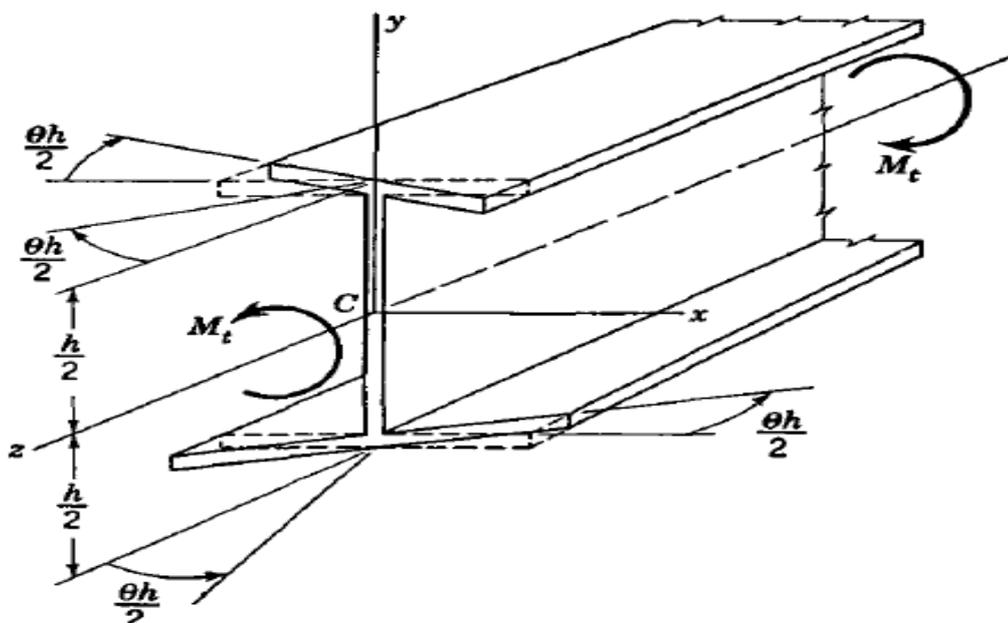
$$N_{ey} = \frac{\pi^2 * E * I}{(k_y * L_y)^2} \quad (2.19)$$

Na construção civil onde as colunas estão sujeitas muitas vezes a esforços combinados, cargas excêntricas atuam nas bordas ou nos suportes acoplados às laterais das colunas, é provocado um momento em relação ao centro da coluna, fazendo com que o momento fletor tenha sua parcela na tensão atuante, isso faz ver que não é difícil haver uma combinação de esforços. A literatura enfatiza o estudo adotando casos ideais, não obstante disso o ideal a se fazer é analisar o problema afundo e levar em consideração todos outros possíveis casos.

Segundo Timoshenko (1961) colunas podem não apenas flambar por apenas flexionar seu perfil em relação ao eixo de simetria da seção transversal, mas também por torção ou uma combinação de torção e flexão pode haver flambagem quando a rigidez torcional de um perfil é muito baixa comparada com

as outras, isso ocorre normalmente para perfis de seção transversal aberta com paredes muito finas. Isso pode ser visto na figura 6 logo abaixo:

**Figura 6 - Barra de perfil I torcionada**



**Fonte: Adaptado de Timoshenko (1961).**

Na figura 6 é demonstrado como as fibras localizadas no centro do eixo de simetria da barra localizada no eixo z, as quais não estão sobre efeito de tensão de cisalhamento e estão inclinadas em relação as fibras localizadas na mesa do perfil por um ângulo  $\theta$  relacionado com a altura do centro do perfil a mesa.

Para o caso de torção no elemento depois que ele entre em instabilidade estrutural e venha a deformar pode haver outros esforços agindo como flexão ou torção, em relação ao eixo longitudinal z temos que a força de torção será igual à:

$$N_{et} = \frac{1}{r_0^2} * \left[ \frac{\pi^2 * E * C_w}{(K_z * L_z)^2} + G J \right] \quad (2.20)$$

No qual  $C_w$  é a constante de empenamento da seção transversal,  $G$  é o modulo de elasticidade transversal do aço, e  $J$  é a constante de torção da seção

transversal, e  $r_0$  é o raio de giração polar da seção bruta em relação ao centro de cisalhamento dado ela equação 2.21:

$$r_0 = \sqrt{(r_x^2 + r_y^2 + x_0^2 + y_0^2)} \quad (2.21)$$

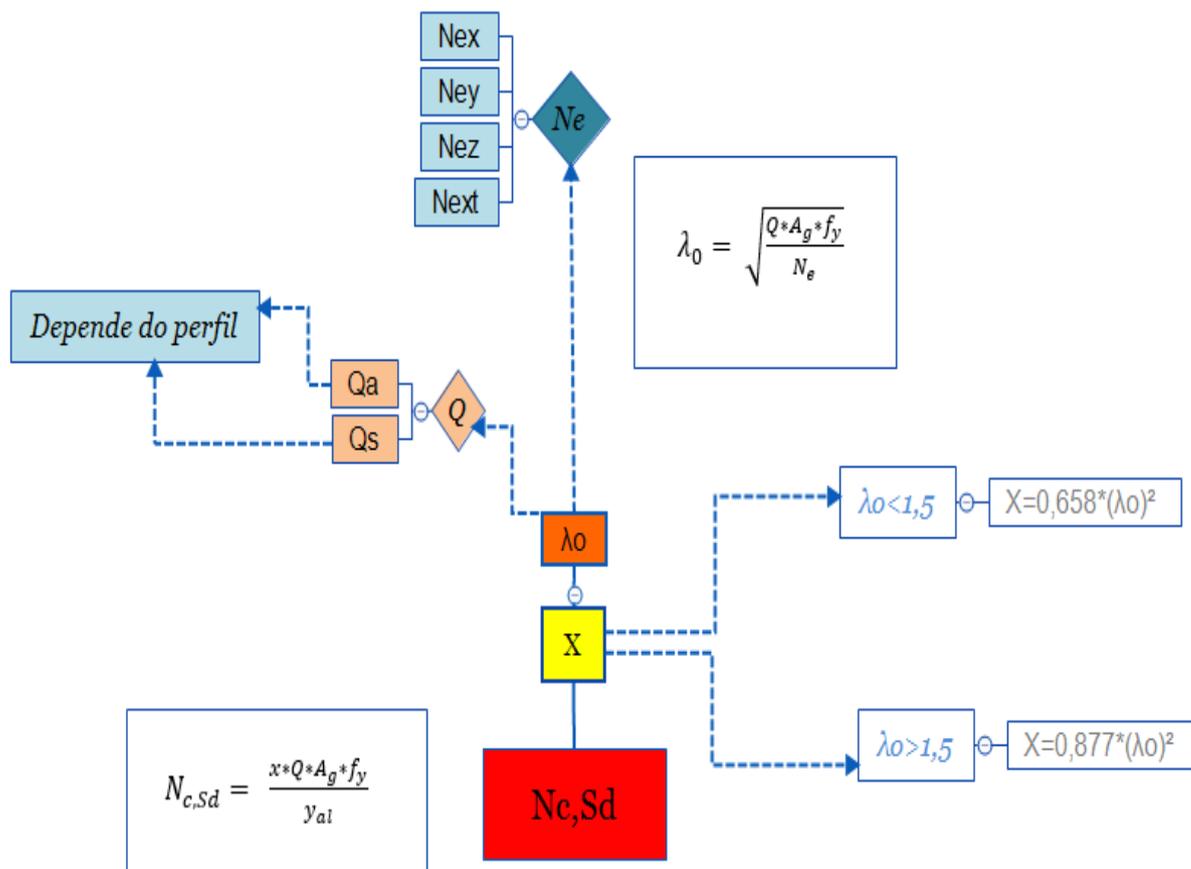
Sendo  $r_x$  e  $r_y$  os raios de giração em relação aos eixos centrais x e y, e  $x_0$  e  $y_0$  são as coordenadas do centro de cisalhamento na direção dos eixos centrais x e y, respectivamente, em relação ao centro geométrico da seção. E para o caso da flexo - torção que é influenciada pelas forças de torção e flexão do plano y-y, que no caso pode ser visto o seu cálculo da seguinte forma na equação 2.22:

$$N_{ext} = \frac{N_{ey} + N_{ez}}{2 * [1 - (y_0/r_0)^2]} * \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{4 * N_{ey} * N_{ez} * [1 - (y_0/r_0)^2]}{(N_{ey} + N_{ez})^2}} \right] \quad (2.22)$$

Como a tensão de torção e de flexo-torção dependem de  $r_0$  é necessário prever os efeitos da compressão excêntrica em relação ao centro de cisalhamento (C.S.) com a resultante da força posicionada no centroide da figura composta. Isto é, para peças com dois eixos de simetria, ou para perfis do tipo U e Z é preciso localizar o C.S. de cada peça, pois ele difere do centro geométrico. Isso faz com que através de um carregamento perfeitamente centrado sofra um momento torçor em relação a este ponto e não ao seu baricentro. O C.S. está calculado no apêndice para os perfis que se enquadram nesta situação.

Para evitar que isso ocorra deveria supostamente em teoria ser aplicado uma força com distancia  $xm$  do eixo longitudinal baricêntrico para equilibrar o somatório de momentos associados aquelas forças decorrendo num momento nulo. Foram vistas as principais formas de flambagem e suas respectivas formulas, segue abaixo na figura 7 um fluxograma que exemplifica melhor a forma como decorrerá a análise analítica:

Figura 7 - Fluxograma da análise analítica



Fonte: Autoria própria.

Depois de escolhido a barra a teoria definida nos anexos E, F, G, e H especifica suas fórmulas gerais de acordo com a norma NBR 8800:2008, e seguindo essa metodologia é determinado nos cálculos como se deve mensurar caso tenha a flambagem local da alma (FLA), flambagem local da mesa (FLM), e a flambagem lateral com torção (FLT).

Para o caso de compressão simples ou flexão apenas deverá ser calculada as flambagens da mesa e da alma, e no caso da flexo-torção os três deverão ser calculados. É definido assim se ocorrerá ou não flambagem em cada elemento constituinte da barra, calculado o valor final de  $Q$ .

### 2.1.6 Flambagem Inelástica

Foi visto que as barras podem flambar dentro do seu regime elástico, porém isso também é possível dentro da região de plastificação do material, fazendo com que os valores para o módulo de elasticidade seja diferente, necessitando uma nova abordagem. Para projeto de colunas de aço sob efeito de cargas concêntricas. Classificando as colunas em relação ao tipo de tensão desenvolvida no seu interior no momento da falha, é definido duas regiões no gráfico tensão admissível ( $\sigma_{adm}$ ) x índice de esbeltez ( $\lambda$ ).

A região mais à esquerda do gráfico é definida por situar as barras de comprimento menor já que os valores do  $\lambda$  são menores e mais grossas, portanto elas possuem uma tensão crítica maior. Já as barras à direita do  $\lambda_c$  são consideradas delgadas e longas, aguentando um menor esforço. E a região central seria para as barras intermediárias, as quais ficam entre as duas curvas (BEER et al.,2011).

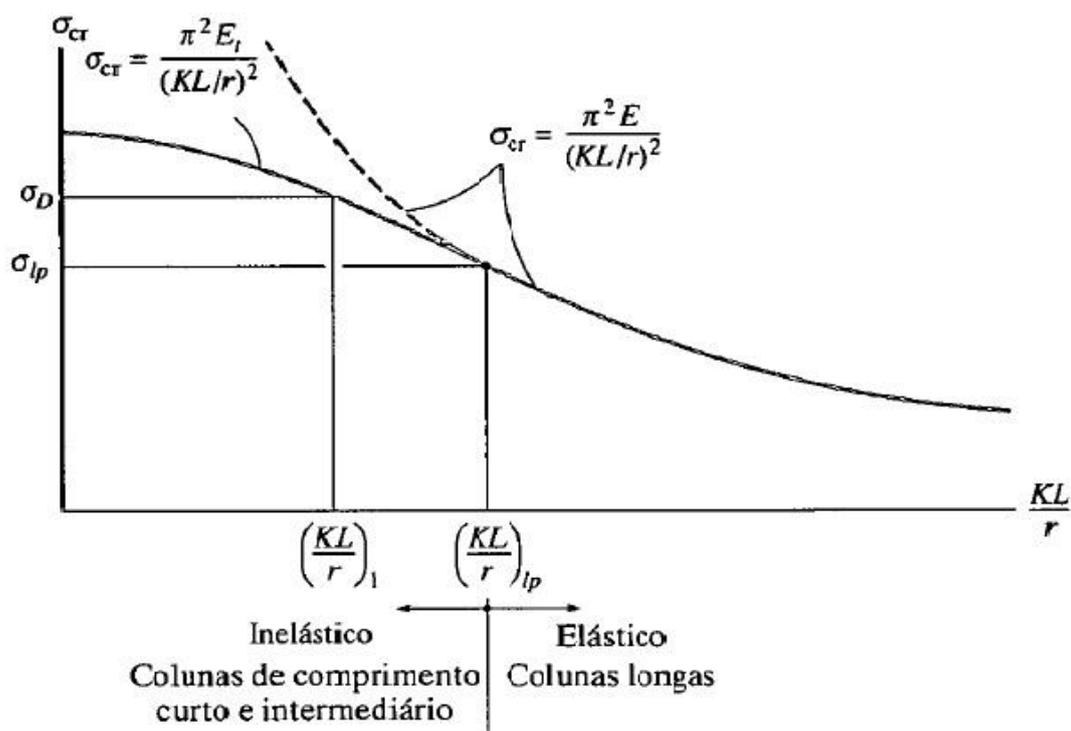
Existe uma linha delimitando o limite que essas barras são consideradas curtas ou intermediárias até um valor crítico, esse valor separa as barras que obedecem ao limite de proporcionalidade elástica. A esquerda do gráfico para se encontrar a tensão admissível do elemento é usado um outro valor sem ser o módulo de Young, o chamado módulo tangente  $E_t$  (HIBBELER, 2009).

No gráfico da função exponencial tensão x deformação a região em que não é mais obedecido a proporcionalidade elástica, ou seja, o material se encontra sobre deformação plástica, é recalculado constantemente em cada ponto diferente o módulo de rigidez. Pois ele é calculado pela derivada da função do respectivo ponto, daí vem o nome de módulo tangente. Isso faz com que a viga tenha uma menor rigidez conforme é deformando, isso se deve a parte côncava dos grãos na região mais interna da viga estarem em princípio de plastificação, fazendo com que tenha uma variação do módulo de elasticidade na seção transversal ficando menos resistente até falha da viga instabilidade estrutural (POPOV, 2014).

Na figura 8 abaixo a separação das regiões elástica e inelástica se dá pelo valor do  $\lambda_c$  onde a curva mais à direita pontilhada obedece a equação de Euler representando as colunas longas, e a esquerda as curtas e intermediárias

que normalmente ultrapassam a tensão de escoamento antes de flambar estão em função do módulo tangencial.

Figura 8 - Flambagem elástica e inelástica.



Fonte: Adaptado de HIBBELER (2009).

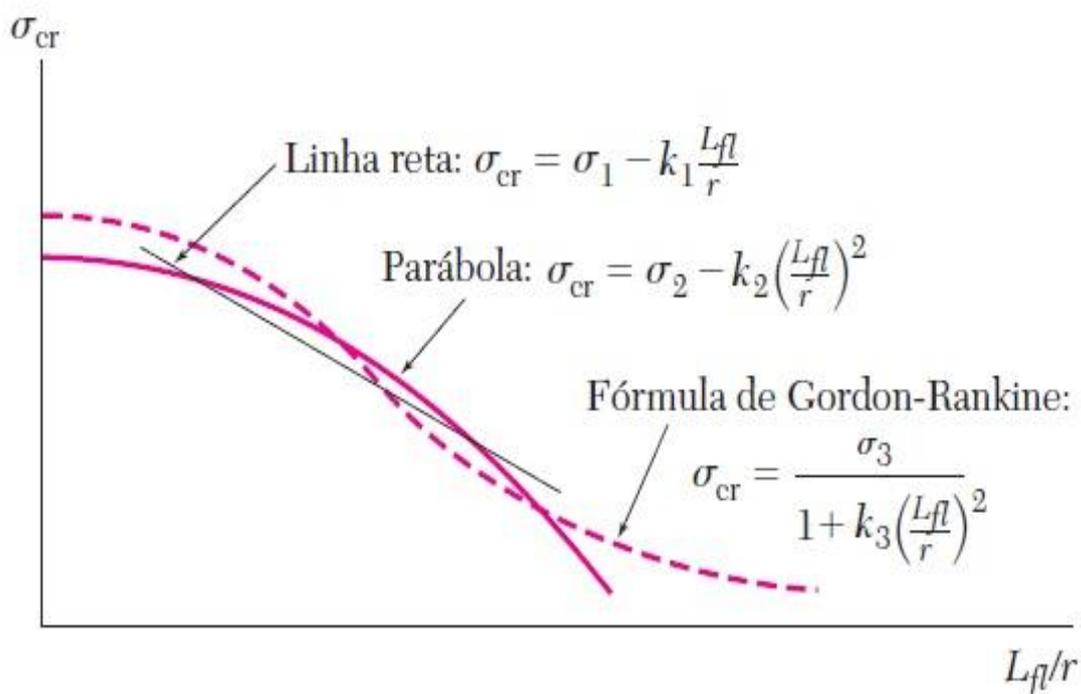
Como a maior parte da região esquerda possui características diferentes por não obedecer a proporcionalidade do módulo de elasticidade, a fórmula envolvida para o cálculo da tensão crítica é diferente para barras cada vez menores. Necessitando substituir o módulo de Young pelo módulo tangente na equação 2.10, ficando da seguinte maneira:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 * E_t}{\left(\frac{K*L}{r}\right)^2} \quad (2.23)$$

O qual também é chamada de equação de Engesser, proposta em 1889. Desde o começo do século foram desenvolvidas diversas formas para

entender o comportamento da tensão admissível variando-se o índice de esbeltez ( $\lambda$ ) para um mesmo perfil, e vários autores chegaram a diferentes fórmulas e teorias que levam em consideração fatores empíricos, os quais tentam chegar o mais próximo possível da realidade (BEER et al., 2011). Como pode ser visto na figura 9 abaixo:

**Figura 9 - Funções semi-empíricas de flambagem**



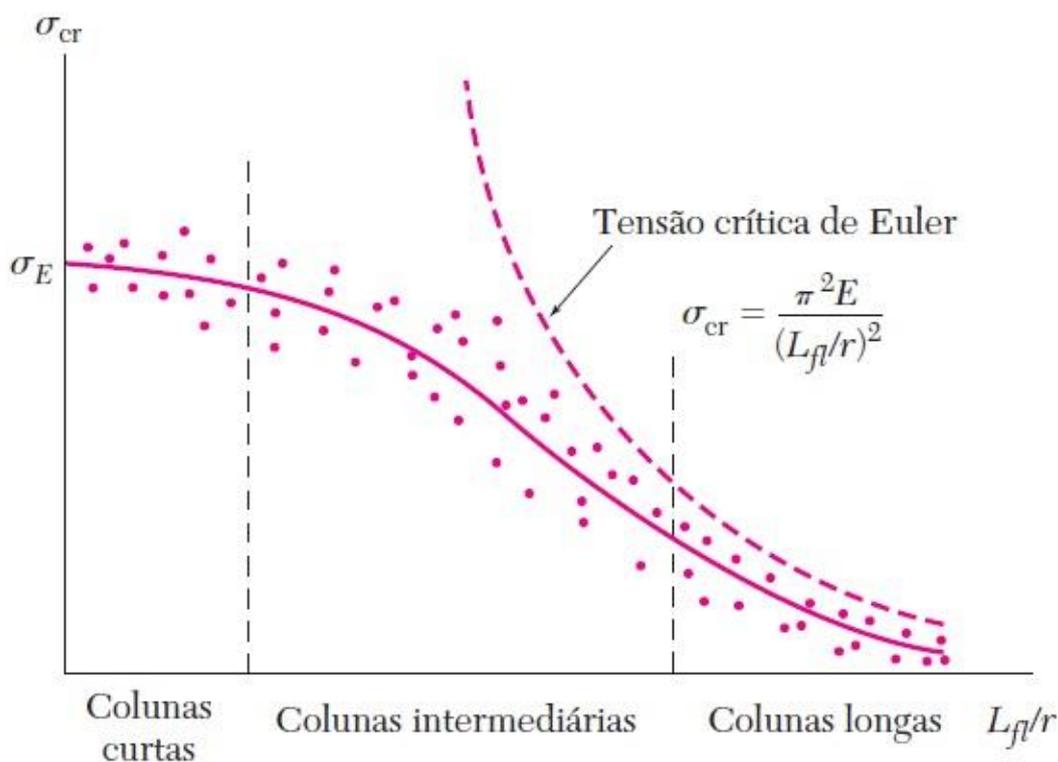
**Fonte: Adaptado de (BEER et al., 2011).**

Existem outros métodos que tentam levar em conta a flambagem inelástica conforme descrito na figura 9, mas o método que conseguiu descrever esse fenômeno de uma maneira mais exata foi a do módulo reduzido, chamado de método de Shanley, por sua análise ser considerada mais complexa e a diferença entre resultados não ser muito grande, faz com que o método do módulo tangente seja o mais usado (HIBBELER, 2009).

E na figura 10 é mostrado como se comporta o desvio-padrão da amostragem de diversas barras calculadas em relação a ensaios empíricos, as

quais possuem uma variação nos seus valores, mas conseguem descrever o problema com uma certa precisão.

**Figura 10 - Tensão crítica para várias seções.**



**Fonte: Adaptado de (BEER et al., 2011)**

Esses são métodos muito complexos e diferentes que levam em consideração variáveis empíricas, e por serem muito recentes não há muito literatura disponível que explique seu comportamento por isso não será discutido demasiadamente.

## 2.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Com o desenvolvimento de técnicas e modelos matemáticos é possível resolver vários projetos que abordam estudos nas diversas áreas da engenharia como a mecânica dos sólidos, vibração, mecânica dos fluidos, transferência de

calor ou eletromagnetismo através de softwares desenvolvidos para resolver simulações numéricas que representam o comportamento físico do objeto estudado (COOK, 1989).

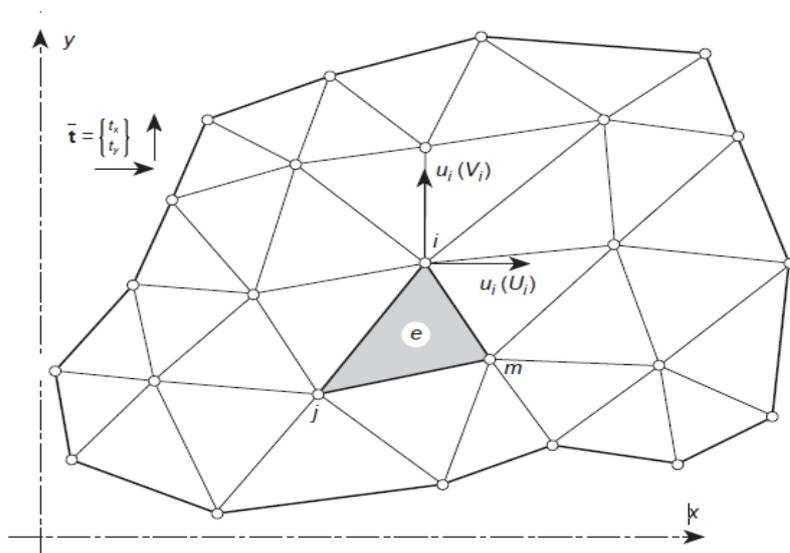
Na metade do século passado vários problemas ainda eram resolvidos com uma metodologia científica embasada usando métodos analíticos, esses problemas possuem muitas equações diferenciais parciais e equações integral-diferenciais pois a teoria para resolver eles já existiam, porém somente com o surgimento de computadores mais avançados com maior capacidade computacional e maiores estudos no âmbito científico foi possível implementar sua utilização.

Nos anos 60, 70 com ajuda de programas numéricos foi possível resolver de forma mais rápida e prática, fazendo assim empresas de engenharia e projetos de pesquisa otimizar e aperfeiçoarem seus trabalhos, diminuindo seus gastos em protótipos ou modelos demasiadamente malsucedidos que estariam procurando soluções que talvez não existissem ou não poderiam ser encontrados sem a ajuda dessas simulações (REDDY, 2005) (RAO, 2011).

Nos últimos anos foram desenvolvidos vários métodos numéricos para resolver equações diferenciais, um deles é o MEF (Métodos dos Elementos Finitos) ou em inglês FEM (*Finite Element Method*). É um mecanismo que tem como objetivo básico dividir ou discretizar um domínio em pequenos elementos com vários arranjos geométricos diferentes que visam montar várias equações que definam o seu comportamento, usando condições de contorno e graus de liberdade (GL's) é descrito a interação desses elementos com seus elementos vizinho em um nível global (RAO, 2011).

Na figura 11 abaixo é visto como é feito o estudo de um objeto no plano cartesiano dividindo em arranjos triangulares podendo posteriormente encontrar os autovetores e autovalores que correspondem à relação física de um problema qualquer. Esses elementos triangulares são usados em grandes partes de problemas simples, sendo possível implementar códigos que façam essa análise em *programas compiladores* com certa facilidade, porém para geometrias com curvas mais acentuadas é preferível usar uma mistura de elementos diferentes, como triangulares e quadrados ou outros tipos de polígonos.

**Figura 11 - Domínio dividido por elemento triangulares.**



**Fonte: Adaptado de O.C. ZIENKIEWICZ (2000).**

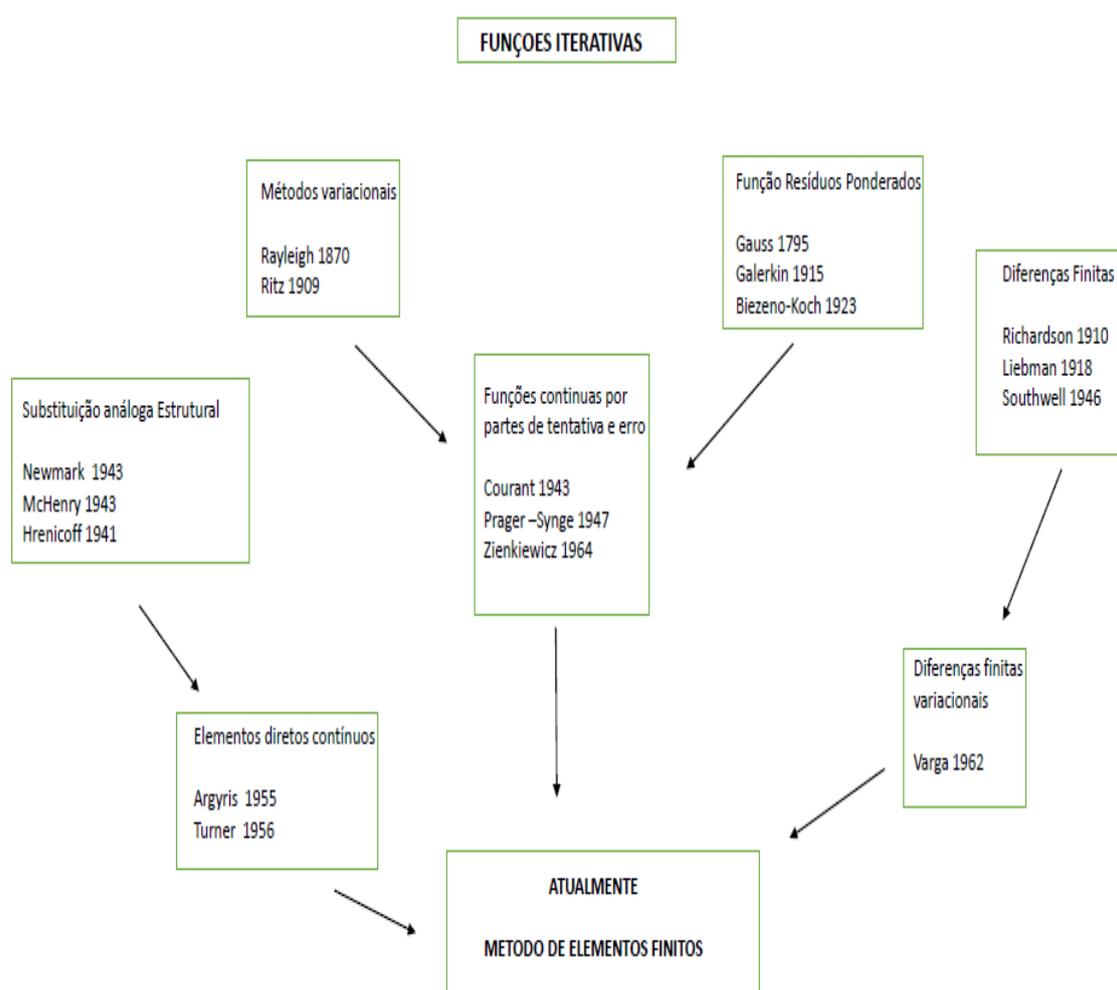
Existem vários outros métodos para solução de problemas numéricos cada um possuindo sua própria base matemática com uma metodologia similar ao FEM, o estudo desses métodos é o que se entende hoje por análise de elementos finitos (ZIENKIEWICZ, 2010). O Método de Diferenças Finitas (MDF) ou *Finite Difference Method* (FDM) em inglês, por exemplo, é um método muito utilizado o qual possui pequenas diferenças em relação ao MEF, mas o tornam uma melhor escolha devido sua maior facilidade de implementação matemática em certas análises.

Representando o domínio por vários nós e aplicando as equações diferenciais no problema usando-se de diferenças finitas centrais, progressiva, ou regressiva, é possível fazer um sistema algébrico encontrando a variável em cada ponto. Substituindo por series de Taylor a equação diferencial, em pequenos passos de tempo ele consegue prever qual será o valor dos nós posteriores ou anteriores, baseado em valores no qual ele já possui. Ou ao contrário, usando valores em um nó posterior ou anterior, é possível encontrar a variável localizada no nó do meio (INCROPERA, 2006).

O Método de Volumes Finitos, ou *Finite Volume Method* em inglês (FVM), é bem similar aos outros dois métodos anteriores, mas usa volumes ao invés de elementos para dividir seu domínio. Seja um sistema físico onde seja

necessário calcular como se dá a difusão ou convecção de uma espécie química ou temperatura no qual tenha um fluxo de meio um líquido ou gasoso, um pequeno pedaço de volume é de forma iterativa é calculado suas equações diferenciais conservativas em relação a outro volume próximo, afim de atingir o mínimo erro numérico (VEERSTEEG, MALALASEKERA, 1995). Na figura 12 é visto os principais métodos e nomes por trás dessa ferramenta:

**Figura 12 - Evolução dos principais métodos de elementos finitos.**



**Fonte: Fluxograma Adaptado de O.C. ZIENKIEWICZ (2000).**

A metodologia do FEM usa ordem lógica de aplicação parecendo ser simples, porém sua aplicação mesmo para problemas simples pode ser trabalhosa de se implementar.

Os programas em elementos finitos normalmente se dividem em três etapas, o primeiro passo se dá pelo pré-processamento que tem como característica discretizar o domínio do problema simplificando as equações diferenciais para cada elemento que compõem nosso objeto de análise usando suas respectivas coordenadas locais.

É feita uma combinação de todos os elementos rearranjando-os em um lugar comum entre si, através de coordenadas globais colocamos cada elemento no devido lugar o qual constrói assim um sistema linear de equações numa matriz aplicando as condições de contorno do domínio ou condições iniciais do problema.

O segundo passo é o processamento que tem como objetivo resolver nosso sistema linear. E finalmente o pós-processamento o qual junta nossa solução em uma melhor visualização de dados tornando-o em algo mais significativo (ZIENKIEWICZ, 2010) (NAM-HO, 2015).

### 2.2.1 Método de Rayleigh-Ritz

Existem vários métodos variacionais que abordam a solução de sistemas contínuos para resolver problemas com valores de contorno, um método de grande importância muito utilizado é o Rayleigh-Ritz (MRR) o qual usa a formulação fraca, que é a forma integral do problema, e funções de aproximação.

Elas precisam apenas satisfazer as condições de contorno e serem diferenciáveis, ela minimiza nossa integração para um menor erro possível em relação ao funcional adotado, normalmente são funções polinomiais ou trigonométricas como senos e cossenos, elas em conjunto servem para estimar a solução aproximada da equação diferencial do nosso problema.

“Os métodos variacionais de aproximação, Rayleigh-Ritz, Galerkin, mínimos quadrados, Colocação, e ou Métodos de Resíduos Ponderados são baseados em proposições ponderadas de integração nas equações governantes” (J.N. REDDY, 2005).

O MRR usa uma combinação linear de funções aproximadoras  $\varphi_i(x)$ , onde nossa solução aproximada  $v(x)$ , é uma combinação de um somatório de funções vezes o parâmetro  $a_i$  que é um vetor que representa os valores nodais

da função  $v(x)$ . Ficando a solução da seguinte forma como apresentado na equação 2.24:

$$y(x) \cong v(x) = \sum_{i=1}^n a_i * \varphi_i(x) \quad (2.24)$$

O funcional é usado muitas vezes quando queremos usar uma função em função de outra variável que pertença ao mesmo domínio, para um espaço vetorial toda transformação de um elemento é correspondente à um número real.

Ele é usado por exemplo na teoria de energia de deformação  $U$  armazenada ou do potencial de energia  $\pi$  (energia de deformação). As funções de forma  $\varphi_i(x)$  são contínuas até uma ordem menor do que nosso funcional, linearmente independentes e satisfazem as condições de contorno.

### 2.2.2 Análise Estática Linear

Em um problema estrutural temos vários tipos de carga que estão atuando a serem consideradas as quais podem ser tensões axiais trativas ou compressivas, de cisalhamento, flexão e/ou de torção. Com carregamento constante ou variável, elas estão intrinsecamente relacionadas com outro importante variável a ser analisada que é a deformação do material. Obedecendo a relação uniaxial de Robert Hooke que supõe um comportamento linear do material ele sofre pequenas deformações e proporcionais às tensões internas ou também chamada de Lei de Hooke generalizada (NAM-HO,2015) (SANKAR, 2011).

Essas variáveis analisadas implicam na hipótese de que, ao se fazer uma consideração estática linear temos como condição uma aplicação lenta e gradual da carga no material, permanecendo constante durante o tempo, essa força externa aplicada no corpo desenvolve reações e tensões internas que podem gerar deformações na estrutura ou desenvolver uma aceleração obedecendo assim o equilíbrio de forças atuantes no corpo (HIBBELER, 2010). Essas forças de reação que o material desenvolve afim de voltar ao seu estado de equilíbrio, elas são inerciais e ou de amortecimento, em uma análise estática

são desprezíveis pois suas acelerações e velocidade são muito baixas (BALACHANDRAN, MAGREB, 2011).

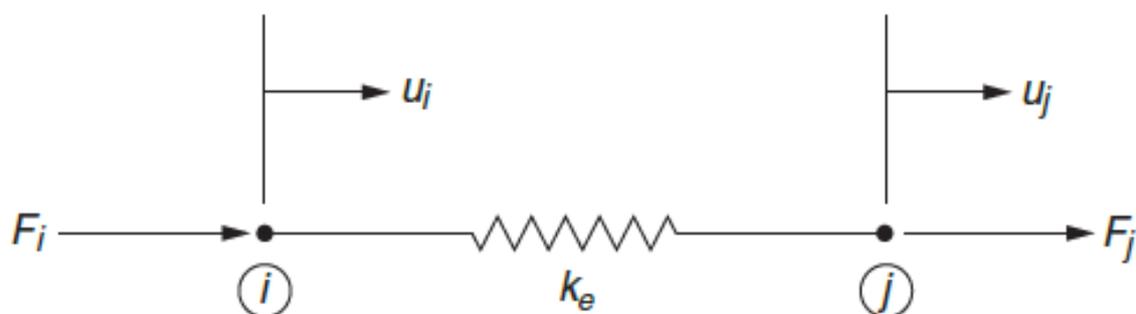
### 2.2.3 Método do Autovalor

Em uma análise de elementos finitos que usa como abordagem a separação de um domínio em vários elementos. Usando esse conceito dividimos em vários elementos de barra nosso material, representando em várias molas, massas, o qual possuem suas respectivas rigidezes, deformações e velocidades. Seja o sistema de equações de uma análise linear da forma.

$$[K] \times [Q] = [F] \quad (2.25)$$

Considerando os elementos como molas e usando como base a equação (2.25) no qual é obedecido através da fórmula a lei de Hooke. Sendo  $k$  a variável de rigidez ou constante de mola de um elemento constituído por apenas dois nós, os deslocamentos nodais  $u_i$  e  $u_j$ , adotando um sistema de coordenadas da esquerda para direita como convenção  $x_j > x_i$ . Conforme vemos na figura 13 abaixo:

**Figura 13 - Elemento mola composto por dois nós.**



**Fonte: Adaptado de S. RAO SINGIRESU (2010).**

É descrito duas equações representando o vetor de força para os dois nós. No método direto de um elemento que sofre o alongamento é feito um

somatório de todas as forças atuantes para haver um equilíbrio de forças no sistema, assim é tido a seguinte proposição.

$$K_{ij} = \sum_{e=1}^m K_{ij}^e \quad (2.26)$$

$$P = k \times \Delta u \quad (2.27)$$

Obtendo a relação entre forças e deslocamentos do elemento  $e$ , temos a força em relação aos dois nós constituídos por um elemento simples.

$$f_i = k^e \times (u_i - u_j), f_j = k^e \times (-u_i + u_j) \quad (2.28)$$

Assim a matriz do elemento  $e$  pode ser escrita como:

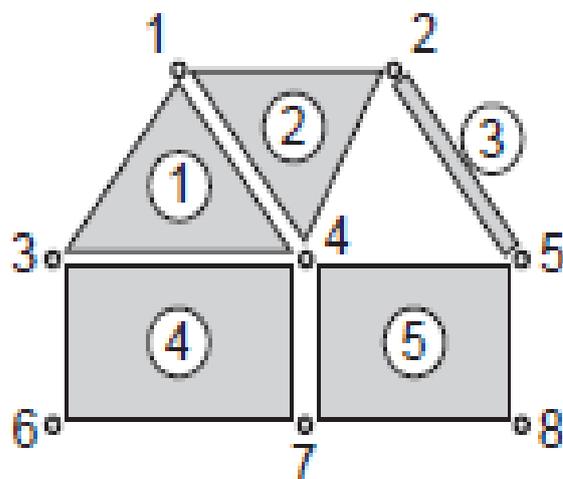
$$k^e \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

Na equação 2.29 a matriz  $K$  possui as seguintes características como quadrada, simétrica, singular, e positiva definida. Elas definem se o sistema é invertível ou não, ou seja, possui uma solução. Assim é possível ver a matriz da seguinte forma como um conjunto de equações em um sistema linear do tipo, em relação ao elemento  $n$ :

$$K_{n1} * a_1 + K_{n2} * a_2 + \dots = r_n - f_n \quad (2.30)$$

Para exemplificar melhor o método seja um domínio qualquer dado pela figura sete, através de um algoritmo pronto de algum software comercial qualquer que use funções prontas como por exemplo ANSYS, ou através de algum programa que use a linguagem computacional feito manualmente por um usuário experiente como Fortran, o programa divide automaticamente em diferentes elementos o objeto do jeito que o usuário melhor optar, os elementos são constituídos por vários nós, os nós e os elementos são numerados para identificação e rearranjados normalmente seguindo o sentido anti-horário. Conforme a figura 14 logo abaixo é possível ver isso.

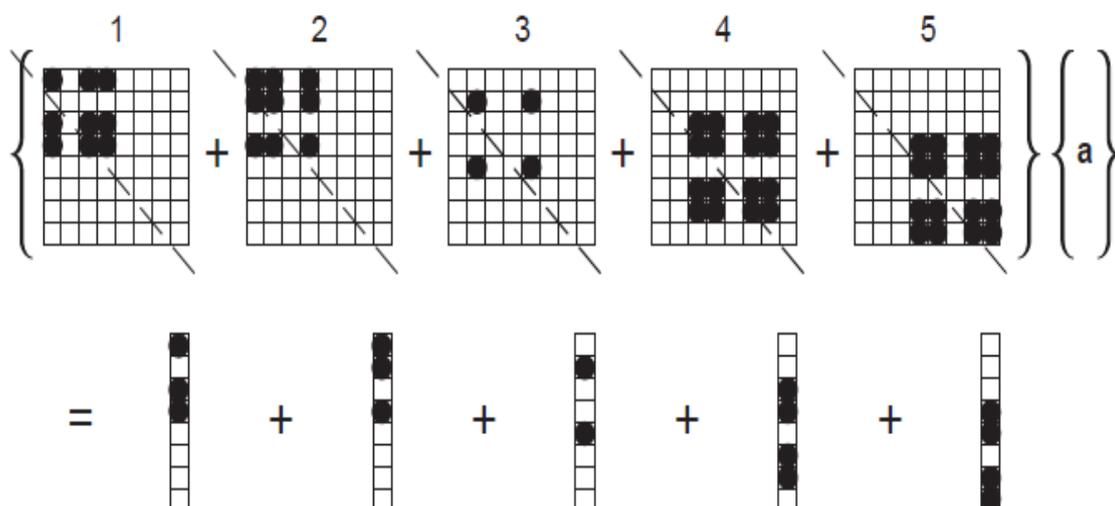
Figura 14 - Divisão de um domínio por vários elementos diferentes.



Fonte: Adaptado de O.C. ZIENKIEWICZ (2000).

É possível ver que o elemento um é composto pelos nós 1,3, e 4, seguindo para o elemento dois é possível ver que os nós 1,2 e 4 o compõem e assim por diante essa nomenclatura dos elementos se chama de pré-processamento.

Figura 15 - Superposição das rigidezes locais em uma matriz global.

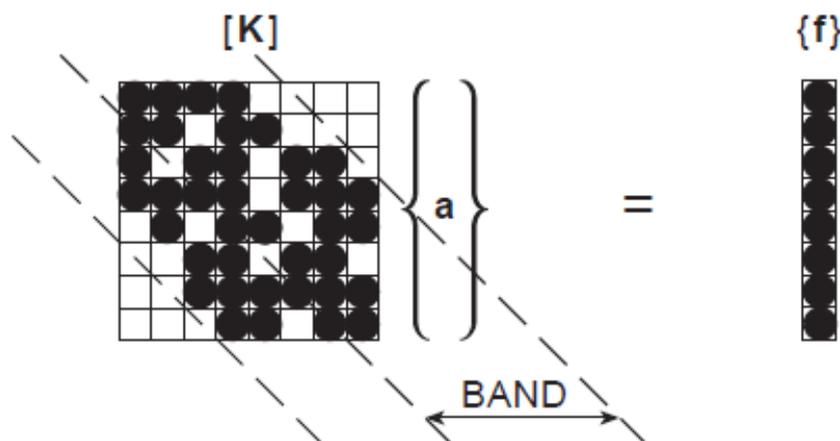


Fonte: Adaptado de O.C. ZIENKIEWICZ (2000).

Na figura 15 acima pode ser como é construído a matriz de rigidez  $K$  de forma local para cada elemento, reordenando cada matriz local dentro de uma matriz global de acordo com o nosso número graus de liberdade (GL's) conhecidos de forma que tenha apenas um sistema constituído por todos elementos que são dependentes dos nós distribuídos na rede.

Assim a matriz global é simétrica e sua diagonal principal representa os elementos, nos extremos da matriz geralmente tem valores nulos. Isso fica claro na figura 16 abaixo:

**Figura 16 - Sistema global.**



**Fonte: Adaptado de O.C. ZIENKIEWICZ (2000).**

A matriz de rigidez é multiplicada pela a matriz dos deslocamentos resultando na matriz de força, conforme havia sido mencionado na equação 2.25.

Agora é preciso impor as condições de contorno eliminando as linhas e as colunas das matrizes de deslocamento, força e rigidez da equação 2.30 de acordo com o grau de liberdade do problema.

Finalmente é feita a inversa da matriz  $K$  e multiplicando pela matriz  $F$  é obtido a matriz de deslocamentos  $Q$  através de variações iterativas de eliminação de Gauss, obtendo posteriormente as reações de apoio e as forças das molas, essa parte já pode ser considerada como o segundo passo da análise em elementos finitos, ou também chamado como processamento (KIM & SANKAR, 2011).

Toda análise de elementos finitos usando método do autovalor tem como objetivo encontrar a matriz global, obtidas as matrizes de força e rigidez, encontrar a matriz de deslocamento e respectivas reações nos elementos é de simples solução dependendo do tamanho do sistema, esse é a metodologia até agora discutida, o que vai diferenciar para cada modelo, é como os elementos serão analisados, podendo ser considerados como barras, treliça, vigas, pórticos ou elementos isoparamétricos.

Cada um deles terá um sistema de coordenadas local usando um sistema de eixo diferente por elemento e um GL diferente referente a forma que ele sofre tensão seja ela de flexão, torção ou tração. Isso infere em uma ou mais matrizes de transformação multiplicando a matriz de rigidez local ou global devido as características daquele modelo de elemento adotado.

E finalmente o pós-processamento que é a etapa final do método que tem como objetivo colocar da melhor forma possível visualmente os resultados finais desejados no projeto (ZIENKIEWICZ, 2010).

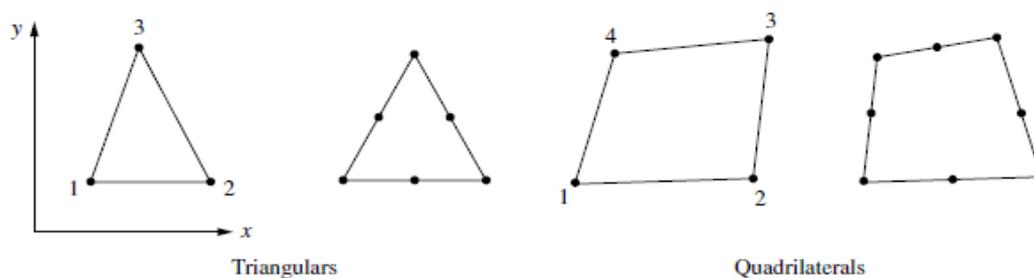
#### 2.2.4 Tipos de Elementos

Até o presente momento foi visto sobre o FEM desde o seu surgimento, concepção bem como seus conceitos gerais e metodologia, porém pouco foi discutido sobre os elementos constituintes da malha. Caso se esteja lidando com uma simulação de um problema simples, onde a geometria é na maioria das vezes simétrica com condições de contorno bem distribuídas, é possível adotar no problema uma simplificação em sua geometria. Com apenas o uso de elementos unidimensionais o custo operacional é bem baixo, e os dados são obtidos muito rapidamente. Podendo para uma primeira análise do problema ser feita mais facilmente, mas com pouca precisão, é ideal para maior agilidade ter uma noção do resultado final.

Há também a opção de escolher apenas elementos bidimensionais para uma análise em 2D através de elementos triangulares e quadriláteros, normalmente também chamado de análise de casca ou superfície, pois a malha é feita apenas na superfície externa do corpo como se não houvesse espessura, o que não é verdade. Isso garante uma rapidez e precisão maior do que se fosse

analisar em uma dimensão logicamente, porem ele demanda um esforço e um tempo computacional maior se comparado com o de apenas uma dimensão, é geralmente usado em problemas de fenômenos do transporte e para problemas estáticos. Na figura 17 é visto como a posição nodal se dá em geometrias simples e como a numeração dos nós são definidas no sentido anti-horário do elemento.

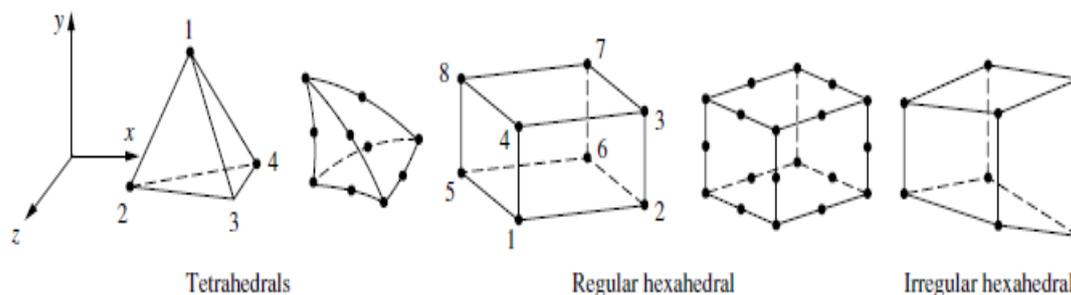
**Figura 17 - Elementos triângulos e quadriláteros.**



**Fonte: Adaptado de L. Logan Daryl (2007).**

E o mais completo de todos que é a análise em 3D, o qual discretiza objetos sólidos através de elementos tetraedros e hexaedros, tornando possível a solução de problemas complexos que demandam dados muito específicos dentro de uma malha complexa, ou problemas que possuem não linearidades (BATHE, 1982). Na figura 18 é mostrado os elementos mais utilizados:

**Figura 18 - Elementos tridimensionais.**



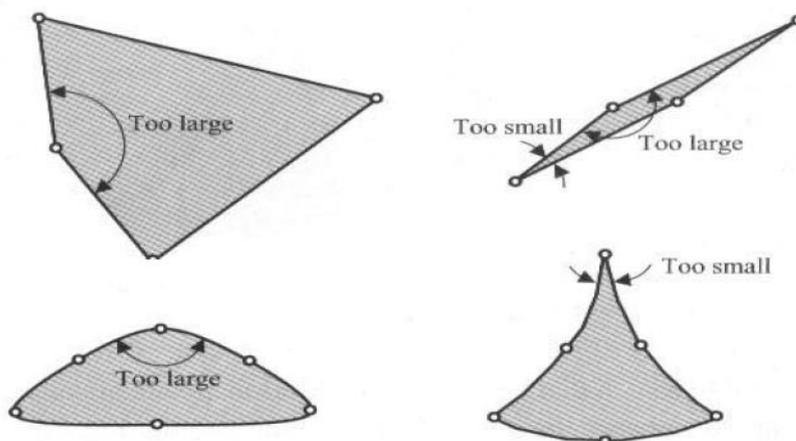
**Fonte: Adaptado de L. Logan Daryl (2007).**

A escolha dependerá da simplificação do problema se é possível fazer sua escolha ou não, o que não acarreta numa imprecisão de resultado se escolhido elementos mais simples, depende de caso a caso, horas é mais vantajoso escolher análises mais simples como é o caso de flambagem no qual não há grandes diferenças no gradiente de tensão no material, possuindo um tempo de execução computacional menor. Como também para problemas complexos é possível usar análises de apenas uma ou duas dimensões, mas para esse tipo de simulação dados mais precisos com uma demanda de cálculos maiores pode ser uma escolha mais segura.

A numeração dos nós antes já discutida é mantida preferencialmente no sentido anti-horário na maioria dos algoritmos computacionais devido a modelos matemáticos que estabelecem os padrões de funcionamento do algoritmo do programa, para conseguir que a solução numérica do modelo seja possível (REDDY, 2005).

Já o mapeamento dos elementos se dá devido ao cálculo do Jacobiano de cada elemento composto pela malha, o qual é estimado por uma integral da transformação de coordenadas para cada elemento, sendo que todo ponto formado anteriormente por esse elemento, é transformado suas coordenadas em relação à um outro elemento mestre e são recolocados de forma igual neste novo elemento (REDDY, 2005).

**Figura 19 - Elementos com ângulos agudos ou obtusos.**



Fonte: Adaptado de J.N. REDDY (2005).

Para um elemento qualquer na figura 19 acima é visto como a posição dos nós faz como que o canto possua ângulos muito agudos ou oblíquos, fazendo com que o Jacobiano calculado daquele elemento se torne muito grande (REDDY, 2005). Por isso que vários programas têm à sua disposição ferramentas que demonstram como está a qualidade da malha gerada automaticamente pelo usuário, e a porcentagem ou os locais em que se encontram esses elementos distorcidos, ou que a o resultado da malha não está convergindo muito bem.

### 3 METODOLOGIA

Esta seção tem como foco explicar como se sucederá as análises, elas estão divididas em três ramificações. No primeiro segmento desta seção será mostrado os critérios matemáticos que irão definir as fórmulas a serem usadas para obtenção dos resultados da parte analítica. Eles serão postos em ordem, de forma que o leitor venha a ver os resultados de forma simples, explicando qual fórmula será usada dependendo do  $\lambda$  do perfil analisado, e outras variáveis embutidas que influem nessa escolha.

Na segunda parte segundo Hibbeler (2009) é definido as diferenças das regiões em que se encontra o  $\lambda$ , e dependendo do seu valor é dado uma fórmula diferente para a tensão admissível o qual tem como relação a região em que se encontra cada barra no gráfico tensão admissível x índice de esbeltez ( $\lambda$ ). E a última será a análise computacional, a qual demonstrará os valores obtidos pela simulação que tem como objetivo de obter a tensão dos perfis para cada simulação, encontrando os principais modos de flambagem de cada perfil, para  $n=1;2; e 3$ .

#### 3.1 ESTUDO DO PROBLEMA USANDO METODO ANALÍTICO

O primeiro passo será fazer a análise analítica toda especificada anteriormente através da norma NBR 8800-2008 e na literatura, usando as fórmulas para flambagem em compressão. Serão estudados 5 perfis estruturais diferentes, o primeiro com seção transversal W do tipo, o segundo sendo um do tipo quadrado vazado, o terceiro uma circular vazada, o quarto com seção transversal do tipo U, e o quinto de perfil estrutural Z.

Para todos esses perfis serão estudadas 3 barras de tamanhos diferentes para cada seção transversal, totalizando um total de 15 vigas diferentes neste estudo. Sendo que serão escolhidos comprimentos diferentes para todas elas, obedecendo a norma NBR 8800:2008 em que para um carregamento de compressão, o índice de esbeltez não deve ser superior a 200 e menor do que 89.

Para ser melhor visto nos resultados o que é se esperado dos objetivos específicos deste trabalho, é escolhido comprimentos de barras nos quais uma dessas 3 barras tenha o índice de esbeltez ( $\lambda$ ) bem próximo de 89, sendo classificada como curta, a segunda seja bem próxima do índice de esbeltez crítico classificada como intermediária, o qual depende do material, e a terceira com índice de esbeltez ( $\lambda$ ) perto de 200, sendo classificada como esbelta. Isto é feito para demonstrar as diferenças dos efeitos de flambagem para essas 3 barras mesmo possuindo uma seção transversal idêntica.

Sendo o primeiro perfil especificado como uma viga W de perfil comercial tipo I, será feito uma comparação das forças de compressão e tensões admissíveis para 3 colunas de tamanhos diferentes, porém com mesma seção transversal. Essas barras sofrem um carregamento concêntrico de compressão, e é admito a teoria embasada anteriormente na seção 2.1.1 para um caso ideal.

Por último na parte analítica será comprovado através dos cálculos os resultados das forças de compressão para o plano preferencial de flambagem bem como as tensões críticas de projeto que a coluna resiste. Comparando as tensões admissíveis e definindo se flamará na região elástica, inelástica, ou escoará antes de flambar.

### 3.1.1 Propriedades do material e dos perfis estruturais.

O primeiro perfil a ser analisado será um do tipo W (*Wide Flange*), o qual é laminado e pode vir nas formas de H e I. Muito utilizados em aplicações estruturais como na construção civil, indústria mecânica, e naval. Ou seja, atende uma vasta gama de aplicações, e inclusive podendo ser resistente a corrosão dependendo de camadas que podem ser depositadas.

Escolhendo o perfil de aço estrutural laminado ASTM (*American Society for Testing and Materials*) A-36 disponibilizado pelo catálogo comercial da Gerdau com a nomenclatura W150 X 37,1 do tipo H conforme pode ser visto na figura 20. As propriedades mecânicas para serem feitos os cálculos são principalmente a tensão de escoamento ( $f_y$ ) igual a 250 MPa, a constante de proporcionalidade elástica  $E$  igual à 200 GPa, e o modulo de elasticidade transversal  $G$  é igual 77 GPa. Os comprimentos escolhidos para as três barras

desse perfil são de 7,5; 4,5; e 3,5 metros, sendo elas classificadas como esbelta ou longa, semicompacta ou intermediária, e curta ou compacta respectivamente.

Seguindo abaixo as propriedades geométricas nos quadros abaixo para o primeiro perfil estrutural W150x 37,1:

**Quadro 1 - Principais variáveis geométricas.**

$C_w(cm^6)$	$J(cm^4)$	$Area(cm^2)$	Altura $h(cm)$	$\frac{h_w}{t_0}$
39930	20,58	47,8	162	14,7

Fonte: Pfeil (2009).

Os momentos de inércia e raio de giração foram obtidos pela tabela, mas também podem ser encontrados por formulas simples correspondendo a sua geometria. Seus valores podem ser vistos abaixo:

**Quadro 2 - Momentos de inércia e raio de giração.**

Eixo x-x		Eixo y-y	
$I_x(cm^4)$	$i_x(cm)$	$I_y(cm^4)$	$i_y(cm)$
2244	6,51	707	3,84

Fonte: Pfeil (2009).

Uma das principais dimensões são vistas abaixo, elas definem o comprimento das medidas das mesas e alma que o perfil possui, sem elas não é possível verificar flambagem local. Seus valores podem ser vistos no quadro 3:

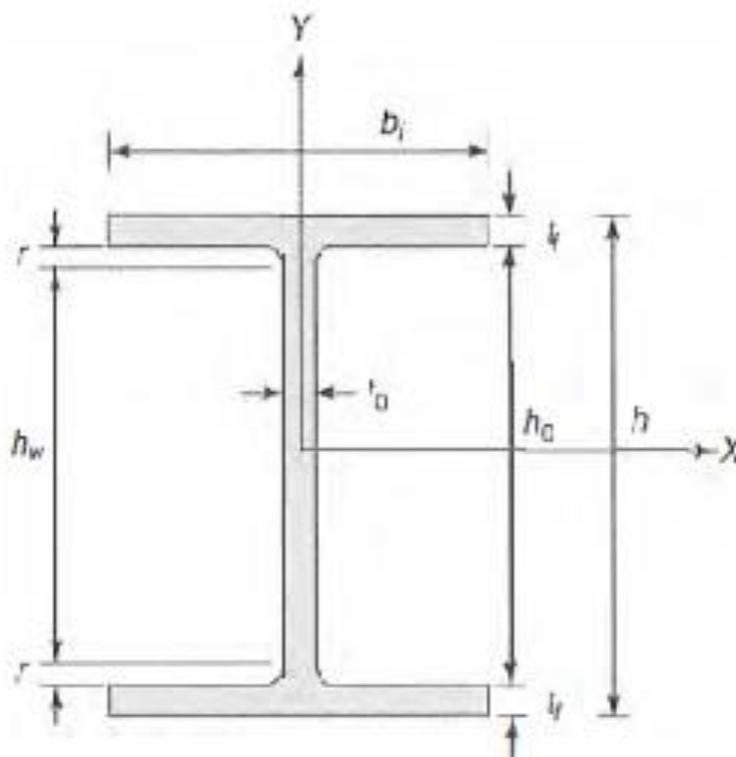
**Quadro 3 - Medidas das mesas e alma.**

Alma		Mesa	
$t_0(mm)$	$h_0(mm)$	$t_t(mm)$	$b_t(mm)$
8,1	139	11,6	154

Fonte: Pfeil (2009).

É demonstrado na figura 20 abaixo a geometria do perfil W e suas medidas já apresentadas:

Figura 20 - Primeiro perfil estrutural W 150 X 37,1.

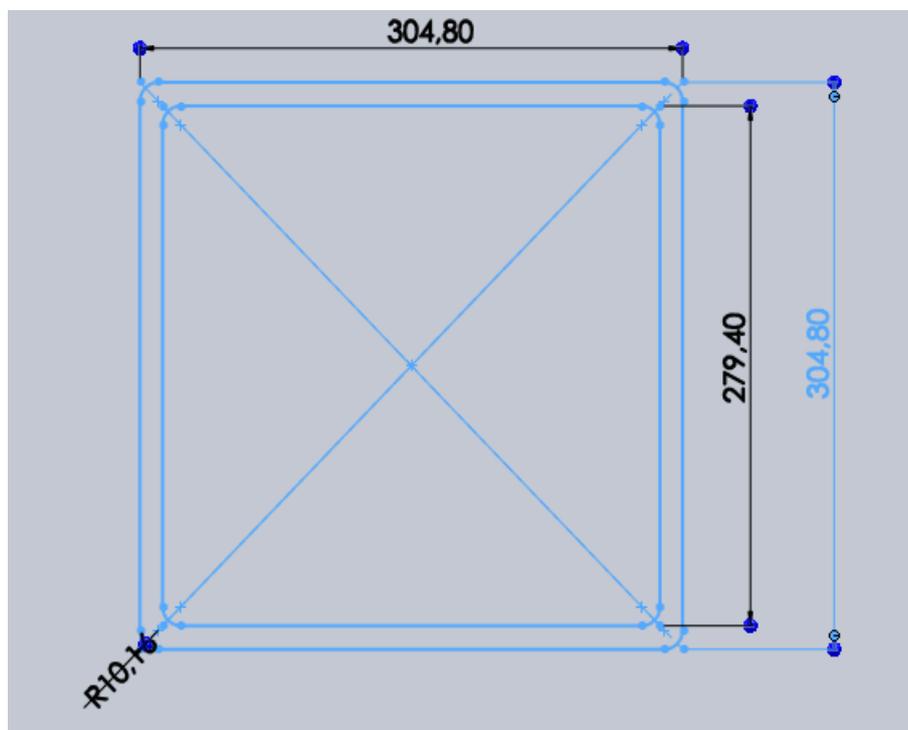


Fonte: Fonte: Adaptado de P. WALTER (2009).

Existem tabelas comerciais que não disponibilizam todas elas, fazendo com que seja essencial calcular essas propriedades, elas dependem da geometria do perfil, assim para se obter esses valores existe uma maneira diferente para cada perfil analisado.

Para o segundo e o terceiro perfil foram adaptados da literatura clássica do manual de construções de aço da AISC (AMERICAN..., 1963). Como não são mencionados os valores dos raios para o arredondamento dos cantos foi usado para o perfil americano padronizado um valor de 0,4 polegadas. Será usado perfis ocios para os dois próximos casos, sendo o segundo quadricular e o terceiro perfil circular respectivamente. Como são perfis padronizados serão usados do mesmo aço estrutural A-36, pela GERDAU os quais são conformados a frio. Ambos são vistos abaixo nas figuras 21 e 22, com as principais medidas geométricas especificadas:

Figura 21 - Segundo perfil estrutural quadricular vazado.



Fonte: Autoria própria.

E no quadro 4 é visto as principais variáveis geométricas do perfil quadrado.

Quadro 4 - Principais variáveis geométricas do 2º perfil.

$I(\text{cm}^4)$	$i(\text{cm})$	Area( $\text{cm}^2$ )	Espessura (mm)
21108	11,92	148,38	12,7

Fonte: **Catálogo da AISC. *Manual of steel Construction*.**

Foi observado que alguns perfis não possuem algumas variáveis necessárias para os cálculos de flambagem por torção e flexo-torção em razão de não ser relevante suas verificações. Isso se dá pois esses dois não flambam normalmente por estes jeitos. Ambos servirão apenas como exemplo de obtenção de dados comparativos, visto que este escopo já possui um perfil estudado que sua flambagem se dá por este modo. Os comprimentos escolhidos para as três barras desse perfil são de 23, 15, e 11 metros. Na figura 22 e no quadro 5 são

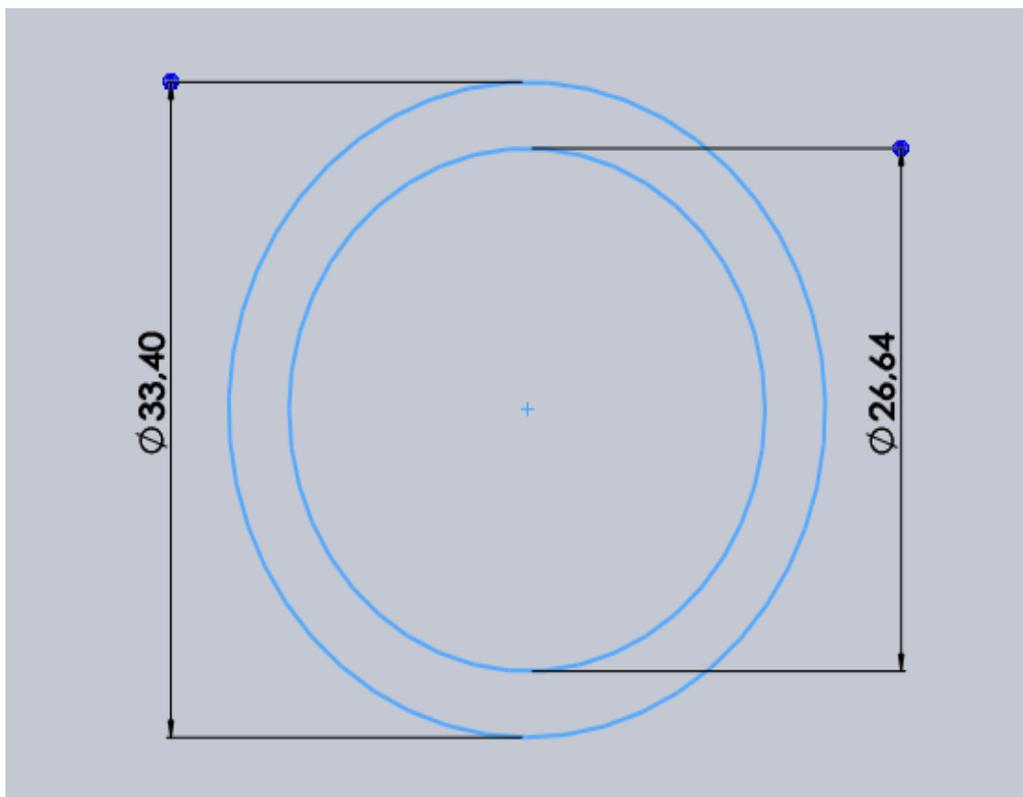
especificados a geometria do perfil e as suas variáveis geométricas respectivamente logo abaixo:

**Quadro 5 - Principais variáveis geométricas do 3º perfil.**

$I(\text{cm}^4)$	$i(\text{cm})$	Area( $\text{cm}^2$ )	Espessura (mm)
3,63549	1,068	3,1863	6,76

Fonte: **Catálogo da AISC. *Manual of steel Construction.***

**Figura 22 - Terceiro perfil estrutural circular vazado.**



Fonte: **Autoria própria.**

Os comprimentos escolhidos para as barras desse perfil são de 2,1; 1,3; e 1,0 metros.

Para o quarto perfil analisado será estudado um perfil de geometria semelhante com um U, ele possui maior robustez em comparação a outros perfis comerciais. É muito usado em implementos agrícolas, na indústria mecânica e automobilística como chassis de ônibus e caminhões, estruturas de sustentação como galpões, silos, escoramentos de pavimentos concretados, monovias para o

transporte de grandes pesos movidos por talhas elétricas, e qualquer outra estrutura metálica em geral (Perfis Gerdau Açominas, Informações Técnicas).

Será feito o estudo do perfil comercial da GERDAU PEL (perfil estrutural leve) U 50,8 X 25,4 X 2 com medidas em milímetros. Através das normas brasileiras NBR 6355:2012 e a norma NBR 14762:2010 é possível calcular algumas das propriedades geométricas que não são especificadas no catálogo comercial, as quais são importantes para o estudo. Os três primeiros valores logo após a sigla U são definidas pelas variáveis  $bw$  correspondendo a altura do perfil,  $bf$  sendo sua largura e  $t$  a espessura.

A coordenada  $x$  do baricentro está disponível na tabela comercial como sendo  $X_{cg}$ , mas pode ser facilmente calculada, pela decomposição da figura em objetos menores, encontrando o centro de massa do perfil como um todo. De acordo com Meriam (2009) é possível encontrar o centro geométrico dessa figura e com ela após outros cálculos encontrar o C.S. do perfil apresentados no apêndice.

É definido pelo catálogo comercial da GERDAU por ser um perfil resistente a corrosão possui uma maior tensão de escoamento, com o valor de 345 Mpa, fazendo com que seu módulo de elasticidade transversal suba para 132,69 MPa. Abaixo no quadro 6 estão os momentos de inércia e raios de giração, eles são necessários para o cálculo das forças de flambagem.

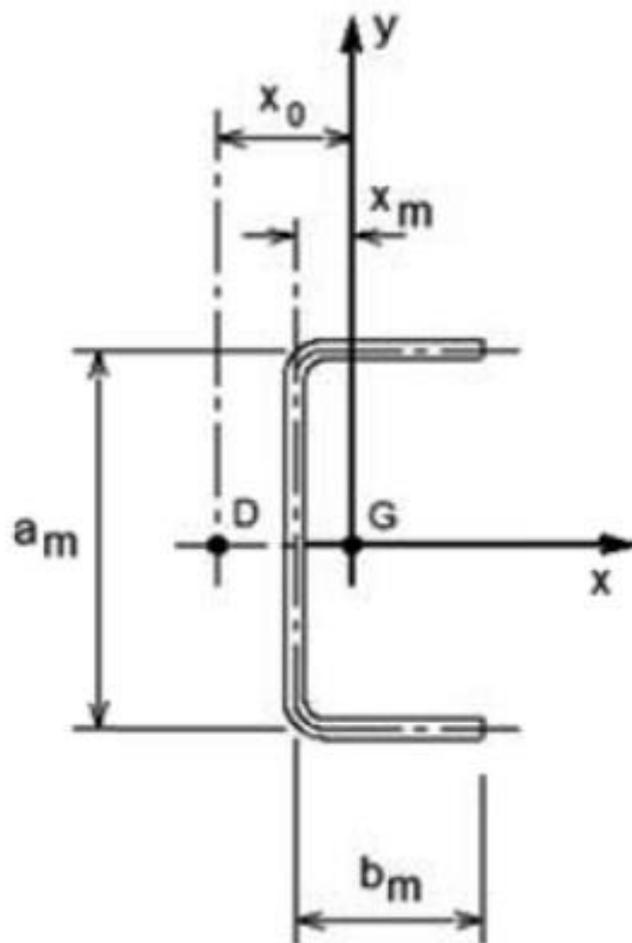
**Quadro 6 - Momentos de inércia e raio de giração.**

Eixo x-x		Eixo y-y		Eixo z-z
$I_x(cm^4)$	$i_x(cm)$	$I_y(cm^4)$	$i_y(cm)$	$I_z(cm^4)$
7,76	1,99	1,22	0,79	8,97

**Fonte: Catalogo GERDAU.**

O perfil pode ser visto na figura 23 sendo demonstrado suas principais variáveis geométricas:

Figura 23 - Quarto perfil estrutural U.



Fonte: ABNT NBR 14762, Dimensionamento de estruturas de aço constituídas por perfis formados a frio, ABNT, 2010.

Os comprimentos escolhidos para as barras desse perfil são de 1,5; 1,0; e 0,8 metros.

E para o quinto perfil estrutural será escolhido um perfil Z  $4 \frac{1}{8} \times 3 \frac{3}{16} \times 4,32$  seguindo a norma americana de aço ADM 2015.

Ele tem como propriedades mecânicas o mesmo aço A-36. Abaixo segue os momentos de inércia e raios de giração no quadro 7.

**Quadro 7- Momentos de inércia e raio de giração.**

Eixo x-x		Eixo y-y		Eixo z-z
$I_x(cm^4)$	$i_x(cm)$	$I_y(cm^4)$	$i_y(cm)$	$I_z(cm^4)$
332,98	4,1148	216,44	3,3274	258,06

Fonte: Programa RFEM.

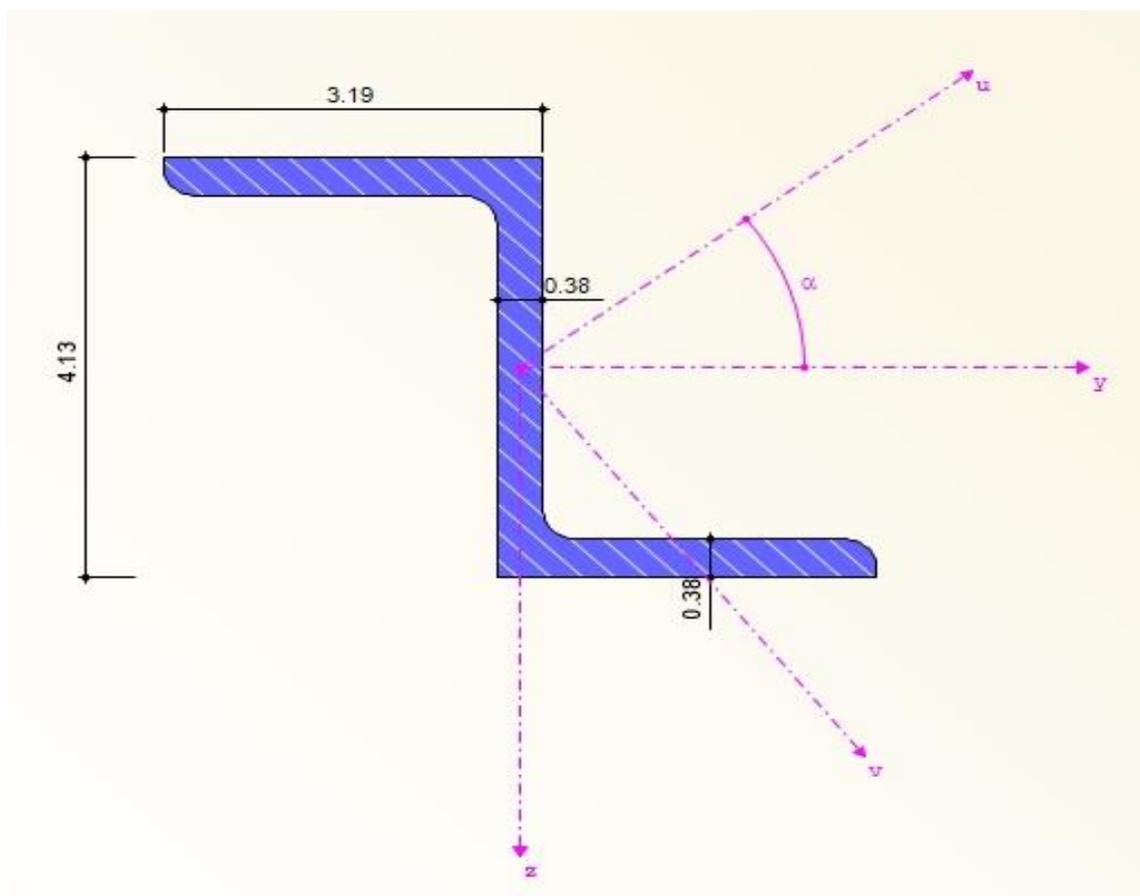
E no quadro 8 temos os dados para encontrar as resistências a flambagem:

**Quadro 8 - Principais variáveis geométricas.**

$Cw(cm^6)$	$J(cm^4)$	$A(cm^2)$	$r_0(cm)$
3437,25	8,32	19,35	5,28

Fonte: Programa RFEM.

Sendo os dados do perfil disponibilizados pelo programa RFEM na figura 24 logo abaixo:

**Figura 24 - Quinto perfil estrutural Z.**

Fonte: Autoria do programa RFEM5.

### 3.2 PROJETO DAS VIGAS PARA FLAMBAGEM ELÁSTICA OU INELÁSTICA

Definido o embasamento teórico, será feito daqui em diante os cálculos de 3 barras de comprimentos diferentes para todos perfis apresentados na seção anterior, o perfil W150 X 37,1, o perfil quadrado vazado, o perfil circular vazado, o perfil U 50,8 X 25,4 X 2, e perfil Z 105 X 82 X 9,65. Todos levando em consideração as fórmulas abaixo são estabelecidas pelo SSRC (*Structural Stability Research Council*) e a AISC (*American Institute of Steel Construction*) seguindo o raciocínio abaixo.

Para poder ser calculado a tensão que a viga aguenta será substituído os valores para um perfil qualquer, a tensão de escoamento, limite de elasticidade, e a relação do índice de esbeltez do respectivo perfil com comprimento adotado, e o menor raio de giração do perfil. A equação 3.1 serve para encontrar essa tensão admissível para o perfil estudado, sendo ela apresentada como:

$$\sigma_{adm} = \frac{12*\pi^2*E}{23*\left(\frac{K*L}{r}\right)^2} \quad \left(\frac{K*L}{r}\right)_c \leq \left(\frac{K*L}{r}\right) \leq 200 \quad (3.1)$$

No gráfico em que se varia o índice de esbeltez em relação a tensão admissível, pode-se localizar através do comprimento adotado a barra estudada, ela pode estar em uma das duas regiões, separadas por um valor crítico  $\lambda_c$ , na região a direita desse valor se encontram barras longas, e a esquerda curtas ou intermediárias. O valor crítico é especificado na equação 3.2 abaixo:

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{2*\pi^2*E}{\sigma_e}} \quad (3.2)$$

É definido que quando uma barra tiver esse valor crítico, a tensão máxima que ela aguenta especificamente é a metade do valor da tensão de escoamento. Se a barra estudada estiver à direita desse valor crítico são levados em consideração o equacionamento acima, já que ela é considerada uma barra longa segundo a norma. E se ela estiver à esquerda desse valor as equações a

seguir são para encontrar as tensões admissíveis dessa barra considerada curta ou intermediária, com o fator de segurança embutido nas fórmulas.

Encontrando a tensão máxima e substituindo na equação 3.5 é encontrado a tensão admissível, sendo ela posteriormente comparada com as tensões compressivas desenvolvidas pelos tipos diferentes de flambagem.

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \left[ 1 - \frac{\left(\frac{K*L}{r}\right)^2}{2 * \left(\frac{K*L}{r}\right)^2_c} \right] * \sigma_e \quad (3.3)$$

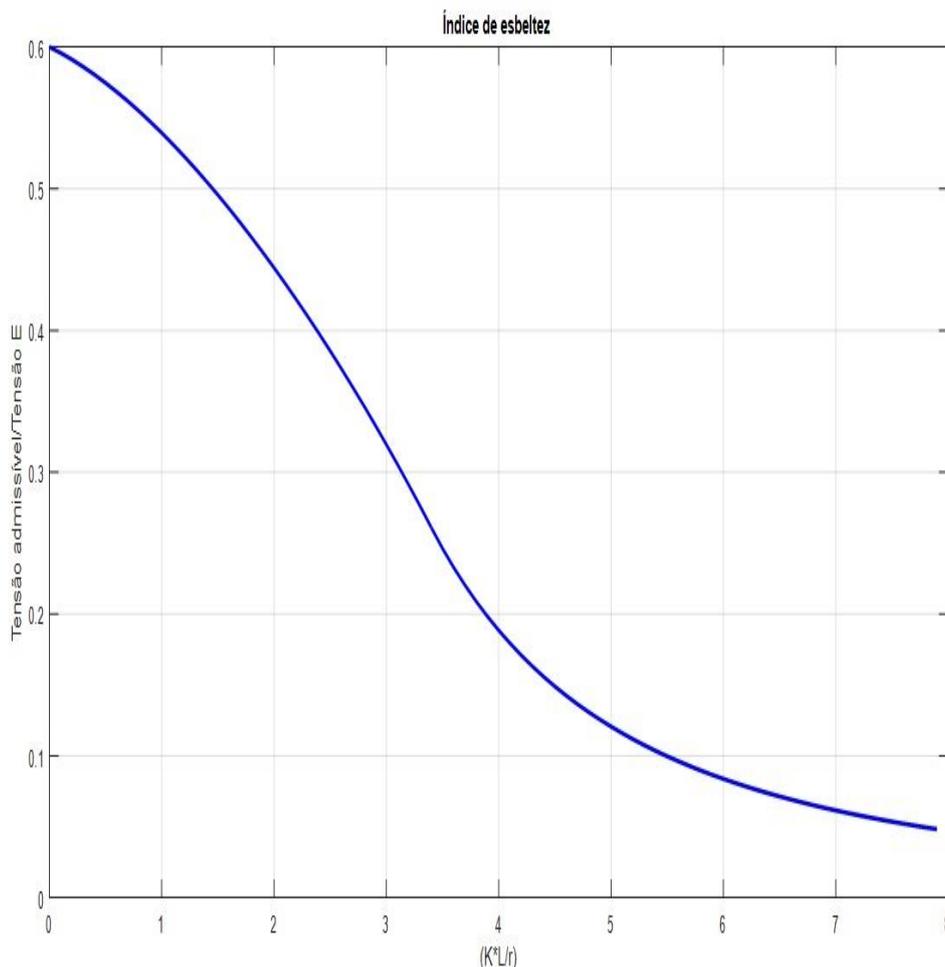
Ao usar diferentes valores de  $\lambda$  é possível analisar diferentes barras de vários comprimentos dentro do estipulado pela norma. E para comparar a tensão admissível encontrada na equação 3.5 que leva em consideração o fator de segurança com a tensão crítica, é necessário multiplicar a tensão crítica pelo fator de segurança.

$$F.S. = \frac{5}{3} + \frac{3}{8} * \frac{\left(\frac{K*L}{r}\right)^2}{\left(\frac{K*L}{r}\right)^2_c} - \frac{\left(\frac{K*L}{r}\right)^3}{8 * \left(\frac{K*L}{r}\right)^3_c} \quad (3.4)$$

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{m\acute{a}x}}{F.S.} \quad (3.5)$$

Como foi visto no referencial teórico, existem vários métodos de se analisar a flambagem de colunas longas, médias e curtas, porém com esta abordagem apresentada por Hibbeler (2009) é possível traçar um gráfico aproximado não levando em consideração a rigidez tangencial, isto está caracterizado na figura 25 o qual varia  $\lambda$ :

**Figura 25 - Curva de tensão admissível para flambagem.**

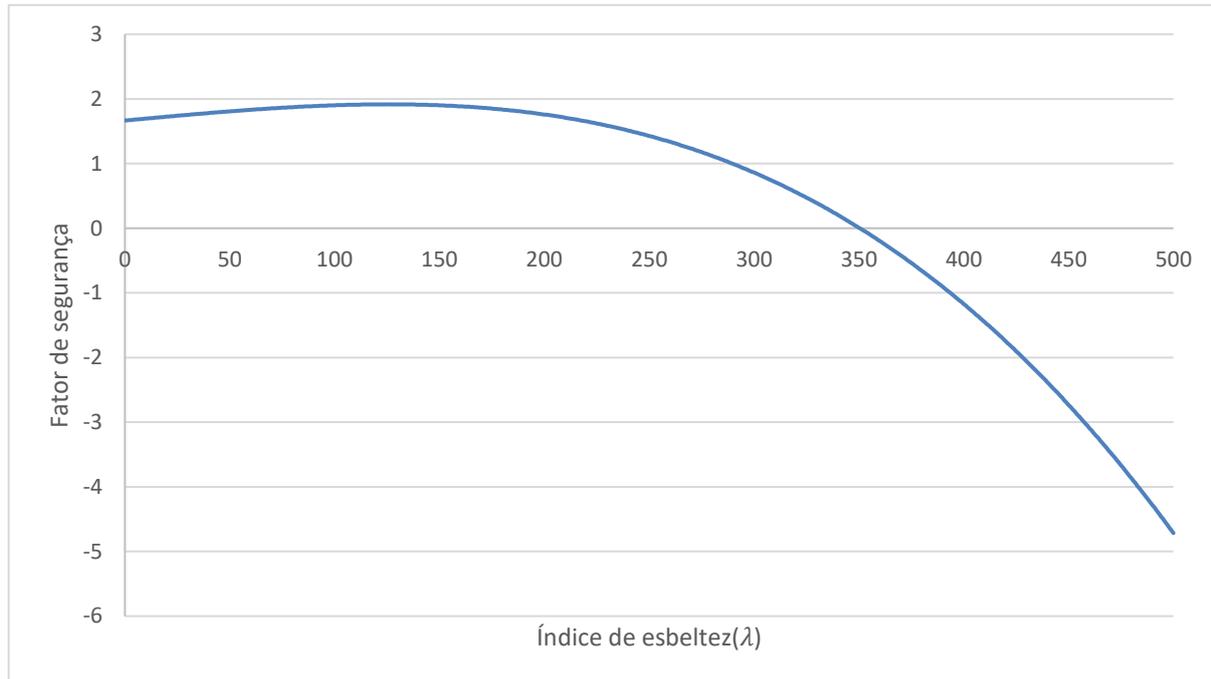


**Fonte: Adaptado de R.C. HIBBELER (2009).**

Adotando-se um perfil aleatório, como por exemplo o perfil W antes já mostrado, e traçando o gráfico do fator de segurança em relação ao índice de esbeltez ( $\lambda$ ) é possível entender como as barras de vários comprimentos diferentes se comportam.

Conforme é estipulado em várias literaturas como por exemplo Hibbeler (2009), Popov (2014), Pfeil (2009), e a norma 8800:2008, a relação do  $\lambda$  das barras de aço devem se limitar a ficar dentro de uma região, entre 89 e 200. Se estiverem fora dessa faixa a tensão na barra irá ultrapassar a tensão de escoamento do material fazendo-o alterar seu valor, não obedecendo a relação de proporcionalidade de Euler. É possível ver o porquê dessa região ser preferencialmente adotada pela norma na figura 26 abaixo.

**Figura 26 - Relação do fator de segurança e o índice de esbeltez**



**Fonte: Autoria própria.**

É visto que a curva converge em aproximadamente 350 e mesmo assim é possível ter um fator de segurança positivo contra o carregamento de compressão, mas para efeitos de engenharia em projetos estruturais um fator de segurança entre 1,5 a 2 muitas vezes é o mínimo que se espera possuir. É possível também notar que vigas muito curtas possuem um alto fator de segurança, mas na norma é adotado o valor mínimo de 89. Isso é devido a tensões residuais que o material pode possuir inerentes ao processo de fabricação.

Conforme é aumentado o comprimento da barra é atingido um máximo usando a equação 3.2 e 3.4 e substituindo os valores de  $\lambda$  fazendo eles tenderem a zero na fórmula, é visto que o fator de segurança tende a convergir para 1,67, e pode chegar até um valor máximo de 1,92 aproximado quando substituído o valor de  $\lambda_c$ .

Esta metodologia é muito prática por não levar em consideração fatores não-lineares como a mudança de propriedades mecânicas do material. Isso pode ser visto nas equações apresentadas neste capítulo já que elas dependem do valor do módulo de elasticidade, e tensão de escoamento, apenas variando-se  $\lambda$ ,

o que para conseguir uma representação da realidade deve ser levado em conta esse fator.

No começo do gráfico as barras mais curtas possuem uma menor rigidez pois o material se encontra sobre tensões maiores que o escoamento do material, isto faz com que seja necessário adotar o módulo tangencial para a obtenção de dados mais precisos.

Esse método é de fácil aplicação também pelo fato de poder-se comparar várias vigas de um mesmo material, mas com seções transversais diferentes. Simplesmente pelo fato de que a função  $\sigma_{adm}/\sigma_{esc}$  é dependente principalmente de do índice de esbeltez ( $\lambda$ ) e as outras variáveis serem constantes. Com isso a comparação entre perfis para um projeto estrutural é mais direta, usando barras de mesmo comprimento o perfil que tiver a maior relação tensão admissível sobre seu próprio peso será o mais apropriado.

Essa análise tem como cunho diferenciar como deveria ser abordado nos cálculos para se encontrar a real tensão admissível da barra para um carregamento de compressão, mas para efeitos de cálculos a flambagem inelástica não será levada em consideração.

Para o método de elementos finitos usando o *software* Ansys a metodologia usada será um pouco diferente, esta ferramenta irá auxiliar a encontrar os principais modos de flambagem de cada perfil e sua magnitude, já que analiticamente não é possível ver fisicamente como a viga irá se comportar pois são muitos fatores a serem levados em consideração devido à instabilidade estrutural do perfil e efeitos não-lineares, sendo apenas possível ter uma noção do seu valor usando a equação (2.5).

### 3.3 ESTUDO DO PROBLEMA USANDO MÉTODO COMPUTACIONAL

Definido os perfis o próximo passo será as simulações computacionais. Sendo os desenhos feitos em um *software* CAD, como o Solidworks, e salvos no formato *Parasolid* (\*.x\_t, \*.x\_b), são em seguida feitas as simulações com os comprimentos definidos e as mesmas condições de contorno, como engaste, material, os quais foram adotados na análise analítica.

Usando o programa *Workbench* em auxílio da ferramenta *Ansys Inc.* pela plataforma integrada *ANSYS Workbench* será visto os principais modos de flambagem de cada barra, através das funções Estática Estrutural (*Static Structure*) e Modos de Flambagem (Eigenvalue Buckling) situadas no *toolbox*, elas são arrastadas até o *Esquema do Projeto (Project Schematic)* o qual define quais ferramentas serão usadas. Para isso é definido primeiramente o material utilizado na biblioteca de matérias do programa (*Engineering Data*), no caso escolhido o aço estrutural. Caso não tenha o material desejado na biblioteca do programa, é definido pelo operador é as propriedades de um novo material desejado, depois disso é importado o perfil para o subprograma do *Workbench*, o *Design Modeler*, ou também o perfil pode ser feito o no mesmo (ANSYS, 2013).

No *Mechanical Mode* é feita a malha pelo programa, bem como se necessário é feito o refinamento dos elementos, e a escolha do tipo de geometria, mostrando também os índices de avaliação de cada simulação e a porcentagem de erros devido a quantidade dos elementos não tão bem otimizados escolhidos. Foram feitas simulações com malhas muito fina fazendo o tempo operacional de simulação ser mais alto, porem em comparação com uma malha mediana, o qual é definida como padrão pelo *software* não houve grandes mudanças nos resultados, não foi necessário o seu enfoque. Elas demonstram em questão a qualidade de cada simulação e compara as principais características dos elementos utilizados (ANSYS, 2013).

### 3.3.1 Características adotadas para o funcionamento das simulações.

Para garantir que a simulação funcione sem nenhum problema, é preciso mudar as configurações de cada comando. Na árvore de comando as principais funções são a *Static Structure (A5)* e *Eigenvalue Buckling (B5)*.

No *Static Structure (A5)* são fixados suportes fixos nos dois lados das vigas, fazendo o valor de  $k=1$ . Definido a força no sentido negativo do plano z-z, o qual foi configurado como sendo o sentido da gravidade. A força de compressão é aplicada em uma das extremidades, com uma intensidade de 1N, o qual será de utilidade mais tarde. E nas configurações (*Analysis Settings*) são definidos um

total de 2000 passos (*substeps*), com uma quantidade mínima e inicial de 20. Isso se dá para haver uma convergência dos dados na simulação.

Em controles não-lineares (*Nonlinear Controls*) a estabilidade (*Stabilization*) fica em constante e método é mudado para *Damping*, o fator de amortecimento (*damping factor*) é mudado para um valor bem pequeno 0,0001.

Também na ferramenta Eigenvalue Buckling (B5) a configuração da análise é também. Em opções escolhe-se um valor de 10, para encontrar os dez primeiros modos de flambagem do perfil, são definidos tantos modos pois há um espelhamento no valor das cargas de flambagem, assim por exemplo o último e o primeiro modo possuem a mesma carga, mas com sinais diferentes. E em controles de saída (*Output Controls*) as opções para deformação e tensão são mudadas para "sim".

Fazendo todas essas configurações e escolhendo as soluções que mais são importantes, como deformação total (Total Deformation) e tensão equivalente (Equivalent Stress) é feita a simulação. São mostradas no visor todos os modos de flambagem nos dados tabulados (Tabular Data), sendo que na simulação apenas o último modo é mostrado na tela. Observando o principal dado que interessa na tabela há os valores de multiplicadores de carga. Como foi escolhido uma tensão da carga de compressão de  $F=1$  N, basta multiplicar o fator por um para encontrar a força que desenvolve um modo de flambagem no perfil.

Finalmente na seção de resultados do método computacional serão apresentados os valores do carregamento necessário para ocorrer cada modo de flambagem e comparando graficamente com o método analítico, juntamente com as suas características, as quais algumas já eram esperadas pelo método analítico.

E para alguns casos pode ser conferido no apêndice que nos cálculos de flambagem a tensão crítica ultrapassa a tensão de escoamento mesmo para valores dentro dessa faixa. Isso faz com que a barra escoe primeiramente antes de flambar, decorrendo em uma consideração a ser feita já comentada. É preciso levar em conta fatores não-lineares do material e considerar o módulo tangencial nos cálculos, ou através de simulação encontrando a real tensão admissível já que o valor de rigidez adotado na realidade é menor.

## 4 RESULTADOS

Os resultados estão divididos em dois seguimentos, uma pela parte analítica e outra computacional. Elas têm como objetivo de mostrar os principais valores das tensões de flambagem obtidas pela metodologia embutida em cada seguimento já apresentada, e os valores de carregamento de carregamento que induzem nos principais modos de flambagem para cada perfil.

### 4.1 ANÁLISE ANALÍTICA

Serão estudados cinco perfis para efeito de comparação usando a metodologia apresentada no capítulo 3. Eles foram escolhidos para demonstrar a diferença do efeito de flambagem simplesmente mudando o perfil da seção e os comprimentos de vigas sob compressão. Das tabelas comerciais são definidas todas as principais propriedades geométricas que são de suma importância para o cálculo do carregamento de vigas em compressão, sendo analisadas sob o efeito de flambagem por flexão, torção e flexo-torção.

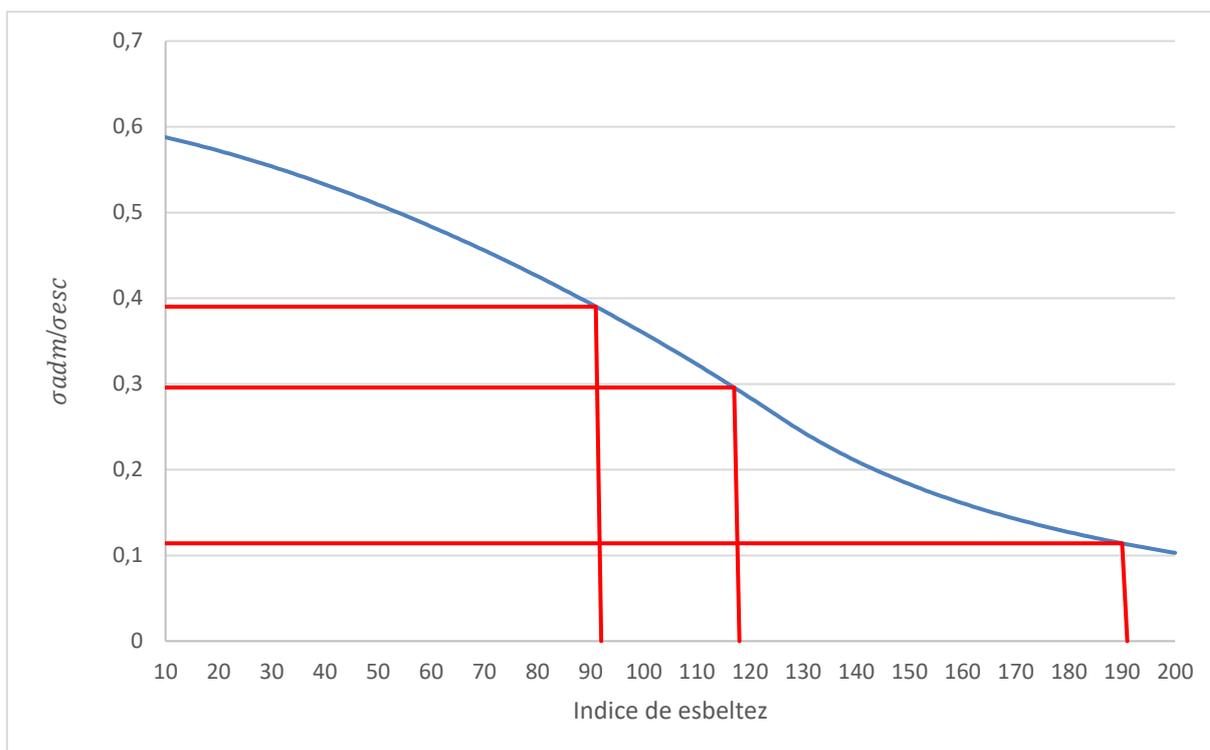
#### 4.1.1 Estudo analítico do perfil W150 X 37,1.

O perfil W150 X 37,1 pode ser analisado substituindo as variáveis obtidas de seu catalogo nas fórmulas, sendo elas principalmente a tensão de escoamento, limite de elasticidade, área da seção transversal, menor momento polar de inércia que no caso desse perfil é o  $I_y$ , ou seja, é visto que ele tende a flambar preferencialmente no plano y.

Substituindo os valores de comprimento no  $\lambda$ , usando o menor raio de giração o qual é tabelado possui um valor de 3,84, e admitindo-se um engaste nas duas extremidades da barra, o que caracteriza um valor de  $k = 1$ , fazendo o comprimento efetivo ser igual ao comprimento da barra, que na ordem crescente para este perfil é os valores em metros de 3,5; 4,5; e 7,5, todos obedecendo a norma NBR 8800:208.

É obtido um valor de  $\lambda_c = 125,66$ , o que indica que para todo valor a sua esquerda será empregado as equações 3.3, 3.4, e 3.5, e a sua direita a equação 3.1. As três barras podem ser vistas na figura 27 abaixo, a qual varia o  $\lambda$  na abcissa e na ordenada a  $\sigma_{adm}$  dividida pela  $\sigma_{esc}$ .

**Figura 27 - Barras de perfil W 150 X 37,1.**



**Fonte: Autoria própria.**

Fazendo outros cálculos, para este perfil adotando-se um comprimento entre 3,5 e 7,7 metros ele está dentro da norma estabelecida, sendo que em relação para a flexão no plano x e a torção é obtido valores de tensão maiores do que a tensão de escoamento, e para um comprimento de 13,44 metros adquire um coeficiente de segurança próximo a zero.

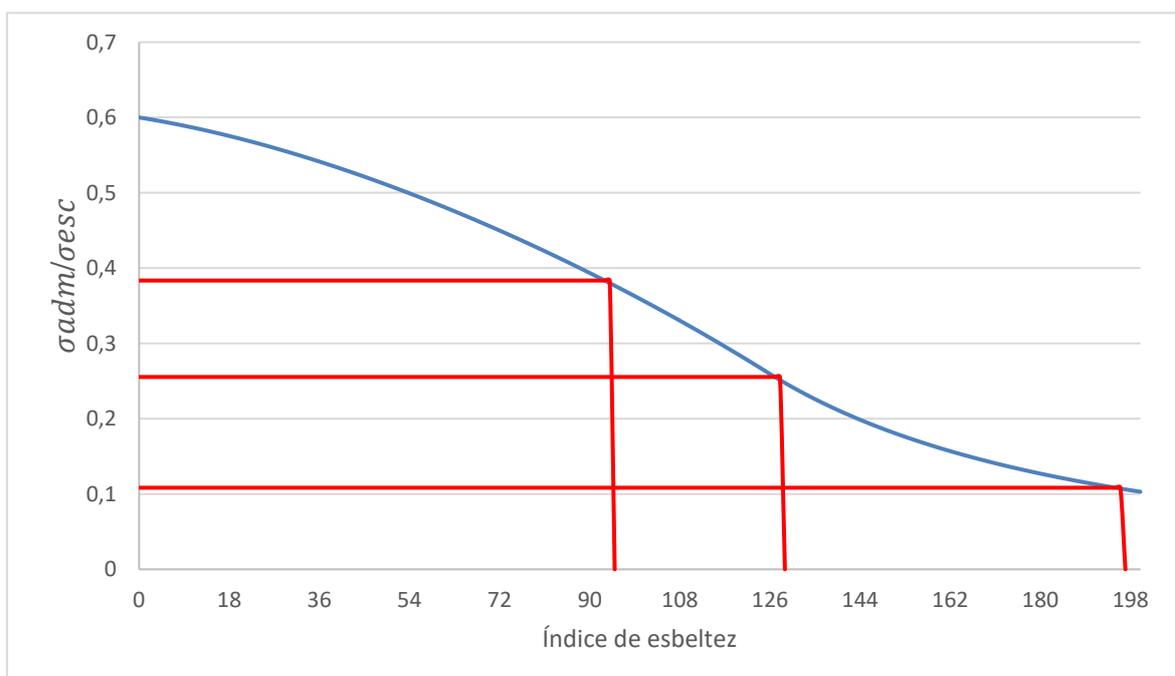
Observando os valores de tensão crítica no apêndice se observa que este perfil tem a maior facilidade para flambar por flexo-torção e por flexão no plano y pelo fato das tensões críticas serem as menores e bem próximas da tensão admissível da viga.

#### 4.1.2 Estudo analítico do perfil quadrado vazado

Para o segundo perfil será estudado o quadrado vazado, este perfil e o próximo a ser analisado, circular, tem em comum o fato de que os dois planos serem simetricamente iguais, poderá ser usado qualquer um dos momentos polares de inercia já que eles são iguais, sendo assim este perfil e o circular não tem planos de preferência a flambagem.

As barras escolhidas podem ser vistas na figura 28 abaixo, e logo em seguida os valores de suas tensões.

**Figura 28 - Barras de perfil quadrada.**



**Fonte: Autoria própria.**

Como o material é diferente o valor do índice de esbelteza crítico ( $\lambda_c$ ) é diferente possuindo um valor de 106,20 para um comprimento de 16,87 m. Analisando todas tensões críticas do carregamento para flambagem em flexão, notasse que todas ficaram abaixo da tensão de escoamento exceto para torção, o que indica que seguem a formulação de Euler.

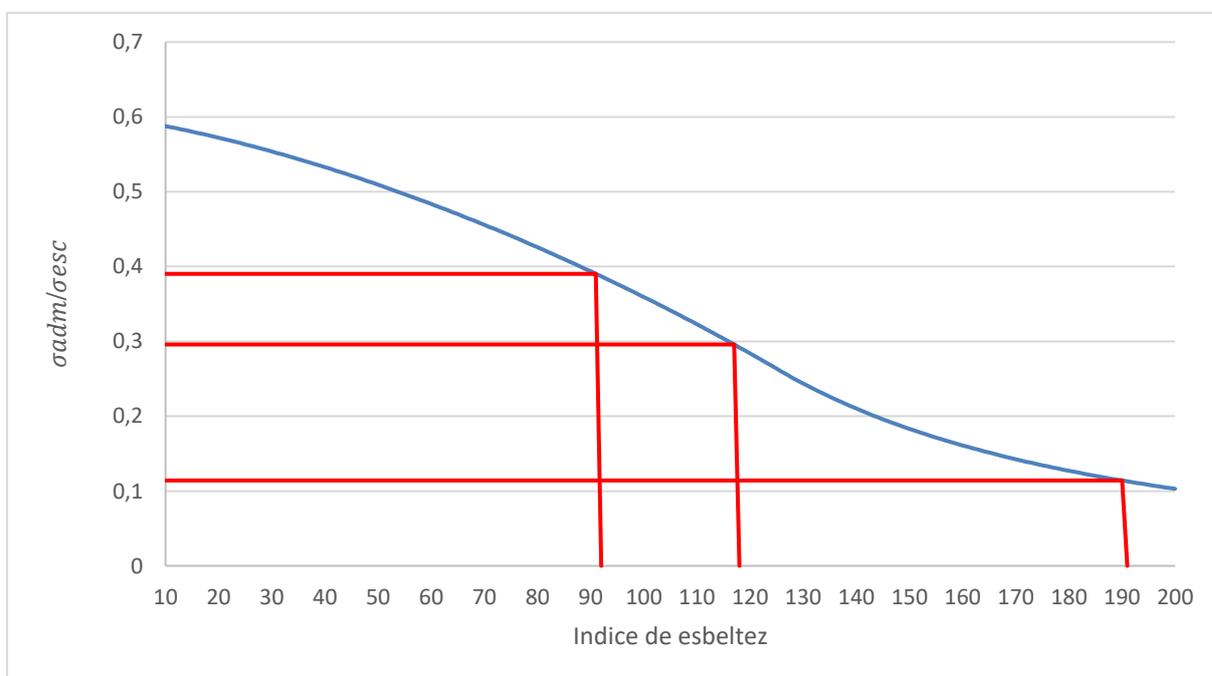
É visto também no apêndice que os planos preferenciais de flambagem para este perfil será por flexão em qualquer um dos dois planos, e por flexo-torção.

Uma observação a ser feita é que tanto o gráfico do perfil quadrado quanto o perfil circular ocas são iguais. Isso se dá, pois, os valores de suas propriedades físicas como a tensão de escoamento e módulo de Young são iguais por ser o mesmo material.

#### 4.1.3 Estudo analítico do perfil de geometria circular vazada.

Para o terceiro perfil, dessa vez com seção circular vazada. Também com valores geométricos padronizados da norma AISC. Foram calculados todas as forças críticas e tensões admissíveis, sendo que nenhum dos corpos de prova foi constatado uma tensão maior do que a de escoamento do aço estrutural. O gráfico que representa as barras pode ser visto na figura 29 logo abaixo:

**Figura 29 - Barras de perfil circular vazadas.**

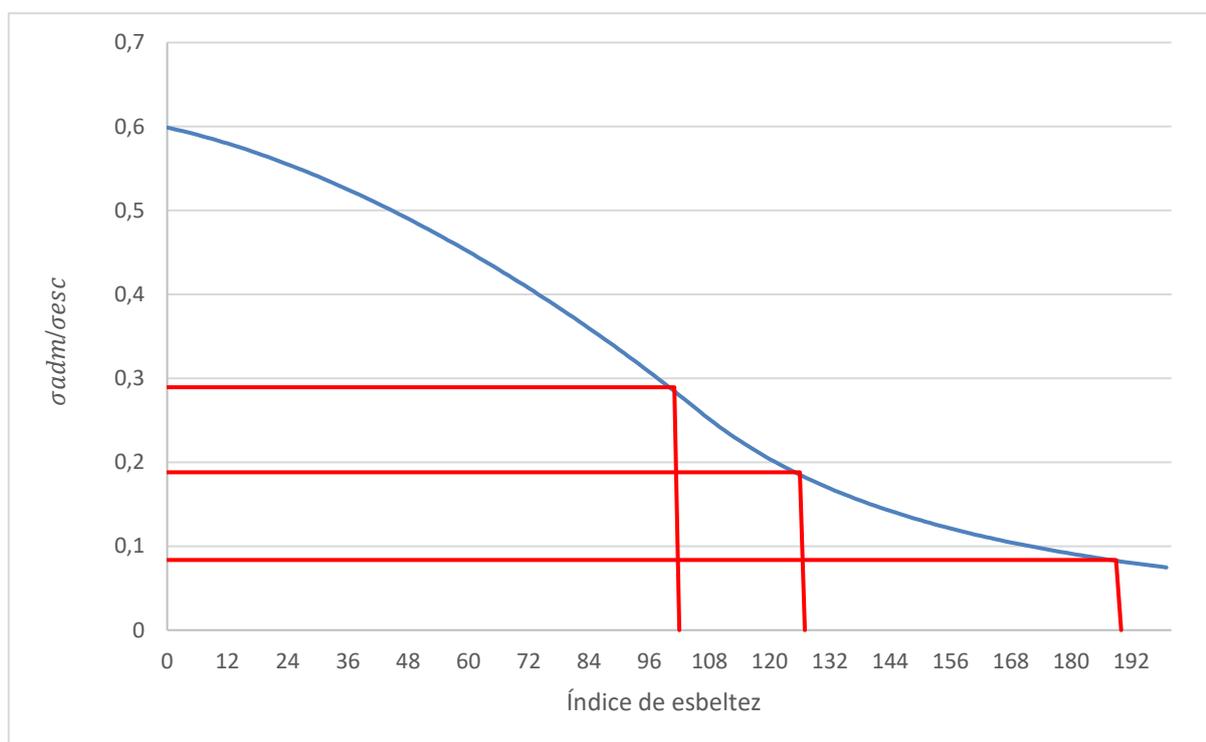


Fonte: Autoria própria.

#### 4.1.4 Estudo analítico do perfil U

Seguindo a mesma metodologia conforme foi explicada anteriormente. É analisado que para o perfil U da GERDAU a flambagem local do perfil também não ocorre. As seguintes características das barras em relação ao seu índice de esbeltez pode ser visto na figura 30 abaixo:

**Figura 30 - Barras de perfil U.**



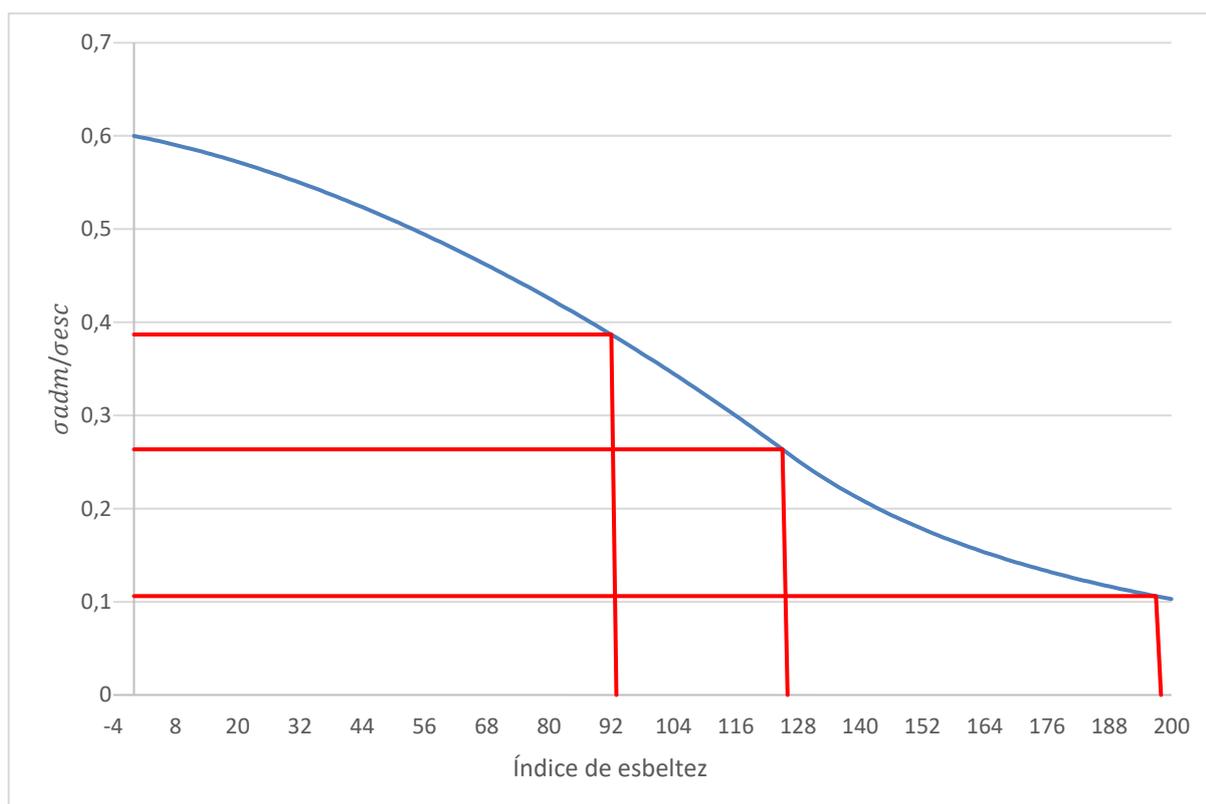
**Fonte: Autoria própria.**

Foram calculados as forças críticas e tensões admissíveis e constatado que nenhum dos corpos de prova obteve uma tensão maior do que a de escoamento do aço estrutural para a tensão de flexão do plano  $y$  e a tensão de flexo-torção. Também foi verificado que os valores de tensão crítica para este perfil em relação a flexo-torção tiveram os valores mais próximos da tensão admissível, o que era se esperado, provando que este perfil U tem maiores chances de flambar deste modo, conforme foi visto na literatura.

#### 4.1.5 Estudo analítico do perfil Z

Essas barras estão segundo o gráfico na figura 31 abaixo nas seguintes regiões:

**Figura 31 - Barras de perfil Z.**



**Fonte: Autoria própria**

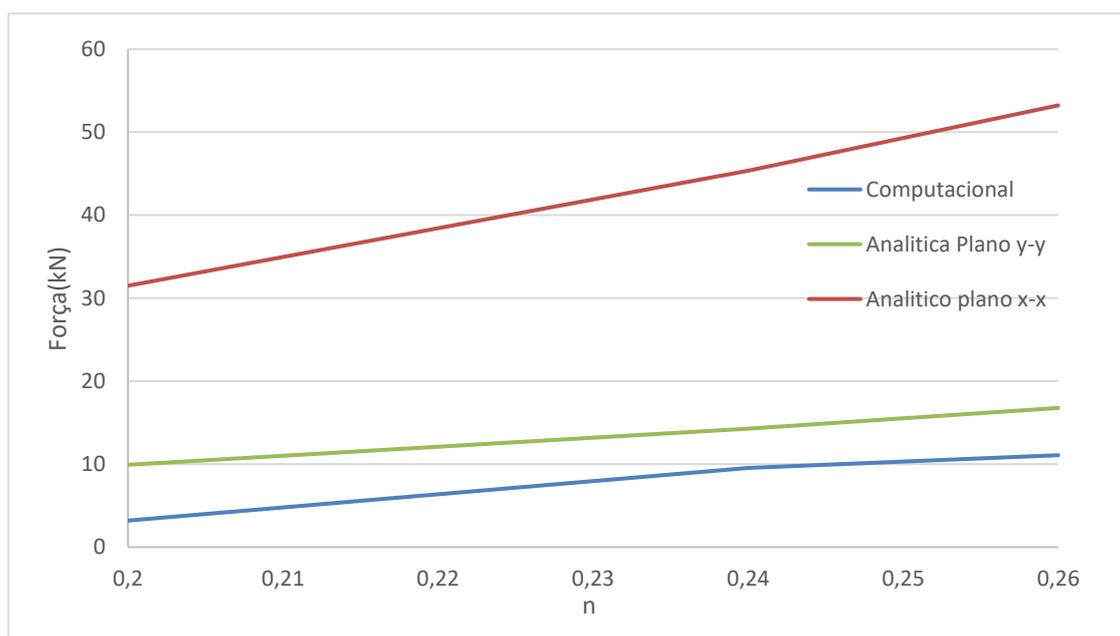
#### 4.2 ANÁLISE COMPUTACIONAL

São mostrados em gráficos comparando os valores das forças críticas de flambagem para os principais modos, e as forças críticas encontradas via análise analítica, comparando se elas no mesmo patamar, ou próximas, como é imprevisível o modo que a barra irá deformar analiticamente é melhor proceder deste modo. Os principais modos de flambagem estão apresentados na seção do apêndice, sendo que aqui serão discutidos os resultados das análises.

#### 4.2.1 Estudo computacional do perfil estrutural W150x37,1.

Comparando todas barras deste perfil é visto que devido a construção geométrica do perfil o plano preferencial para ocorrer a flambagem foi no plano y. Como pode ser observado nos gráficos das figuras 33, 34, e 35 abaixo:

**Figura 32 - Perfil W de comprimento 7,5 metros.**



**Fonte: Autoria própria.**

O gráfico é em função da força de flambagem aplicado no perfil tanto para o plano x e y, comparando os valores obtidos pelo software, sendo que o valor na abcissa  $n$  indica o valor aproximado do modo de flambagem que os cálculos analíticos obtiveram, para poder indicar quão próximos estão dos valores obtidos pelas simulações.

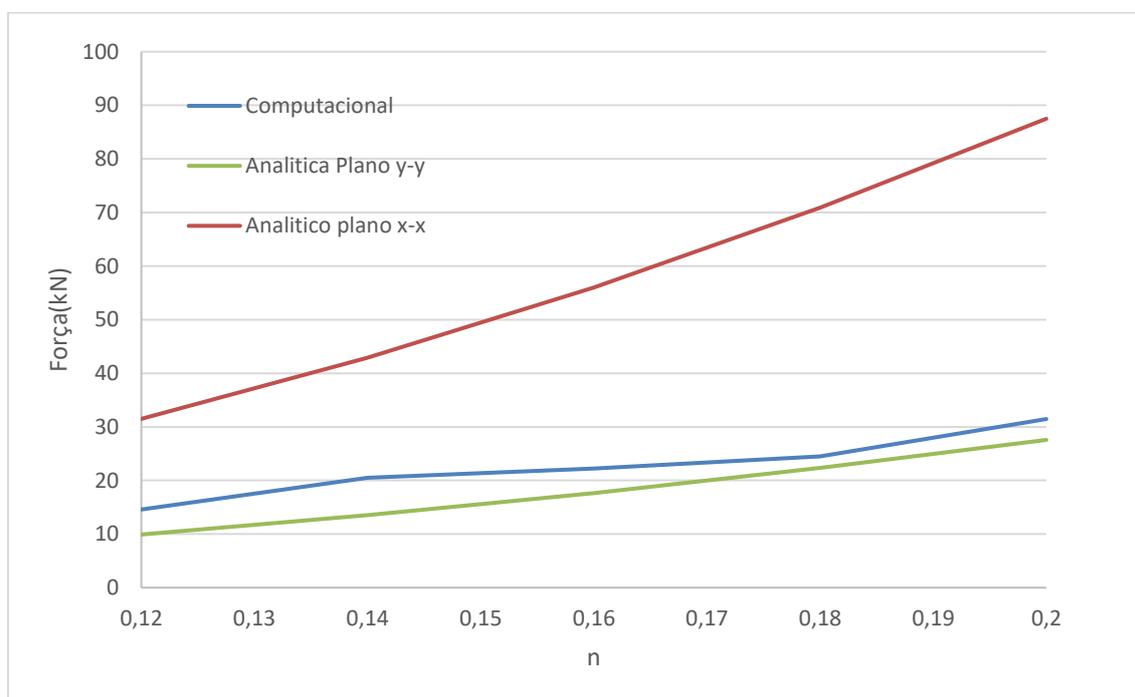
Já que na simulação é levado em consideração a torção e flexão para encontrar os modos, e analiticamente apenas por flexão, tornando o processo de comparação difícil. O valor obtido pelo fator multiplicador de carga do ANSYS indicou que uma carga pequena de 15,22 kN é suficiente para entrar no primeiro modo de flambagem, este valor foi obtido multiplicando o valor de tensão crítica na simulação para uma carga unitária de 1N vezes o fator multiplicador de carga,

o qual é apresentado ao lado da figura no apêndice para cada modo de flambagem analisado, e o valor obtido para a primeira barra de 7,5 metros pelo método analítico indicou que a força crítica está com um valor bem acima de 129,44 kN, possuindo uma diferença de 88,24% nos valores, ou seja, o método computacional apresentou 11,75% do valor obtido pelo método analítico.

Observando os modos de flambagem no apêndice para este perfil é possível perceber que os principais modos que levaram a deformação do perfil foram de flexão e por torção.

Na seção do apêndice comparando as barras nas simulações observando os modos de flambagem, é visto que as vigas que possuem os menores comprimentos foram as que tiveram a maior influência da torção para seus modos de flambagem, visto que para essas barras o efeito principal que se espera deste perfil flambar segundo a literatura é por flexão.

**Figura 33 - Perfil W de comprimento 4,5 metros.**

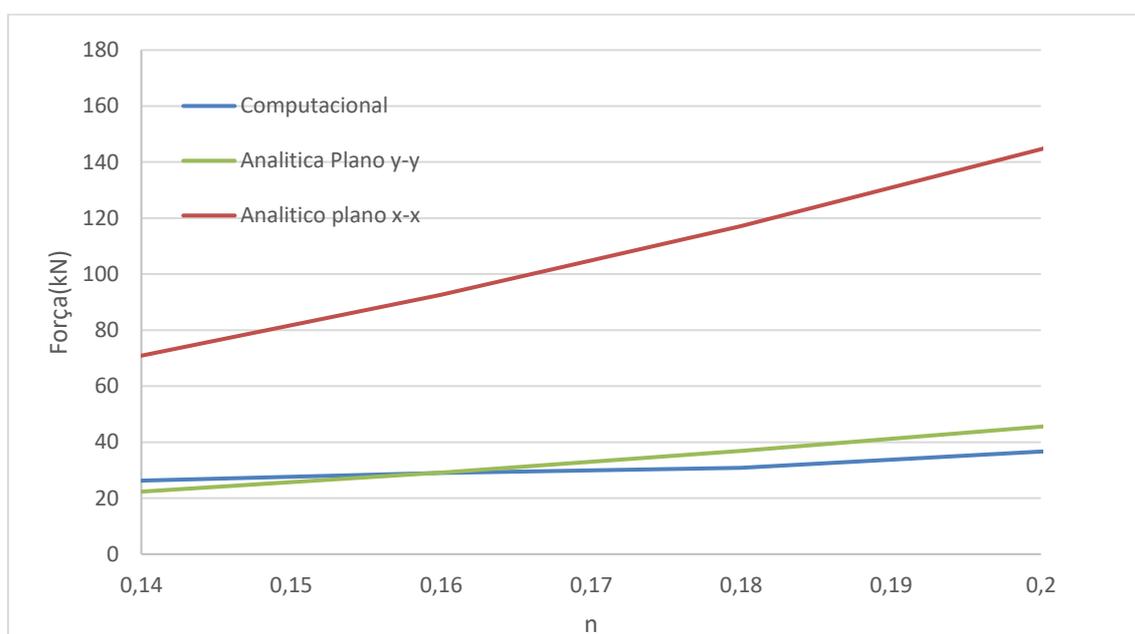


**Fonte: Autoria própria.**

Nas figuras 32, 33 e 34 não há muita diferença a ser notada, apenas o valor de  $n$  que melhor se ajusta para poder abstrair alguma informação usando os

dois métodos. É visto também que as barras fizeram na maioria dos casos apenas duas ondas em sua geometria deformada devido ao modo de flambar, havendo uma grande deformação principalmente no meio para colunas maiores, e nas mesas para os perfis de comprimento menor. A maioria dos modos de flambagem desse perfil tende a ser preferencialmente por flexão, havendo casos também de torção. Para a barra de 4,5 metros foi obtido um valor de 31,464 kN de carga crítica para o primeiro modo de flambagem obtido no método computacional, e analiticamente um valor de 353,52 kN, dando uma diferença de 91,09%.

**Figura 34 - Perfil W de comprimento 3,5 metros.**



**Fonte: Autoria própria.**

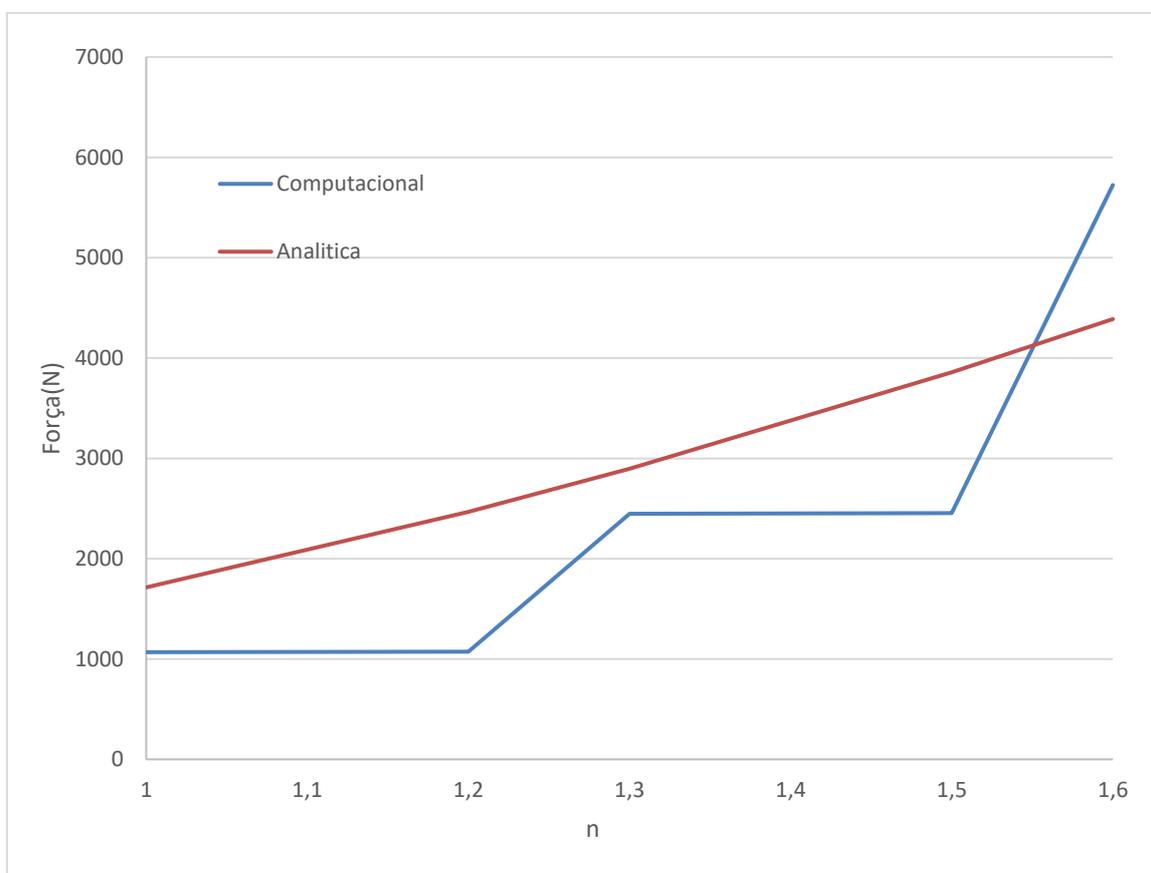
E para a barra de 3,5 metros no método analítico foi verificado um valor de 466,27 kN de força crítica, e no computacional um valor de 45,42 kN, dando uma diferença de 90,25% entre as duas.

É visto para essas três barras que o método computacional é considerado muito mais conservador do que o método analítico, praticamente todas as forças críticas encontradas recomendadas pelo método computacional, para um carregamento de compressão, representam praticamente em média 10,1% do que o encontrado no método analítico.

#### 4.2.2 Estudo computacional do perfil estrutural quadrado vazado.

Como foi mencionado na parte analítica para este perfil por ele possuir seus dois momentos de inércia iguais irá flambar em qualquer plano, não havendo preferencial para flexão. Nas figuras 36, 37, e 38, é visto que há uma linearidade bem evidente nos gráficos para a força de flambagem do modo computacional.

**Figura 35 - Perfil quadrado de comprimento 23 metros.**

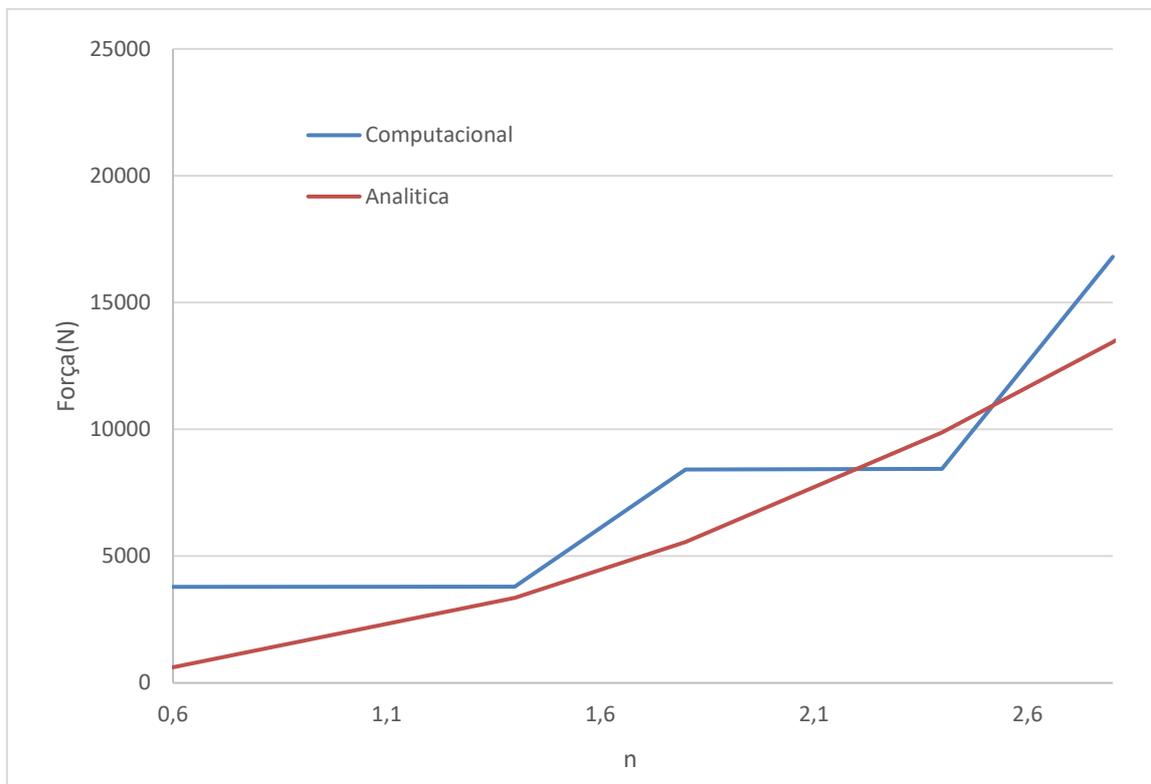


**Fonte: Autoria própria.**

Para a barra de 23 metros foi obtido um valor computacional de 6,61 kN no primeiro modo de flambagem e no método analítico um valor de 410,95 kN, com uma diferença de 98,38%.

A abcissa dos gráficos mostra os valores de  $n$  em que o método analítico mais se aproxima do valor obtido no método computacional.

**Figura 36 - Perfil quadrado de comprimento 15 metros.**



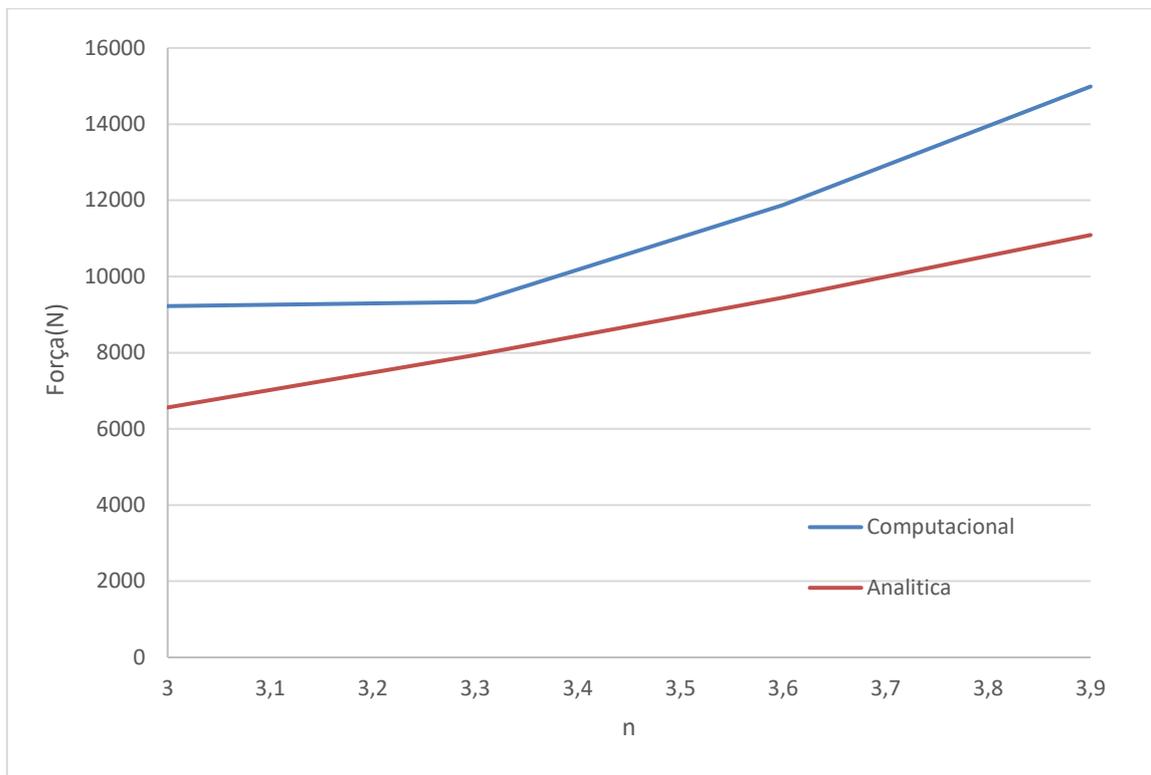
**Fonte: Autoria própria.**

Observando os modos de flambagem no apêndice para as vigas mais longas é visto que elas tendem a flambar por flexão, já para as menores pode ser visto que há uma tendência de torção ou distorção das mesas, possivelmente pelo enfraquecimento da rigidez do material.

Novamente nas figuras acima e abaixo as barras simuladas que podem ser consideradas como curtas ou intermediárias estão com a força de flambagem bem próximas dos valores calculados. O número de ondas na geometria deformada varia de 1 a 3 podendo ser conferidas no final do apêndice.

Para a barra de 15 metros foi obtido no método computacional no primeiro modo de flambar um valor de 16,806 kN, e para o analítico 966,19 kN, ou seja, dando uma diferença de 98,26% nos resultados.

**Figura 37 - Perfil quadrado de comprimento 11 metros.**



**Fonte: Autoria própria.**

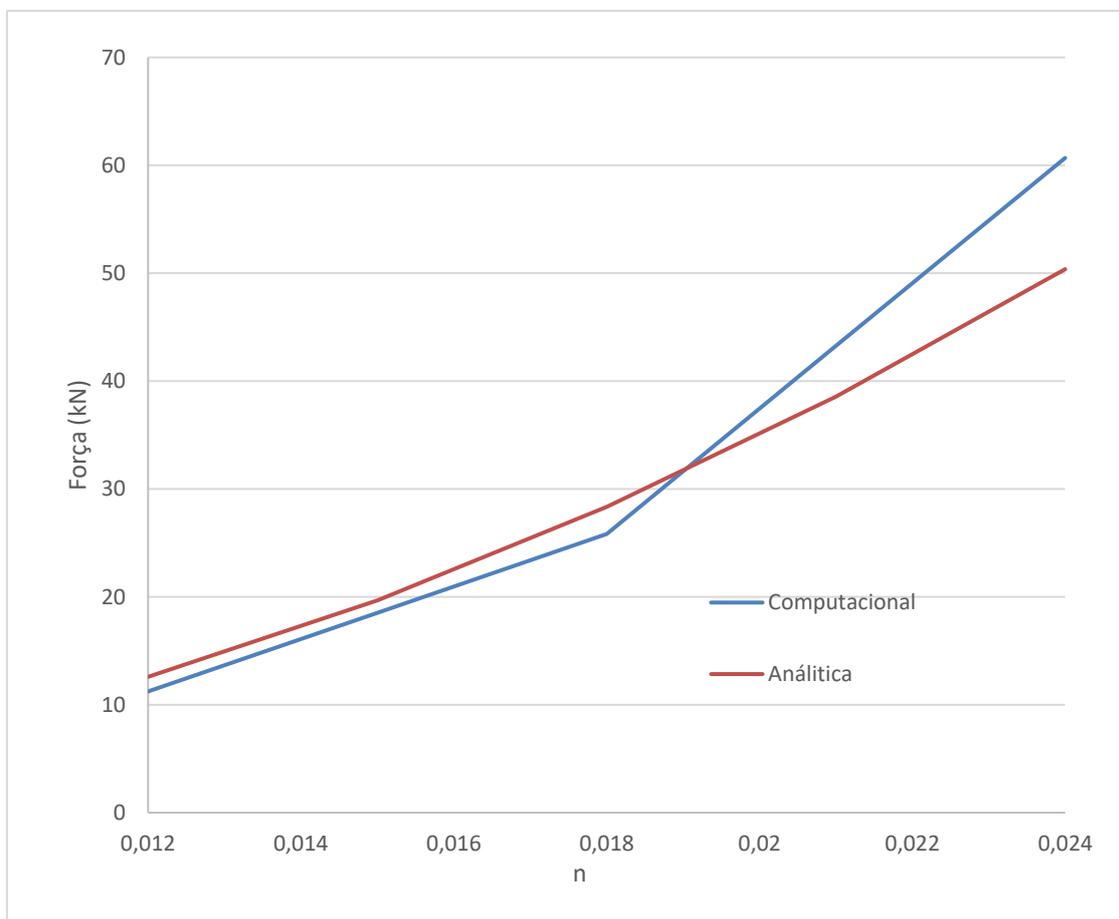
Para a barra de 11 metros foi obtido um valor para a carga crítica de 14,99 kN para o método computacional, já para o método analítico foi obtido um valor de 1349,16 kN, o que dá uma diferença de 98,88%.

Foi visto também que o método computacional para o perfil quadrado vazado em todos os comprimentos obteve um valor bem conservador em relação ao analítico, no qual o valor encontrado pelo método analítico representa em média 1,49% do que o encontrado no método computacional

#### 4.2.3 Estudo computacional de barras circulares vazadas.

Nas figuras 38,39, e 40 são vistas abaixo a comparação computacional da analítica. Para a barra circular vazada de comprimento 2,1 metros foi encontrado um valor de 85,76 kN no método computacional, e pelo modo analítico um valor de 8,48 kN. Representando uma diferença entre os métodos de 90,11%.

**Figura 38 - Barra circular de comprimento 2,1 metros.**

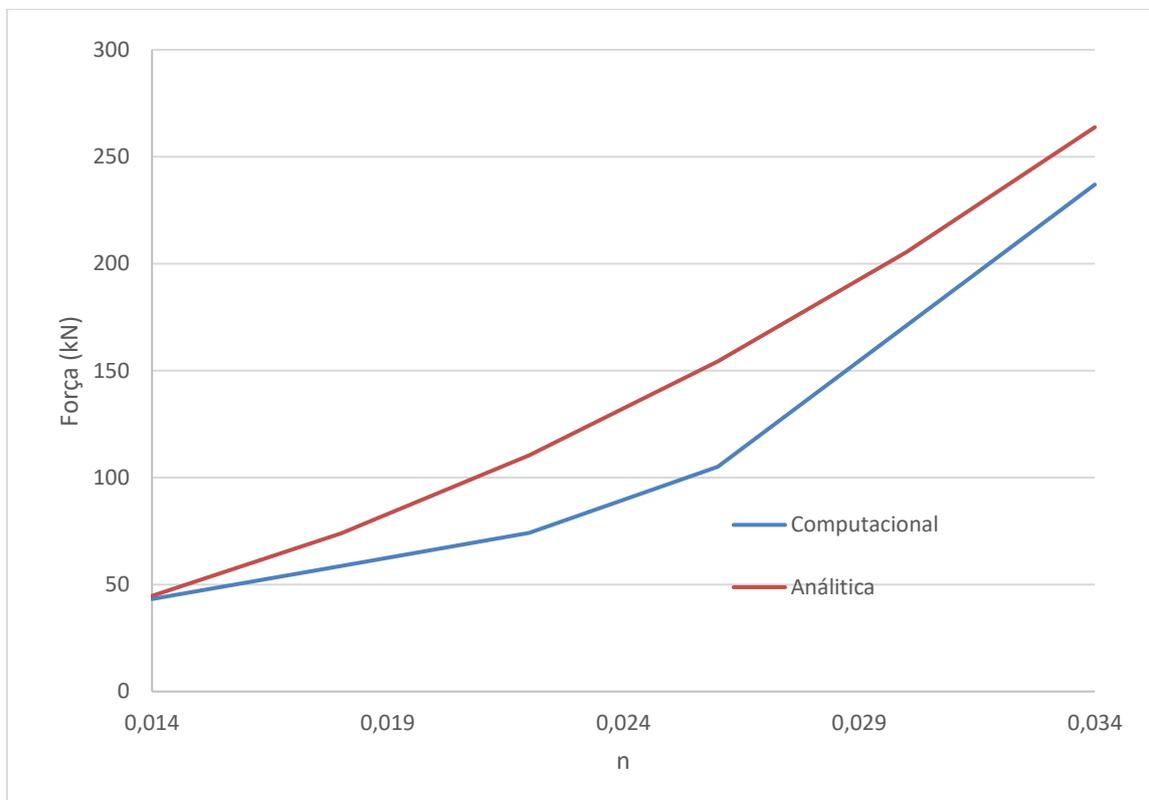


**Fonte: Autoria própria.**

Sendo que na versão analítica é adquirido um traçado similar de uma reta, mas ela é na verdade uma função quadrática o que não é evidenciado devido aos baixos valores de  $n$ , porém isto pode ser confirmado segundo a equação 2.5.

Para a viga de 1,3 metros de comprimento foi obtido um valor de 238,40 kN no método computacional, no qual decorreu numa mensagem obtida pelo *software* indicando uma falta de memória do computador durante a simulação indicando que o tempo decorrido de simulação ultrapassou o especificado pela margem. E para o método analítico foi obtido um valor de 22,07 kN, o que representa 90,7% de diferença entre os métodos, ou 9,25 % do obtido pelo computacional.

**Figura 39 - Barra circular de comprimento 1,3 metros.**



**Fonte: Autoria própria**

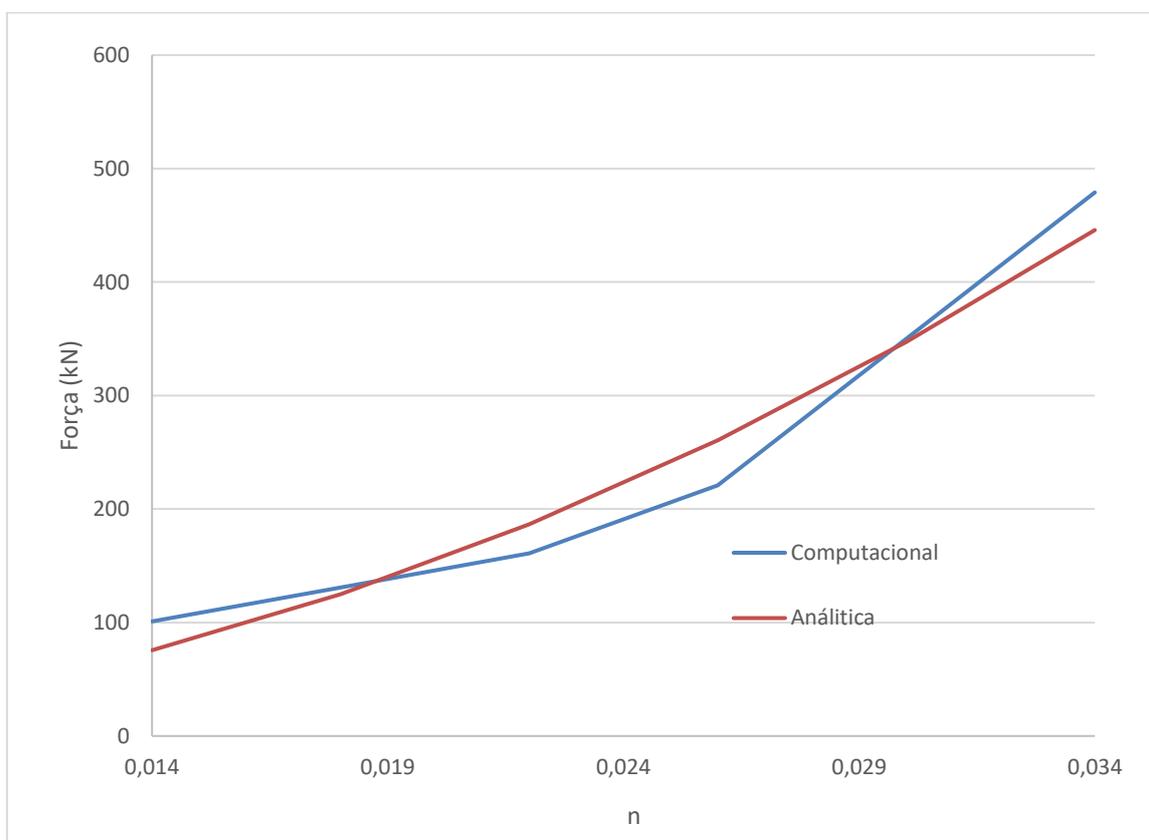
Para o perfil circular é visto no apêndice que todos os modos preferenciais foram por flexão sem exceção, não havendo praticamente instabilidade estrutural por torção.

Já para o comprimento de 1 metro de comprimento foi obtido pelo método computacional o valor de 480,12 kN, e para o método analítico um valor de 30,38 kN, o que representa 6,32% do valor sugerido pelo método computacional, havendo uma diferença entre eles de 93,67%.

Fazendo a média entre os resultados, foi visto que o método analítico obteve os resultados mais conservadores em relação ao computacional. Sendo que em média o método computacional obteve uma magnitude 8,48% do que o encontrado pelo método analítico. Como houve uma mensagem de erro por falta de memória na simulação para segunda barra, e essas diferença de resultados

absurdos, levou-se a crer que os resultados para esse tipo de perfil não convergiram de maneira correta, ou não obtiveram resultados satisfatórios na simulação, mesmo aumentando o tempo de operação na simulação ou refinando mais a malha, para melhor convergência dos dados, foi obtido resultados bem parecidos. Levando a crer que é importante fazer a análise dos dois métodos e compará-los, pois, eles podem ser em magnitude bem diferentes.

**Figura 40 - Barra circular de comprimento 1 metro.**



**Fonte: Autoria própria.**

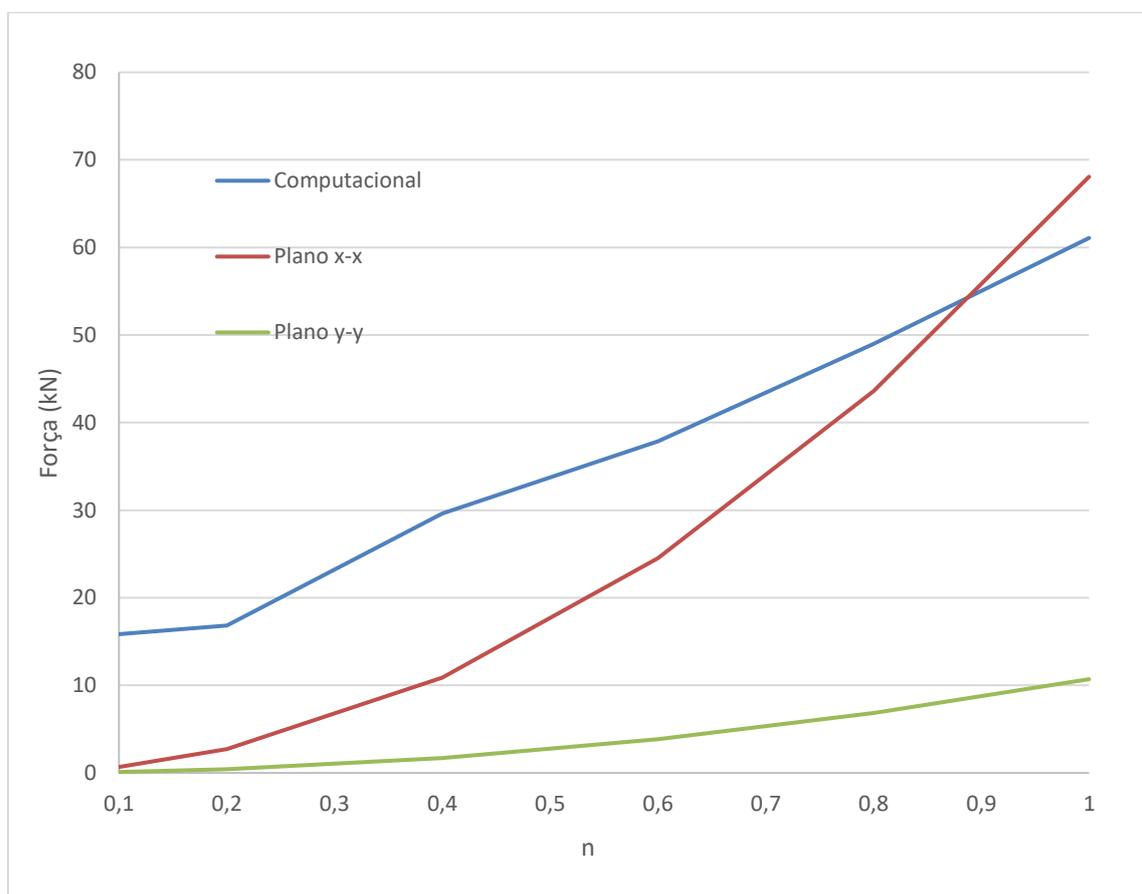
#### 4.2.4 Estudo computacional de barras do perfil estrutural U.

Seguindo o raciocínio para o perfil U, é tido que para a maioria dos comprimentos analisados deste perfil possui uma preferência a flambar no sentido do plano x, sendo observado nas figuras 41 a 43, logo abaixo:

Para a primeira barra de perfil U, com comprimento de 1,5 metros, obteve-se para o método computacional um valor para força crítica de 74,47 kN, e para o método analítico foi obtido um valor de 5,58 kN. Havendo uma diferença de 92,50% entre eles, sendo o método analítico dessa vez mais conservador.

Para a segunda barra do perfil U, com comprimento de 1 metro, foi obtido para o método computacional uma força crítica de 61,143 kN e para o método analítico foi encontrado uma força de 12,56 kN, sendo este valor 20,54% em comparação ao obtido no computacional

**Figura 41 - Barra de perfil U com comprimento 1,5 metros.**



**Fonte: Autoria própria.**

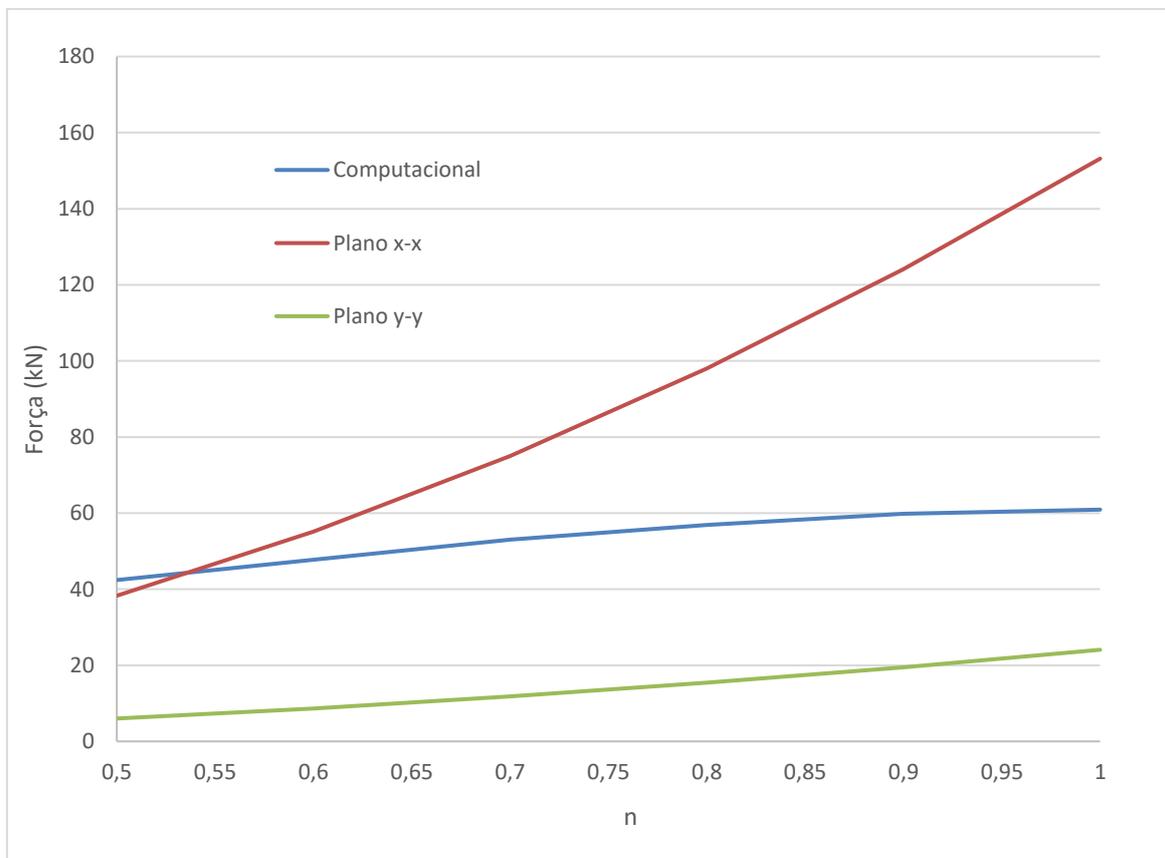
Os dados computacionais tiveram dados de esforço mais próximos ao plano x do que o y.

Sendo que observando o apêndice as barras tiveram tanto torção de sua geometria quanto flexão, entretanto é visto que há uma ligeira inclinação em

flambar torcendo seu perfil nas mesas para as barras de menor comprimento e a flambar por flexão para as de maior comprimento.

E para a última barra deste perfil obteve um valor para força crítica usando o método analítico de 19,42 kN, e para o método computacional uma magnitude de 80,89 kN. Assim a força obtida pelo primeiro método é 24% do que o encontrado no método computacional, fazendo o analítico ser mais conservador.

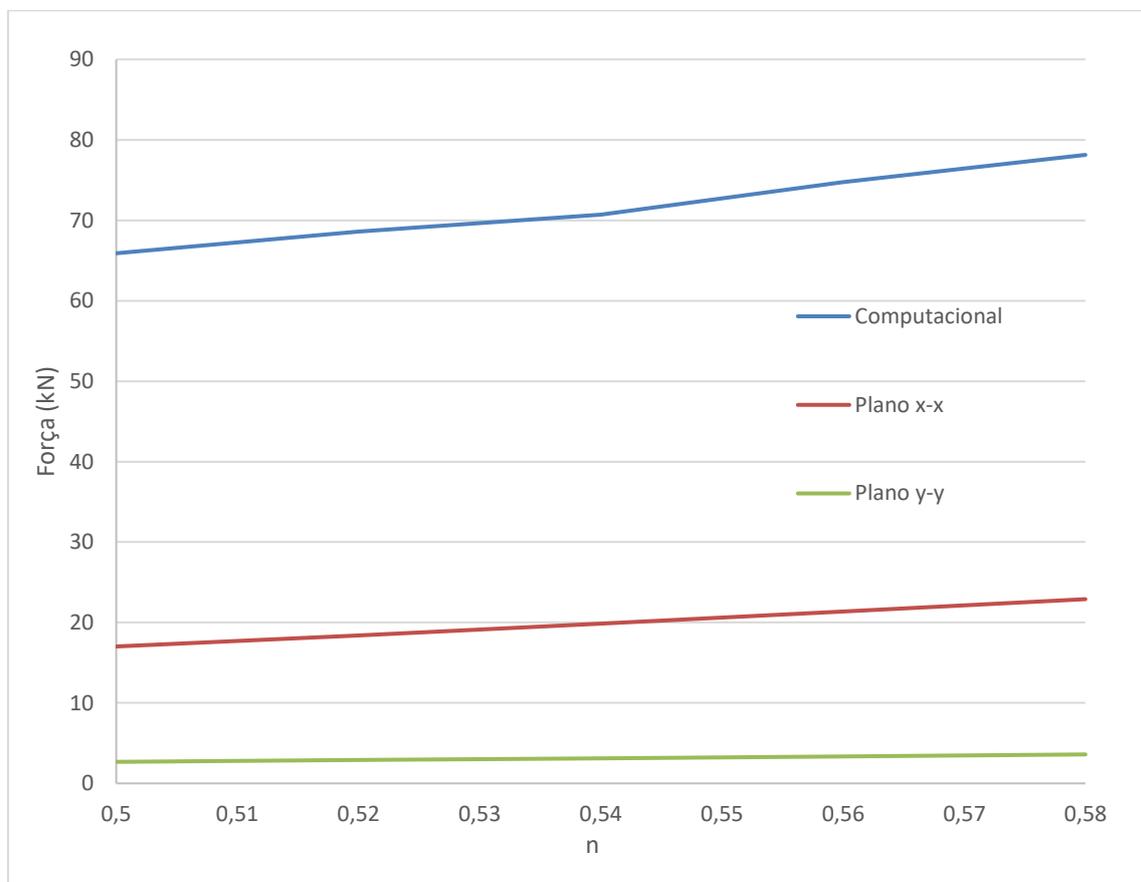
**Figura 42 - Barra de perfil U com tamanho de 1 metro.**



**Fonte: Autoria própria.**

Analisando todas as barras de perfil U, foi visto que em média a tensão obtida pelo método analítico é 17,34% do obtido pelo método computacional. Fazendo para este caso o método analítico ser considerado o mais conservador.

**Figura 43 - Perfil estrutural U de tamanho 0,8 metros.**



**Fonte: Autoria própria.**

#### 4.2.5 Estudo computacional de barras com perfil estrutural Z.

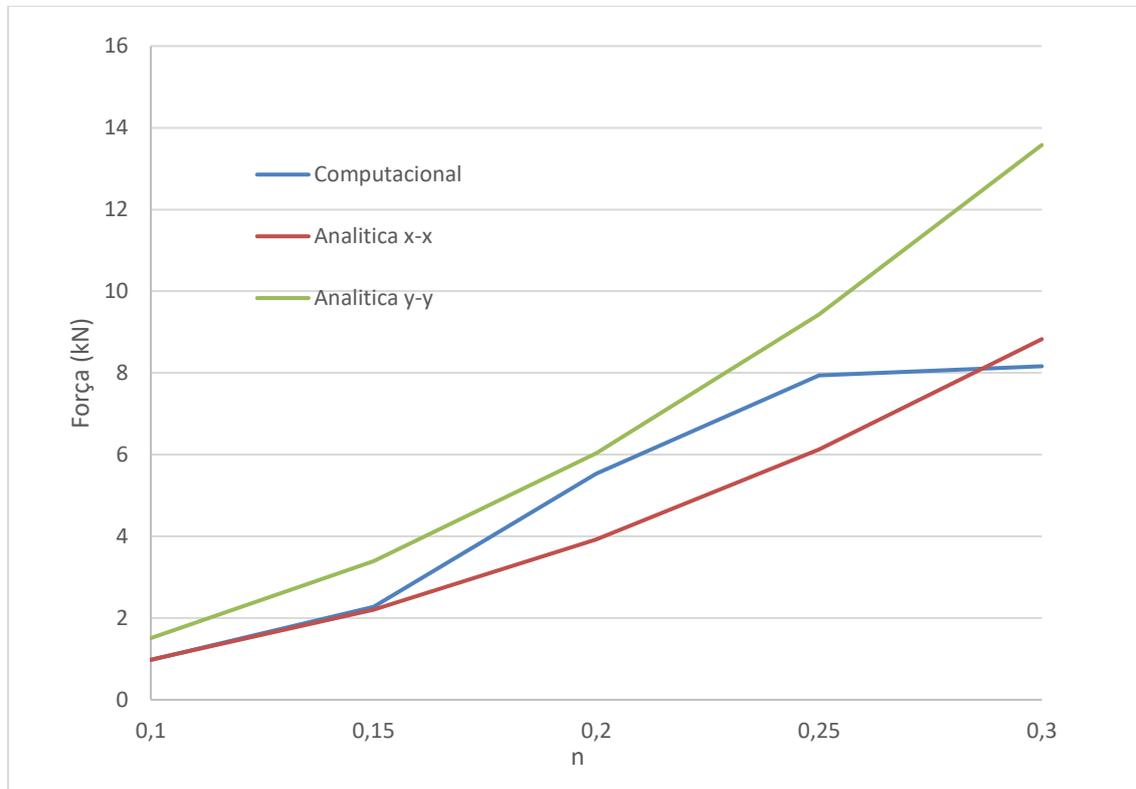
Para o perfil Z é visto nos gráficos das figuras 44 a 47 que os dados computacionais obtidos estão muito próximos do analítico para os dois planos.

Para o primeiro caso de comprimento 6,6 metros, foi obtido no método computacional um valor de força crítica igual a 51,17 kN e para o método analítico foi obtido um valor de 186,01 kN, demonstrando que o computacional é 27,5% do valor obtido pelo método analítico.

Pode ser visto no apêndice que ele tanto pode flambar através do plano y ou x por flexão conforme pode ser visto no apêndice, mas analiticamente o seu plano preferencial é y. Para a segunda viga é obtido um valor de 32,29 kN para o

método computacional, e para o método analítico foi encontrado um valor de 126,36 kN, mostrando que o primeiro constitui 25,5% do outro.

**Figura 44 - Perfil estrutural Z de tamanho 6,6 metros.**

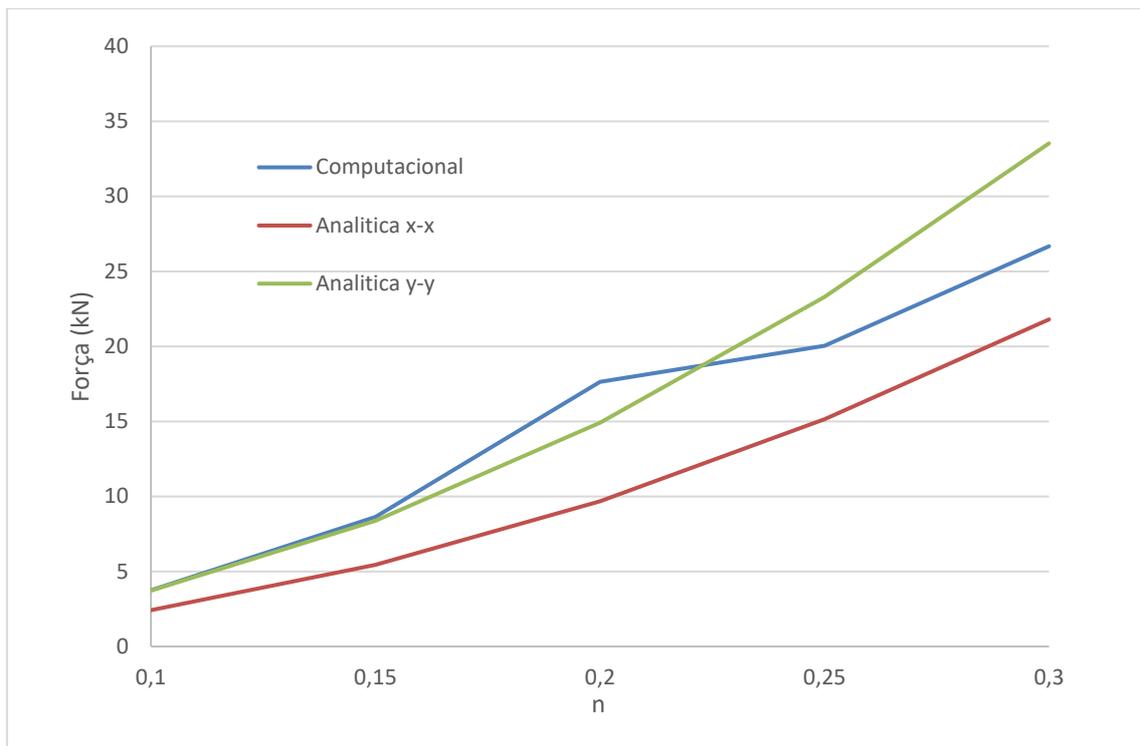


**Fonte: Autoria própria.**

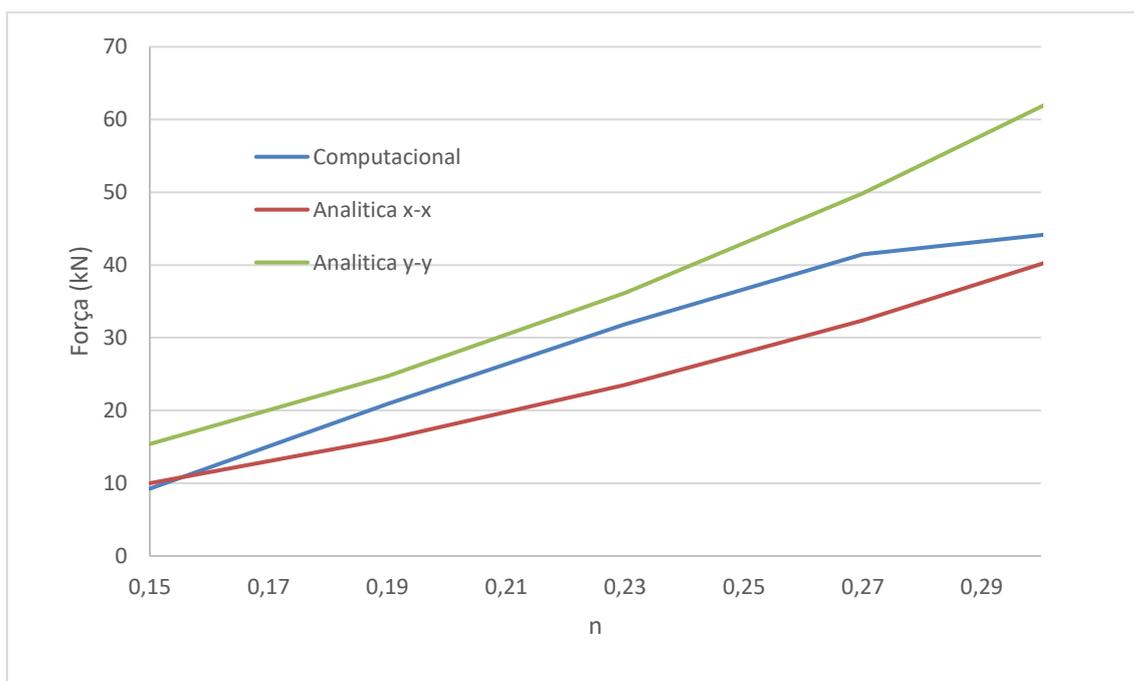
Para a segunda viga é obtido um valor de 32,29 kN para o método computacional, e para o método analítico foi encontrado um valor de 126,36 kN, mostrando que o primeiro constitui 25,5% do outro.

E tanto para barras curtas e longas houve uma variação entre flambagem por flexão indicando normalmente de 1 a 2 no número de ondas, e uma torção nas mesas do perfil.

E finalmente para o último caso foi obtido um valor de 186,01 kN para o analítico, e para o método computacional um valor de 46,26 kN, indicando que o método computacional tenha uma porcentagem de 24,86 do analítico. Sendo este um caso à parte, essa diferença de resultados pode ser devido ao fato que na simulação são levados em consideração fatores não abordados pelo método analítico, fazendo assim a força encontrada menor do que na analítica.

**Figura 45 - Perfil estrutural Z de tamanho igual a 4,2 metros.**

Fonte: Autoria própria

**Figura 46 - Perfil estrutural Z com tamanho 3,1 metros.**

Fonte: Autoria própria.

Fazendo uma média para todos os resultados para este perfil foi obtido uma média de 42,71 %. Sendo este o perfil que possui a maior variação de resultados entre os dois métodos.

## 5 CONCLUSÕES

Finalizando este trabalho é concluído através da observação de todos os resultados obtidos de que os principais modos de flambagem conforme é discutido na norma NBR 8800:2008 e na literatura se demonstrou bem próximo do esperado.

Os perfis estruturais W do tipo I, quadrada e circular ocas tiveram uma inclinação maior de flambagem por flexão para um carregamento de compressão centrado. E as vigas com perfil estrutural U e Z tiveram uma influência maior de flambagem por torção e flexo-torção em sua maioria. Isto se demonstrou mais evidente principalmente para as vigas de maior comprimento do que para as menores e intermediárias. O que pode ser possivelmente explicado pelo fato das vigas curtas estarem sujeitas a uma tensão maior do que elas realmente aguentam até ultrapassar seu regime elástico independentemente do tipo de tensão. Mudando sua propriedade física do enquanto passam por uma instabilidade estrutural no carregamento fazendo assim o módulo de Young mudar para um valor de menor rigidez.

Em relação a comparação dos valores obtidos entre os métodos, em muitos casos a força crítica encontrada foi maior para o método analítico do que o obtido pelo método computacional, e vice-versa, porém, para todos os perfis analisados a média obtida pelas 3 barras de cada perfil não obteve um valor muito disperso. Essa diferença de resultados se deve a vários fatores embutidos na simulação, que analiticamente não é possível de ser considerado. Por exemplo para o perfil W e quadrado vazado se demonstrou mais conservador a força crítica no método computacional, já para o perfil circular vazado, U e Z houve uma variação entre os dois, uma hora o resultado analítico tinha uma carga crítica recomendada menor noutra hora era a computacional.

Este fato demonstra a importância da comparação de dados por métodos de análise diferente, provando que não é aconselhado apenas usar o método mais rápido e prático. Para obtenção de valores mais substanciais e verdadeiros, é necessário a implementação quando possível de ensaios empíricos e, tentando comparar com o que foi calculado ou simulado com o real.

E a diferença de resultados pode ser bem perceptível comparando-se os dois métodos utilizados. É visto que a ferramenta computacional pode ser de grande ajuda para obtenção de dados, que as vezes o estudo clássico analítico não pode

fornecer. Houve muitos casos em que o modo de flambagem obtido pelo método computacional não estava muito próximo do que era esperado pela análise analítica.

Para trabalhos futuros a serem considerados poderia ser feito um estudo para a flambagem por cisalhamento, e flexão comentados pela norma NBR 8800:2008. Para serem usados na otimização de estruturas metálicas e verificado também os modos de vibração da estrutura que coincidem com os pontos de que começam a formação da instabilidade estrutural como na flambagem. Pode ser estudado também analiticamente o módulo reduzido ou tangencial, o qual levam em consideração a curva tensão e deformação do material, ou a análise não-linear com grandes deformações que são feitas em simulações mais pesadas e com malhas mais complexas e que fazem uma diferença maior no tempo computacionalmente.

## REFERÊNCIAS

Ansys, Release 15.0,2013, Help System, Buckling Analysis, ANSYS,Inc.

AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION - **Manual of Steel Construction**.6. ed. American Institute Of S. C, Inc. United States, of America,1963.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 8800:2008. **Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios**, ABNT, Rio de Janeiro, 2008.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 14762:2010. **Dimensionamento de Estruturas de Aço Constituídas Por Perfis Formados a Frio**. ABNT, Rio de Janeiro,2010.

BATHE, K.J. **Finite Element Procedures in Engineering Analysis**. New Jersey: Prentice Hall , 1982.

BEER. Ferdinand P., et al. **Mecânica dos Materiais**. 5. ed. Porto Alegre. AMGH Editora Ltda. 2008.

FILHO, Avelino A. **A Base da Tecnologia CAE - Análise Não Linear**. 1. ed. [S.l.]: Érica, 2012.

HIBBELLER, R.C. **Resistencia dos Materiais**. 5.ed. São Paulo. Pearson Prentice Hall, 2004.

HIRT, Manfred A., **Bez, Rolf. Construction Métallique. Notions Fundamentales et méthodes de dimensionnement**. 10. ed. Suíça,1994.

J.N.REDDY. **An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis**. New York: Universidade de Oxford, 2004.

KIM, Nam-Ho. **Introuction to Nonlinear Finite Element Analysis**. New York: Springer, 2015.

M.A.CRISFIELD. **Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Estructures**. Chinchester: John Wiley & Sons Ltd., v. 1, 2000.

Perfis Gerdau Açominas, Informações Técnicas, [www.gerdauacominas.com.br](http://www.gerdauacominas.com.br);  
Acesso em: 17 set. 2017.

PFEIL, W. PFEIL, M. **Estruturas de Aço**, Ed. LTC, Rio de Janeiro, 2000.

POPOV, EGOR P. **Introdução a Mecânica dos Sólidos**. 1, ed. Blucher, 1978.

R.D.COOK, D.S.Malkus, E. M. E. P. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 3. ed. New York: John Wiley Sons Inc., 1989.

RAO, Singiresu S. **The Finite Element Method in Engineering**. 5. ed. ELSEVIER INC. Florida, 2011.

*Santos. W.S. Interação Flambagem Global – Flambagem Local em Pilares Metálicos de Seção I Duplamente Simétricos Sob Compressão Uniforme*. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Espírito Santo, 2002.

TIMOSHENKO, Stephen P., GERE, James M. **Theory of Elastic Stability**. 2. ed. Mineola New York: Dover Publications, Inc. 1961.

## APÊNDICE A – PROCEDIMENTOS DE CÁLCULOS ANÁLITICOS PARA O PERFIS ESTRUTURAL W150 X 37,1.

Fazendo as relações da mesa e alma conforme as fórmulas da norma 8800:2008 para o perfil W, para  $Q_a$  e  $Q_s$  que se localizam nos grupos 2 e 4 da tabela F.1 da norma 8800:2008, verifica-se como pode ser visto na tabela 1 que para este perfil não há flambagem local.

**Tabela 1 - Flambagem local das barras axialmente comprimidas.**

Alma			Mesa		
$b/t \text{ lim}$	$b/t$	$Q_a$	$b/t \text{ lim}$	$b/t$	$Q_s$
42,14	17,1	1	16	6,63	1

Como os valores de  $b/t$  não superaram os valores limites o valor que  $Q_a$  e  $Q_s$  possuem são iguais a 1, assim o valor de Q será 1, demonstrando que não haverá flambagem local para esse perfil e sim global, independente do carregamento de compressão, indicando assim que o fator de redução  $\chi$  é igual a 1. E para encontrar a força crítica apenas multiplicou-se a tensão admissível com a área transversal do perfil. Sendo que para flambagem global por compressão, os seguintes valores na tabela 2 são observados:

**Tabela 2 - Tensões e forças admissíveis.**

L (m)	$\lambda$	$\sigma_{adm}(MPa)$	$F_{crit}(kN)$	F.S.
7,5	195,013	27,08	129,44	1,78
4,5	117	73,95	353,524	1,91
3,5	91	97,54	466,27	1,89

Para flambagem por flexão do elemento de viga, é visto na tabela 3 a seguir:

**Tabela 3 - Forças e tensões de flambagem por flexão e torção.**

L (m)	$N_{ex}(kN)$	$N_{ey}(kN)$	$N_{ez}(kN)$	$\sigma_{ex_{crit}}(MPa)$	$\sigma_{ey_{crit}}(MPa)$	$\sigma_{ez_{crit}}(MPa)$
7,5	787,46	248,10	2796,87	164,74	51,90	585,12
4,5	2187,40	689,17	3200,82	457,61	144,18	669,62
3,5	3615,90	1139,23	3613,90	756,46	238,33	755,86

Usando-se a menor força de flambagem  $N_e$ , são recalculados os valores de  $\lambda_0$  e  $X$ , usando as equações 2.24, 2.25 ou 2.26, para conseguir calcular  $N_{c,Rd}$  através da equação 2.23, eles são vistos na tabela 4 abaixo:

**Tabela 4 - Solicitação resistente a flambagem por compressão.**

L (m)	$\lambda_0$	$X$	$N_{c,Rd}(kN)$
7,5	2,19	0,18	197,80
4,5	1,32	0,48	525,75
3,5	1,02	0,64	700,33

## APÊNDICE B – PROCEDIMENTOS DE CÁLCULOS ANÁLITICOS PARA O PERFIS ESTRUTURAL QUADRICULAR.

Em relação a flambagem local, é visto na tabela 5 logo abaixo que a relação é abaixo do limite, não precisando calcular flambagem local conforme especificado na seção F.1 da norma NBR 8800:2008, como o perfil não tem elemento comprimido AA não foi necessário o cálculo do mesmo.

**Tabela 5 - Flambagem local das barras axialmente comprimidas.**

Alma		
$b/t_{lim}$	$b/t$	Qa
39,59	22	1

As tensões admissíveis e forças críticas são calculadas na tabela 6 a seguir:

**Tabela 6 - Tensões e forças admissíveis.**

L (m)	$\lambda$	$\sigma_{adm}(MPa)$	$F_{crit}(kN)$	F.S.
23	192,83	27,69	410,95	1,79
15	127,64	65,11	966,19	1,92
11	93,60	95,35	1349,16	1,89

Para as flambagem de flexão são vistas na tabela 7:

**Tabela 7 - Forças e tensoes para flambagem por flexao.**

L (m)	$Ne(kN)$	$\sigma_{e_{crit}}(MPa)$
23	729,04	51,52
15	1714,06	121,14
11	3187,30	225,28

Como não necessário calcular para os outros planos e modos. É finalmente obtido o real carregamento critico conforme a bibliografia estipula. Sendo visto abaixo seus valores na tabela 8:

**Tabela 8 - Solicitação resistente a flambagem por compressão.**

L (m)	$\lambda_0$	X	$N_{c,Rd}(kN)$
23	2,2	0,18	581,24
15	1,44	0,42	1355,65
11	1,05	0,63	2020,83

## APÊNDICE C – PROCEDIMENTOS DE CÁLCULOS ANÁLITICOS PARA O PERFIS ESTRUTURAL CIRCULAR.

A flambagem local deste perfil é vista na tabela 9 logo abaixo, não precisando ser calculado conforme é especificado na seção F.4 da norma NBR 8800:2008, pois a condição é garantida, usando-se um diâmetro muito alto, ou uma espessura de parede muito pequena para um aço laminado a quente com baixo teor de carbono seria mais fácil de acontecer essa flambagem local.

**Tabela 9 - Flambagem local das barras.**

Alma		
$D/t$	$0,11 * E/f_y$	Q
4,94	88	1

E os valores calculados na tabela 10 logo abaixo:

**Tabela 10 - Tensões e forças admissíveis.**

L (m)	$\lambda$	$\sigma_{adm}(MPa)$	$F_{crit}(kN)$	F.S.
2,1	196,59	26,64	8,48	1,77
1,3	121,70	69,27	22,07	1,92
1	93,61	95,34	30,38	1,89

A seguir é visto na tabela 11 novamente as forças e tensões para flambagem em flexão apenas, já que para todos perfis analisados até agora não foi necessário o cálculo de flambagem por torção ou flexo-torção.

**Tabela 11 - Forças e tensões críticas.**

L (m)	$Ne(kN)$	$\sigma_{e_{crit}}(MPa)$
2,1	16,27	51,07
1,3	42,46	133,27
1	71,76	225,22

Obtido todos dados necessários é possível ver abaixo na tabela 12 as reais solicitações do perfil para um carregamento em compressão:

**Tabela 12 - Solicitação resistente a flambagem.**

L (m)	$\lambda_0$	X	$N_{c,Rd}(kN)$
2,1	2,21	0,18	12,97
1,3	1,37	0,46	33,02
1	1,05	0,63	45,5

## APÊNDICE D – PROCEDIMENTOS DE CÁLCULOS ANÁLITICOS PARA O PERFIS ESTRUTURAL U.

As relações da mesa e alma conforme a norma 8800:2008, para o elemento AL se encaixando no grupo 2, e o elemento AA no grupo 4 da tabela F.1. Verificando na tabela 13 abaixo essa premissa.

**Tabela 13 - Flambagem local das barras.**

Alma			Mesa		
$b/t_{lim}$	$b/t$	Qa	$b/t_{lim}$	$b/t$	Qs
35,87	23,4	1	13,48	12,7	1

As medidas na tabela 14 abaixo são consideradas para obtenção das medidas do baricentro da figura e para obter a linha de cisalhamento.

**Tabela 14 - Medidas geométricas complementares.**

$a$ (mm)	$b$ (mm)	$am$ (mm)	$bm$ (mm)	$xm$ (mm)	$x_0$ (mm)
46,8	23,4	48,8	24,4	15,25	6,1

Sendo o primeiro elemento a alma do perfil, e o segundo e terceiro são respectivamente as mesas inferior e superior. É encontrado as coordenadas do baricentro logo na tabela 15 abaixo:

**Tabela 15 - Baricentro da figura composta.**

Elemento	$A(mm^2)$	$\bar{x}(mm)$	$\bar{y}(mm)$	$\bar{x} * A(mm^3)$	$\bar{y} * A(mm^3)$
1	101,6	1	25,4	101,6	2580,64
2	46,8	13,7	1	641,16	46,8
3	46,8	13,7	49,8	641,16	2330,64
$\Sigma$	195,2	-	-	1383,92	4958,08

E sabendo que as coordenadas  $x$  e  $y$  do baricentro são calculados como conforme definido na seção 2.1.6, as coordenadas do C.G. da figura são definidas sendo como:

$$X_c = \frac{\sum(\bar{x} * A)}{\sum A} = \frac{1383,92}{195,2} = 7,0897 \text{ mm}$$

$$Y_c = \frac{\sum(\bar{y} * A)}{\sum A} = \frac{4958,08}{195,2} = 25,4 \text{ mm}$$

Resultando em C.G. = (7,0897;25,4), um valor muito próximo do tabelado pelo fabricante que é 7,15. Para encontrar a coordenada da linha de cisalhamento é avaliado o valor de  $x_m$  e subtraindo da coordenada  $x$  do centro geométrico é encontrado o como C.S.= (-15,25;0), que representa as coordenadas do centro de torção, em relação ao centroíde da seção.

Abaixo na tabela 16 seguem os valores calculados do perfil para  $C_w$ ,  $J$ ,  $A$ ,  $r_0$ , e  $X_{cg}$  tabelado.

**Tabela 16 - Principais variáveis geométricas.**

$C_w(cm^6)$	$J(cm^4)$	$A(cm^2)$	$r_0(cm)$	$X_{cg}$
5,04	0,2709	1,952	2,1464	7,15

E os valores de tensão e força críticas podem ser vistos na tabela 16:

**Tabela 16 - Tensões admissíveis e forças críticas.**

L (m)	$\lambda$	$\sigma_{adm}(MPa)$	$F_{crit}(kN)$	F.S.
1,5	189,73	28,60	5,58	1,63
1	126,49	64,36	12,56	1,90
0,8	101,19	99,51	19,42	1,92

Em seguida foram encontradas as tensões e as forças de flexão na tabela

17:

**Tabela 17 - Forças e tensões críticas.**

L (m)	$N_{ex}(kN)$	$N_{ey}(kN)$	$\sigma_{ex_{crit}}(MPa)$	$\sigma_{ey_{crit}}(MPa)$
1,5	68,08	10,70	348,76	54,83
1	153,18	24,08	784,71	123,37
0,8	239,34	37,63	1226,11	192,77

E finalmente para torção e flexo-torção na tabela 18:

**Tabela 18 - Forças e tensões críticas para torção e flexo-torção**

L (m)	$N_{ez}(kN)$	$\sigma_{ez_{crit}}(MPa)$	$N_{eext}(kN)$	$\sigma_{eext_{crit}}(MPa)$
1,5	789,87	4046,50	10,70	54,83
1	801,88	4108,021	24,08	123,37
0,8	814,04	4170,30	37,62	192,76

Sendo o carregamento resistente para as três barras com os seguintes valores na tabela 19:

**Tabela 19 - Solicitação resistente para flambagem por compressão.**

L (m)	$\lambda_0$	X	$N_{c,Rd}(kN)$
1,5	2,51	0,14	8,53
1	1,67	0,31	19,20
0,8	1,34	0,47	28,95

## APÊNDICE E – PROCEDIMENTOS DE CÁLCULOS ANÁLITICOS PARA O PERFIS ESTRUTURAL Z.

Fazendo o mesmo procedimento para o perfil Z encontrasse as tensões admissíveis e forças críticas na tabela 20:

**Tabela 20 - Tensões admissíveis e forças críticas.**

L (m)	$\lambda$	$\sigma_{adm}(MPa)$	$F_{crit}(kN)$	F.S.
3,1	92,69	96,13	186,01	1,89
4,2	125,58	65,30	126,36	1,92
6,6	197,34	26,44	51,17	1,77

Seguido com as forças de flexão nos planos  $x - x$  e  $y - y$  na tabela 21:

**Tabela 21 - Forças e tensões críticas para flambagem por flexão.**

L (m)	$N_{ex}(kN)$	$N_{ey}(kN)$	$\sigma_{ex_{crit}}(MPa)$	$\sigma_{ey_{crit}}(MPa)$
3,1	683,95	444,57	353,46	229,75
4,2	372,61	242,20	192,56	125,17
6,6	150,89	98,08	77,97	50,69

As tensões de torção e flexo-torção na tabela 22:

**Tabela 22 - Forças e tensões para flambagem por torção e flexo-torção.**

L (m)	$N_{ez}(kN)$	$\sigma_{ez_{crit}}(MPa)$	$N_{eext}(kN)$	$\sigma_{eext_{crit}}(MPa)$
3,1	2551,22	1318,46	444,57	229,75
4,2	2435,94	1258,88	242,19	125,16
6,6	2353,85	1216,46	98,07	50,68

E finalmente a solicitação a flambagem na tabela 23:

**Tabela 23 - Solicitação resistente a flambagem por compressão.**

L (m)	$\lambda_0$	X	$N_{c,Rd}(kN)$
3,1	1,04	0,63	278,89
4,2	1,41	0,43	190,62
6,6	2,22	0,18	78,20

**APÊNDICE F – MODOS DE FLAMBAGEM PARA A VIGA W 150 X 37,1****Figura 47 - 1° modo de flambagem para barra W de 7,5 metros.****B: Eigenvalue Buckling**

Total Deformation

Type: Total Deformation

Load Multiplier: -11083

Unit: m

04/11/2017 18:41

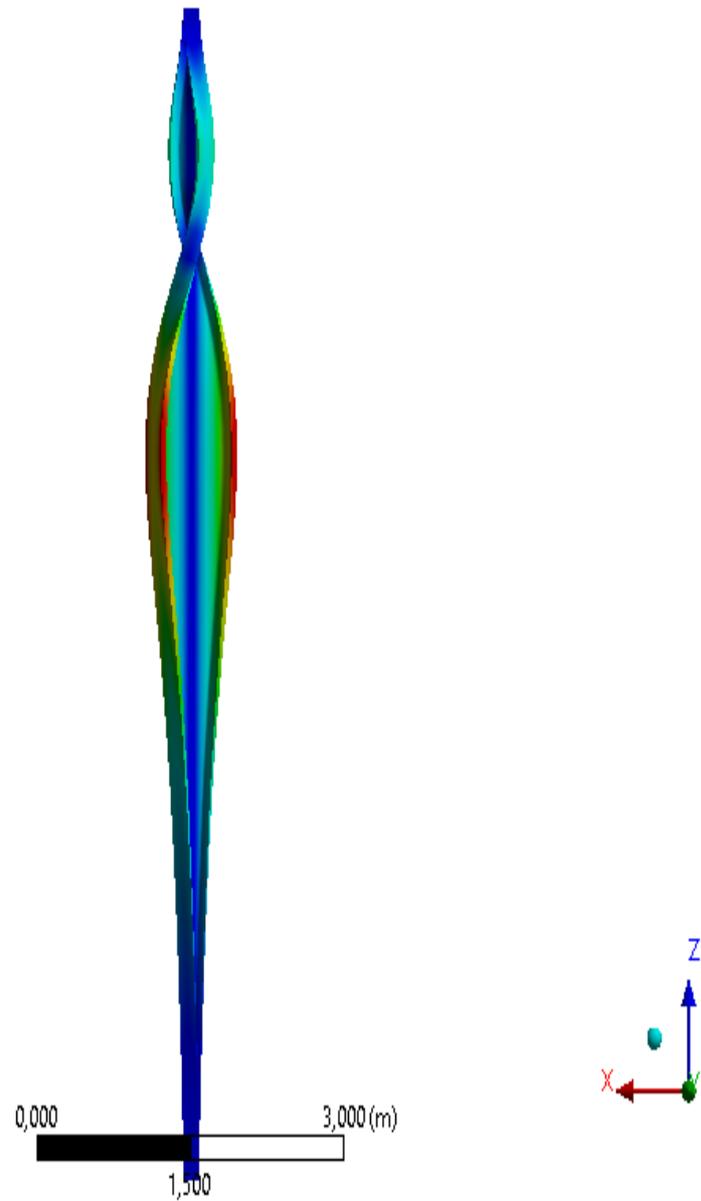
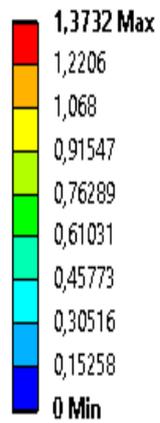
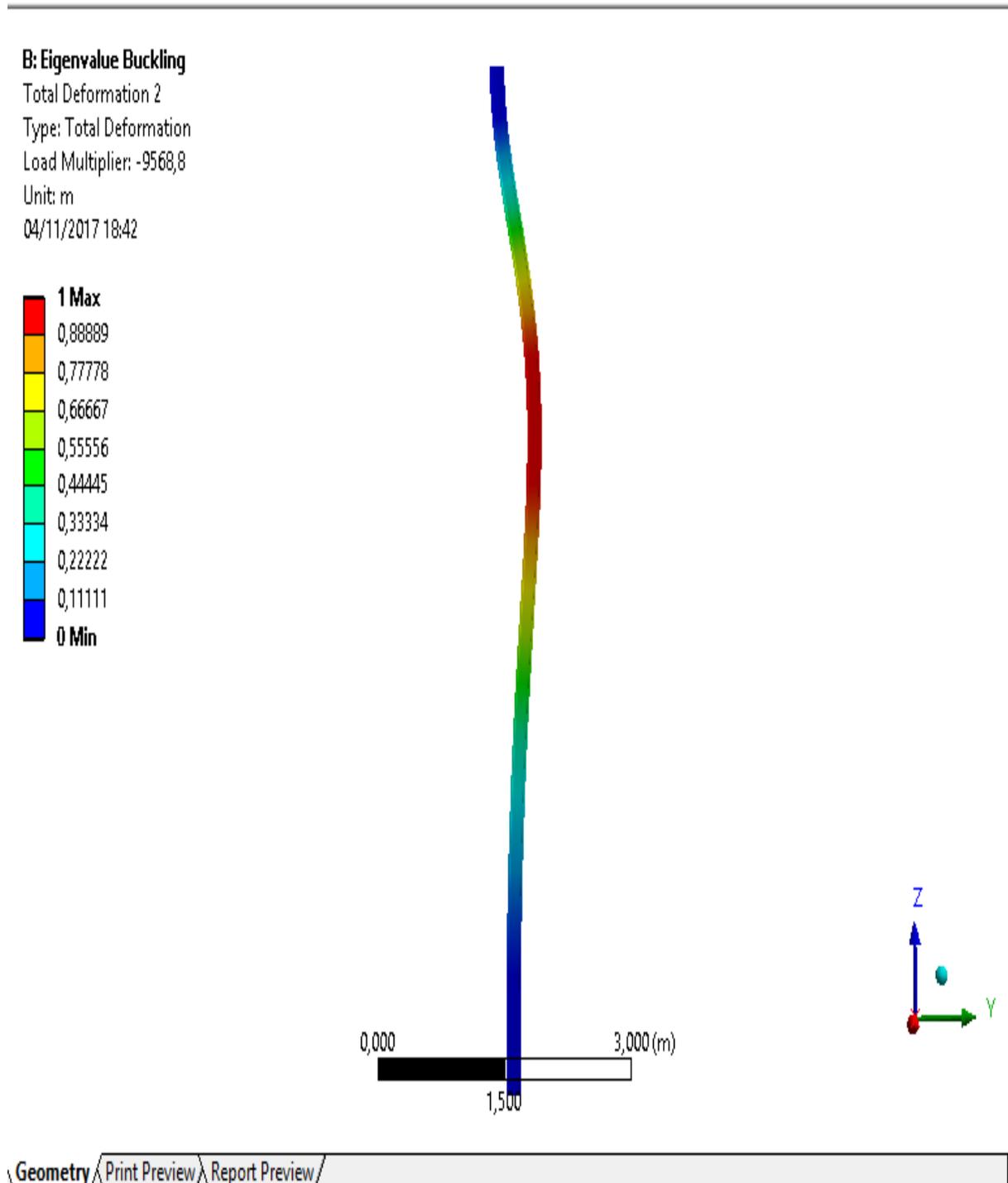


Figura 48 - 2º modo de flambagem da barra W de 7,5 metros.



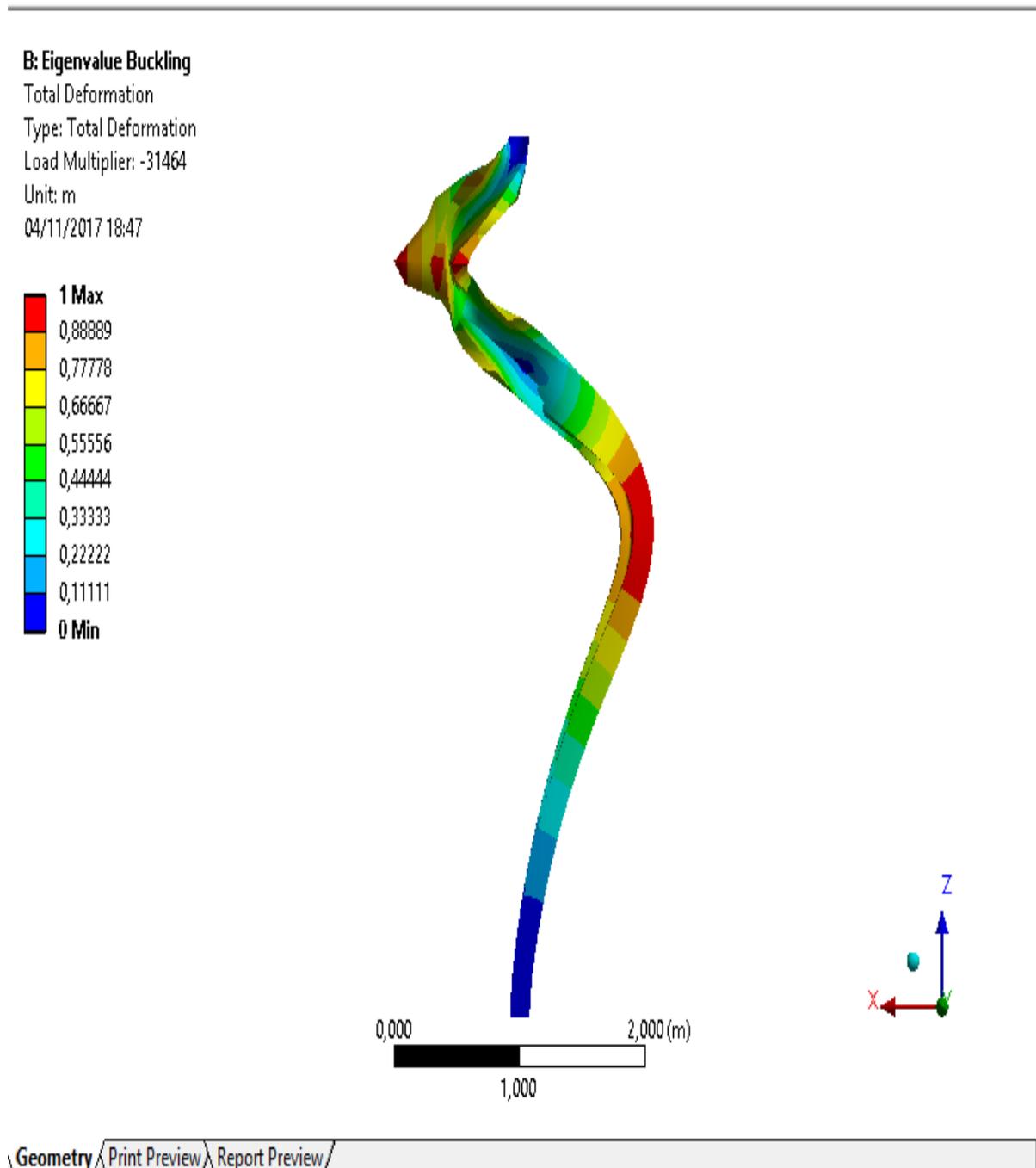
**Figura 49 - 1° modo de flambagem para barra W de 4,5 metros.**

Figura 50 - 2º modo de flambagem da barra W de 4,5 metros.

**B: Eigenvalue Buckling**

Total Deformation 2

Type: Total Deformation

Load Multiplier: -24479

Unit: m

04/11/2017 18:47

**1,0116 Max**

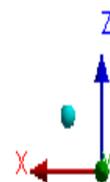
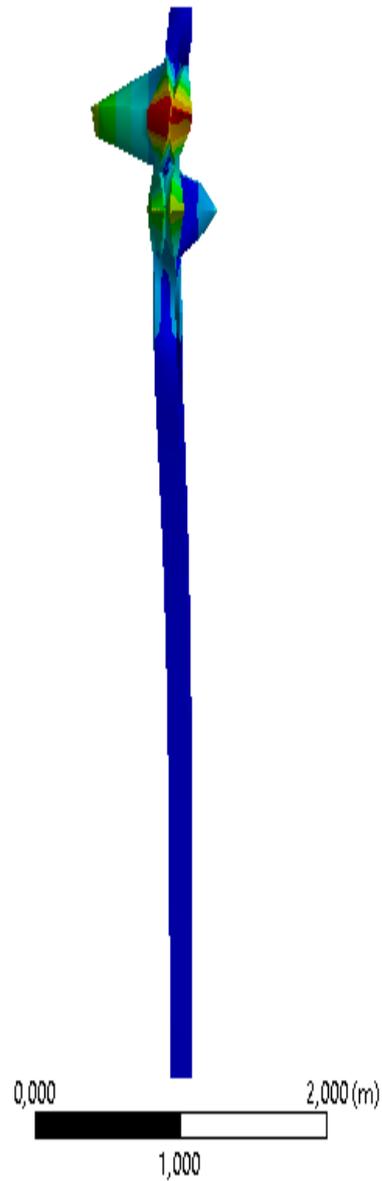


Figura 51 - 3º Modo de flambagem para barra W de 4,5 metros.

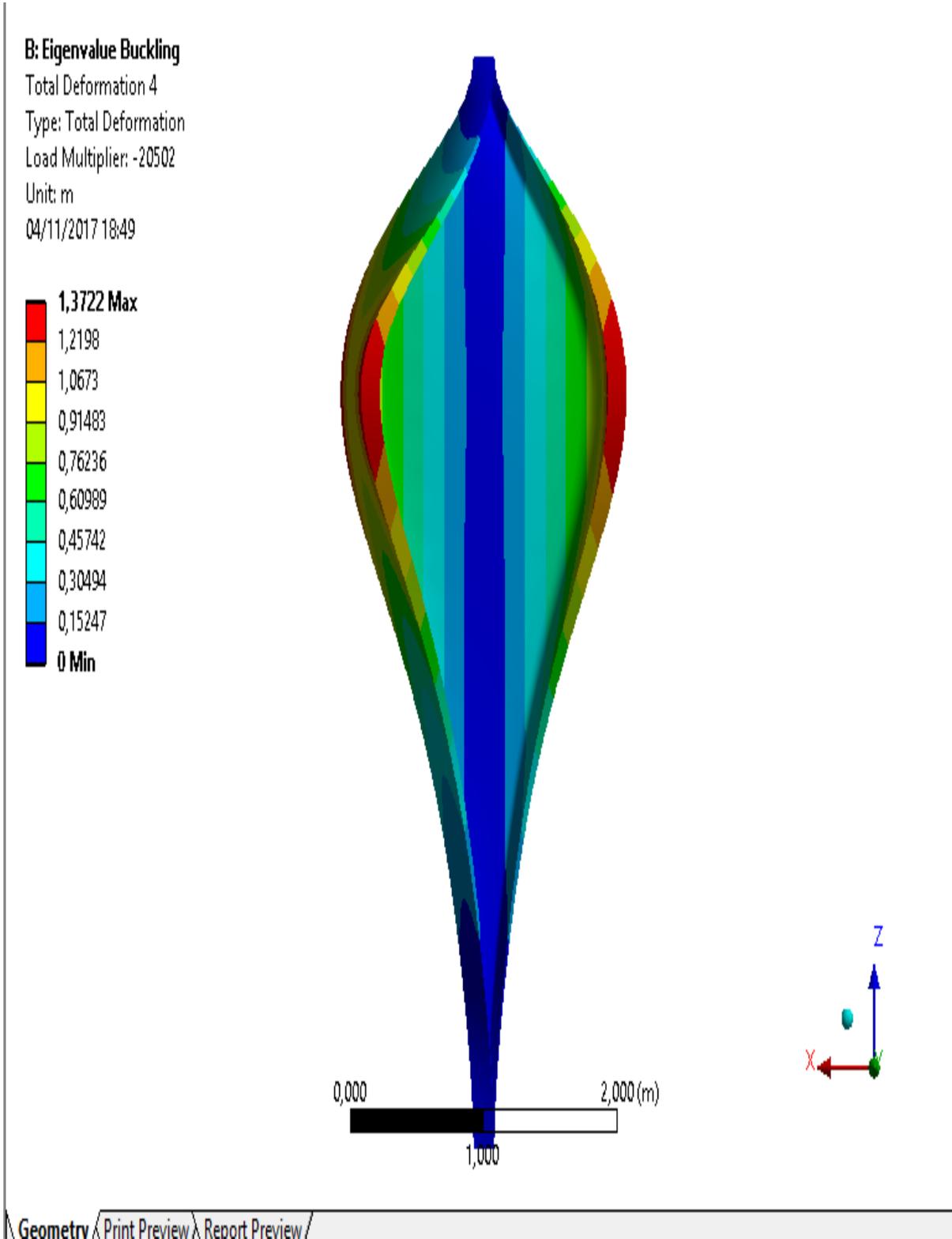


Figura 52 - 1º modo de flambagem para viga W de 3,5 metros.

**B: Eigenvalue Buckling**

Total Deformation 4

Type: Total Deformation

Load Multiplier: -28956

Unit: m

04/11/2017 19:04

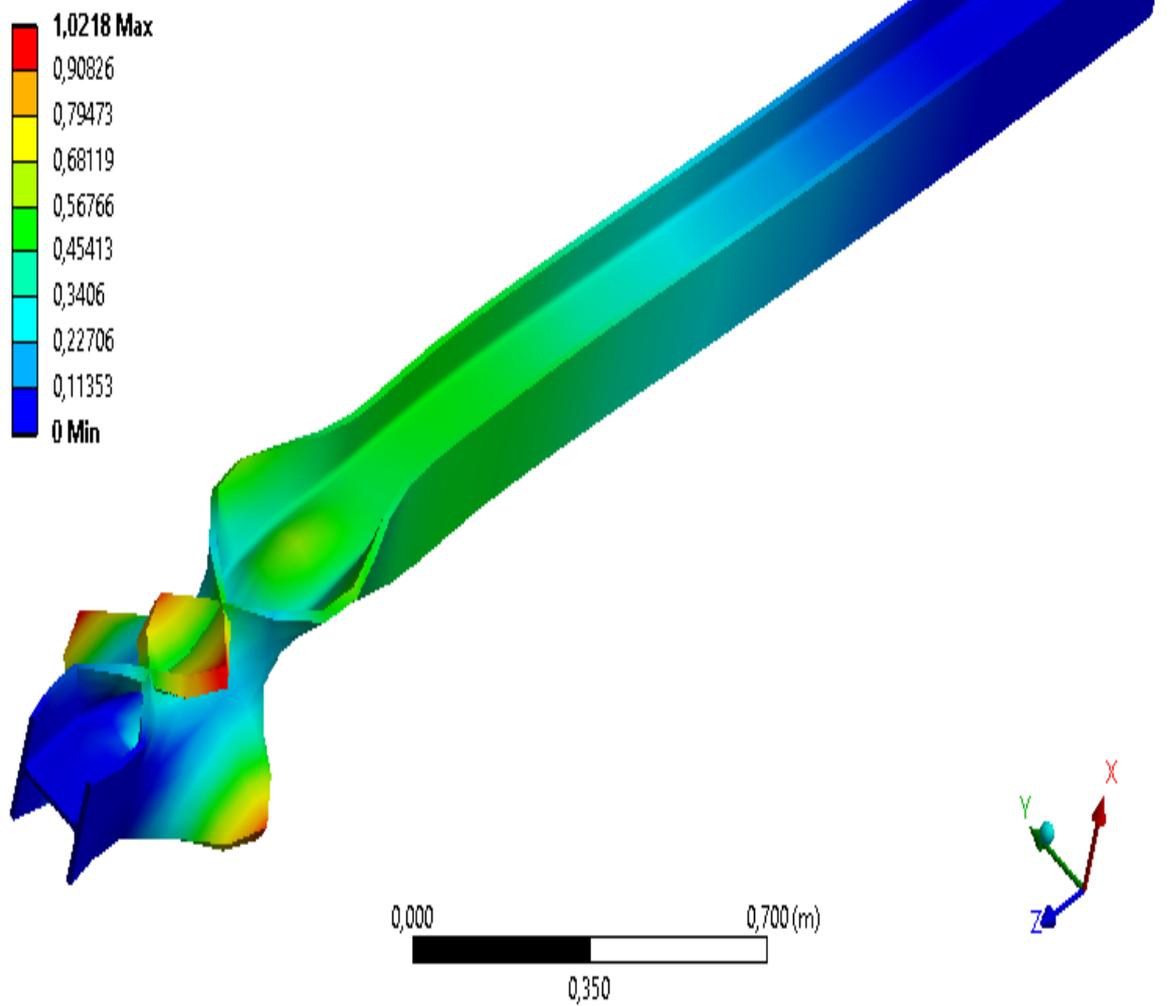


Figura 53 - 2º modo de flambagem para viga W de 3,5 metros.

**B: Eigenvalue Buckling**

Total Deformation 3

Type: Total Deformation

Load Multiplier: -30789

Unit: m

04/11/2017 19:03

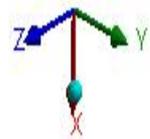
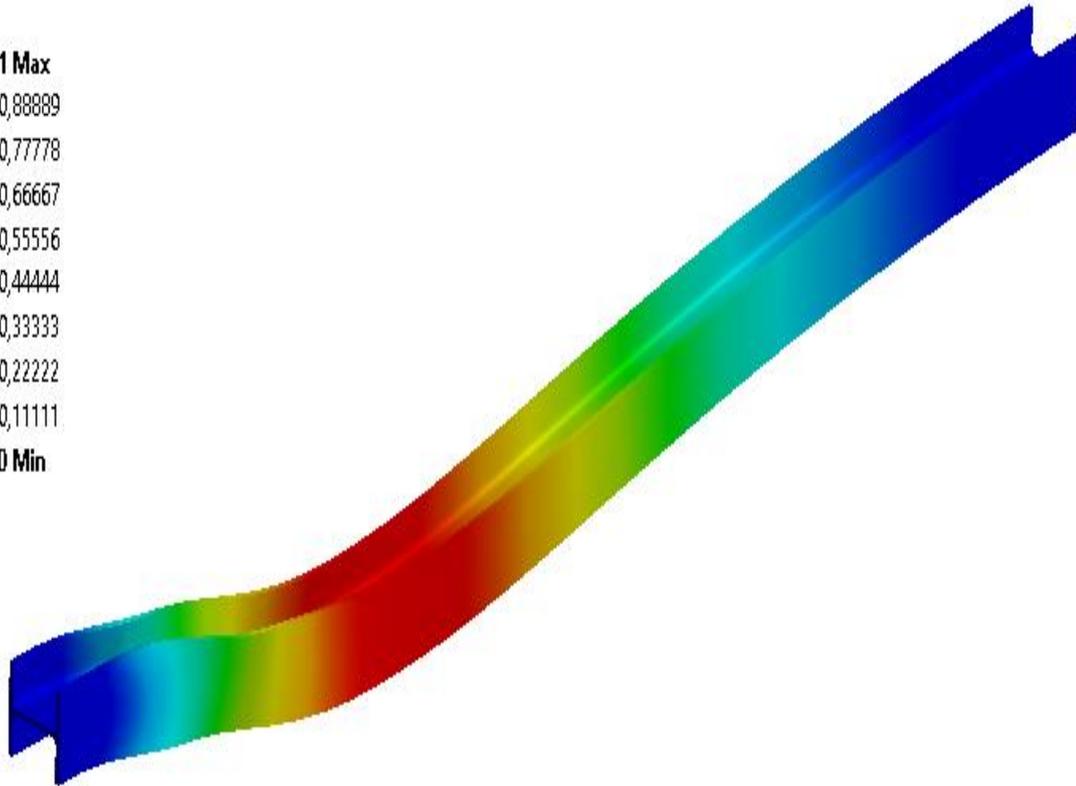
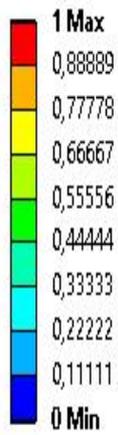


Figura 54 - 3º modo de flambagem para viga W de 3,5 metros.

**B: Eigenvalue Buckling**

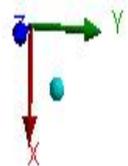
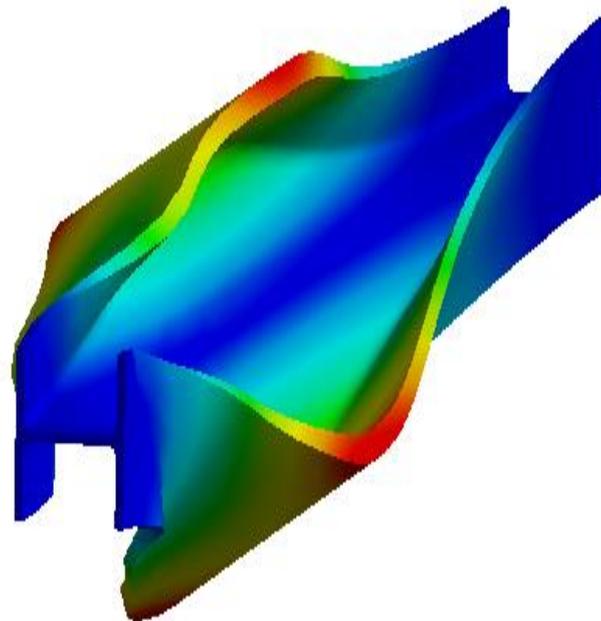
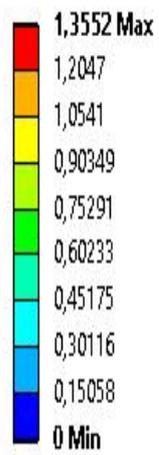
Total Deformation 2

Type: Total Deformation

Load Multiplier: -36691

Unit: m

04/11/2017 19:02



**Figura 55 - 1° modo de flambagem para viga quadrada de 23 metros.****B: Eigenvalue Buckling**

Total Deformation

Type: Total Deformation

Load Multiplier: -5737,7

Unit: m

04/11/2017 17:37

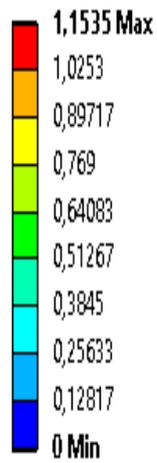


Figura 56 - 1º modo de flambagem para viga quadrada de 15 metros.

**B: Eigenvalue Buckling**

Total Deformation

Type: Total Deformation

Load Multiplier: -16806

Unit: m

04/11/2017 17:46

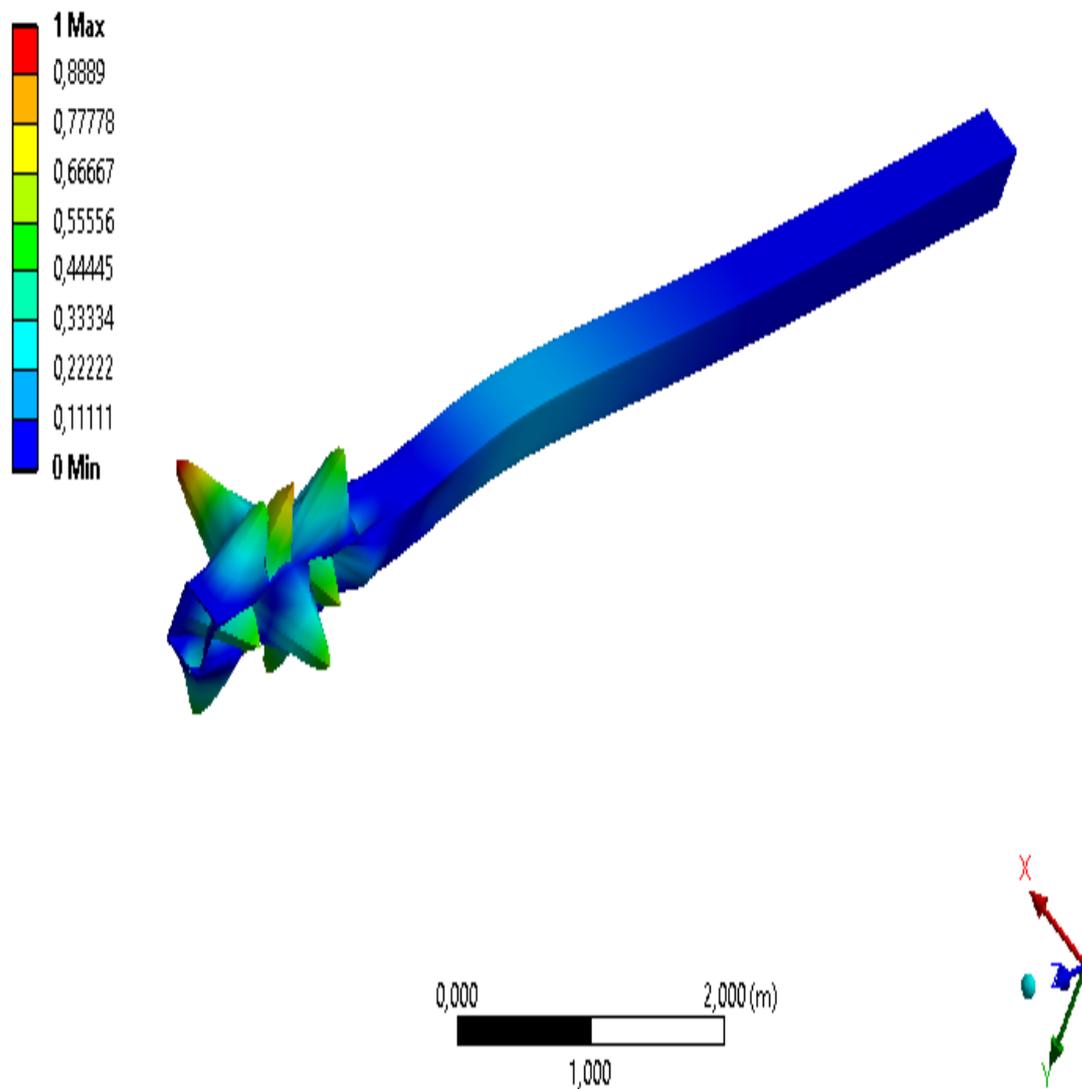


Figura 57 - 2º modo de flambagem para viga quadrada de 15 metros.

**B: Eigenvalue Buckling**

Total Deformation 2

Type: Total Deformation

Load Multiplier: -8434,4

Unit: m

04/11/2017 17:47

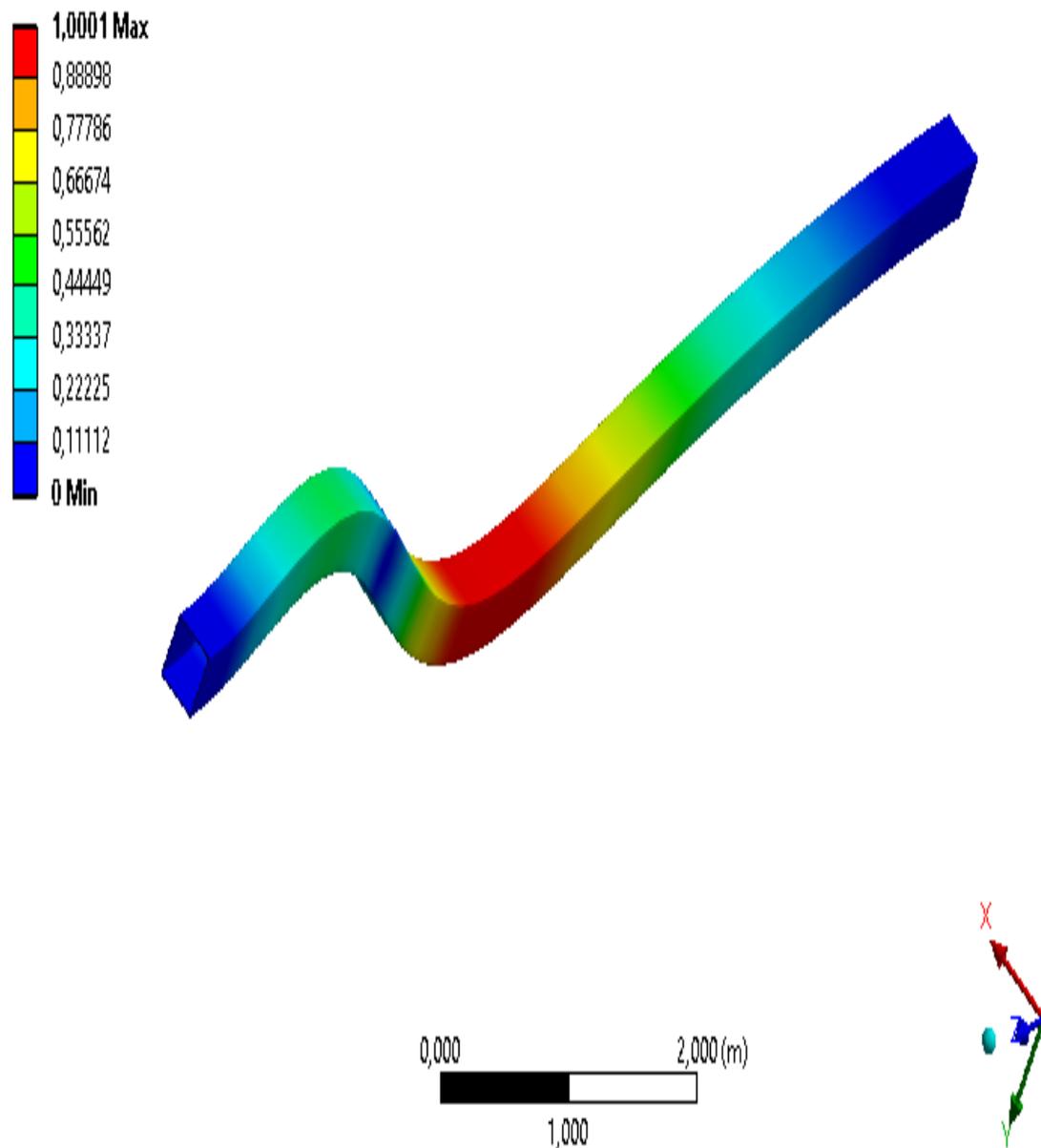


Figura 58 - 1º modo de flambagem para viga quadrada de 11 metros.

**B: Eigenvalue Buckling**

Total Deformation

Type: Total Deformation

Load Multiplier: -14987

Unit: m

04/11/2017 17:43

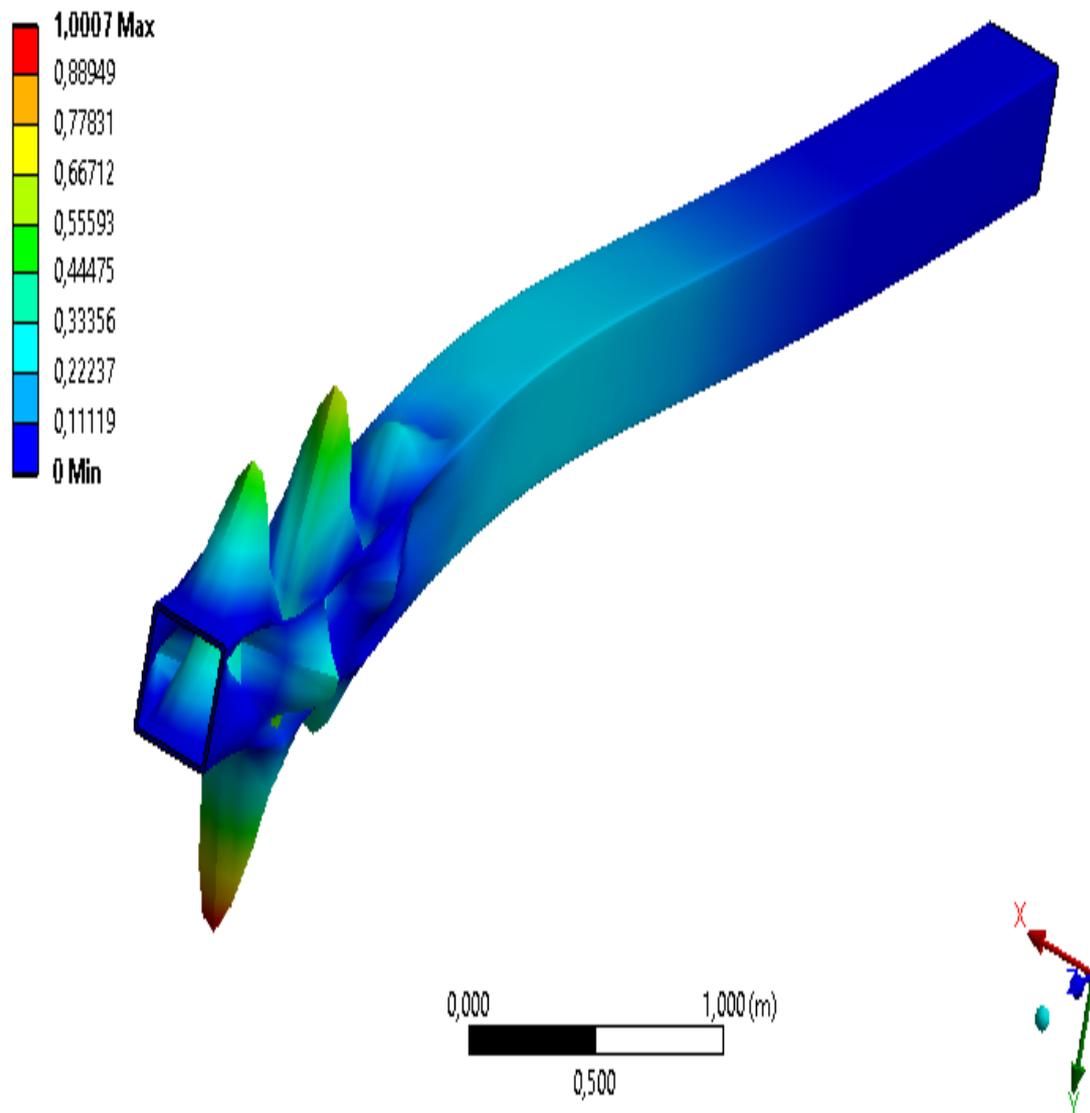


Figura 59 - 2º modo de flambagem para viga quadrada de 11 metros.

**B: Eigenvalue Buckling**

Total Deformation 2

Type: Total Deformation

Load Multiplier: -11873

Unit: m

04/11/2017 17:44

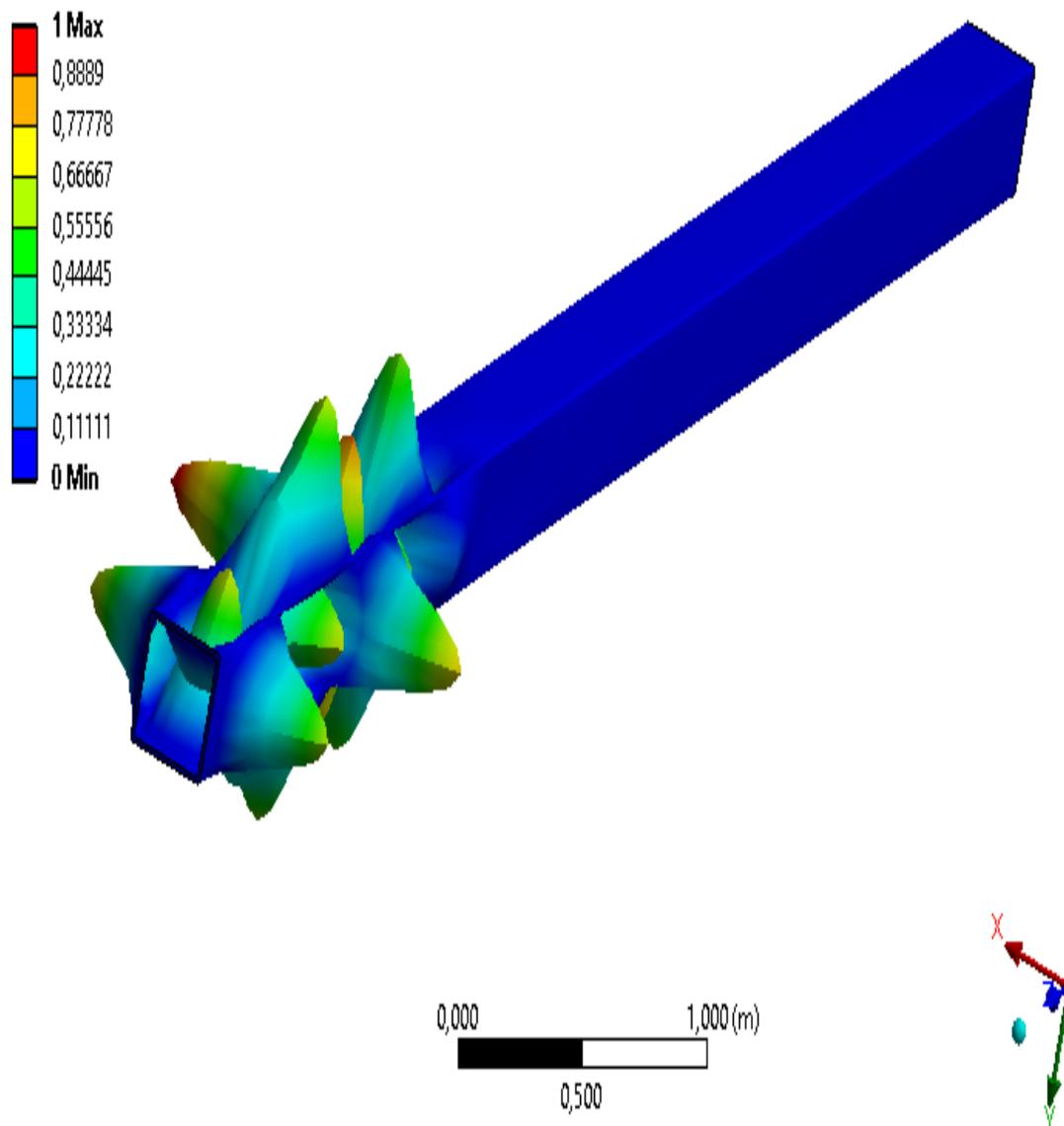


Figura 60 - 3º modo de flambagem para viga quadrada de 11 metros.

**B: Eigenvalue Buckling**

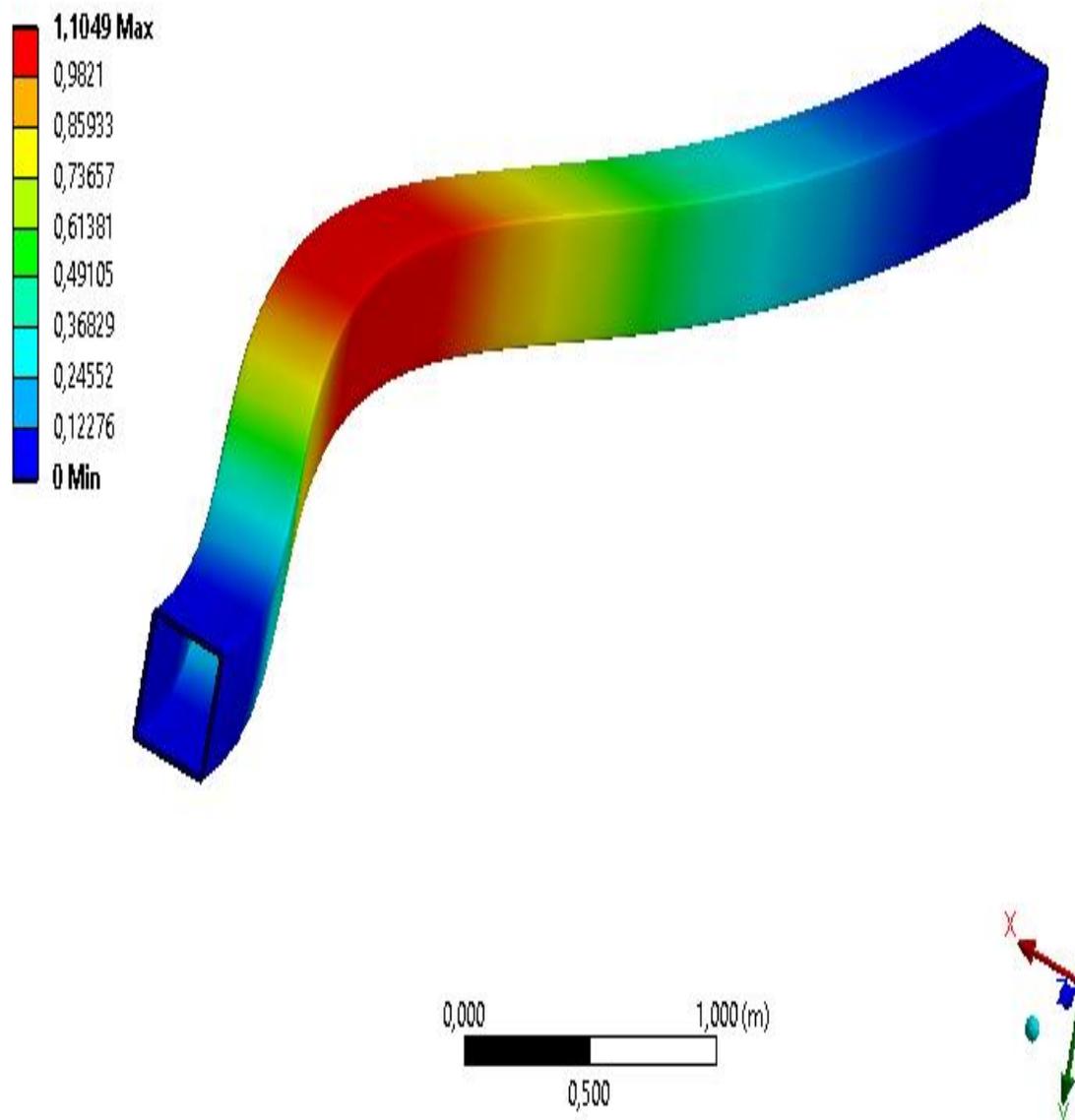
Total Deformation 3

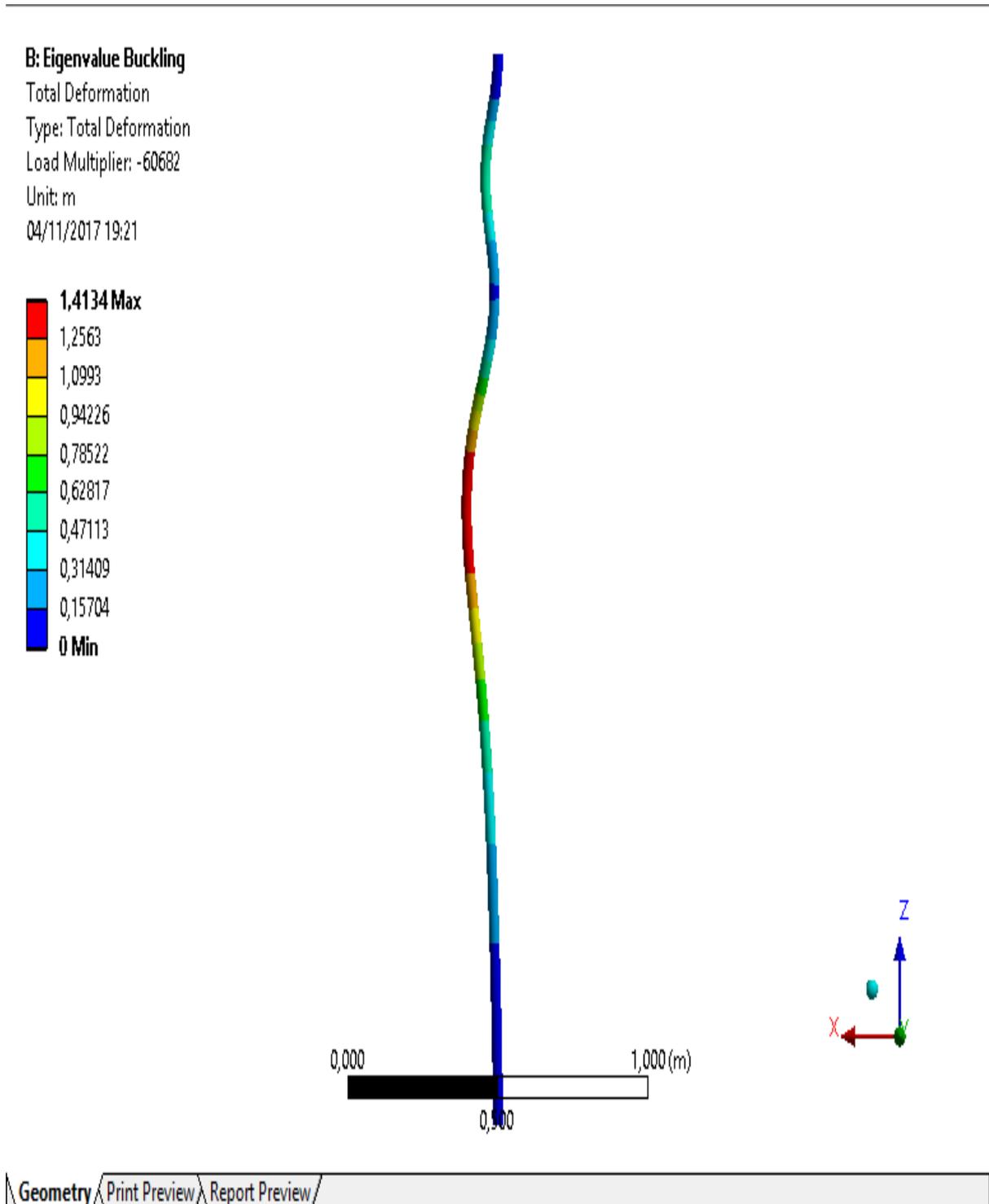
Type: Total Deformation

Load Multiplier: -9337,9

Unit: m

04/11/2017 17:45



**Figura 61 - 1º modo de flambagem para viga circular de 2,1 metros.**

**Figura 62 - 1º modo de flambagem para viga circular de 1,3 metros.****B: Eigenvalue Buckling**

Total Deformation

Type: Total Deformation

Load Multiplier:  $-2,3675e+005$ 

Unit: m

04/11/2017 19:39

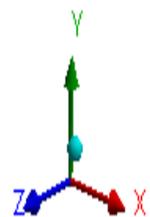
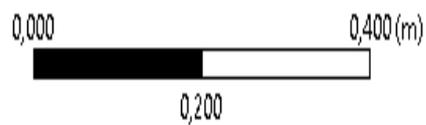
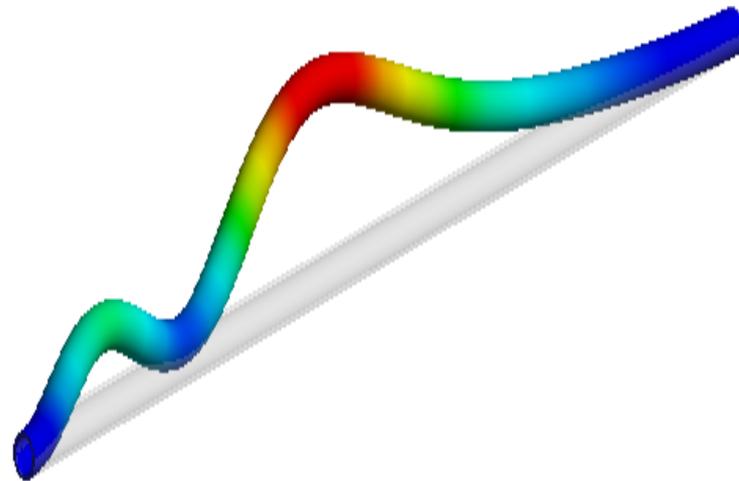
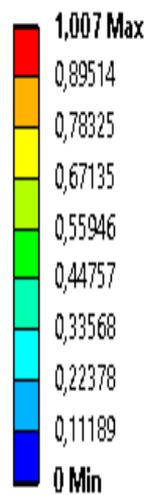
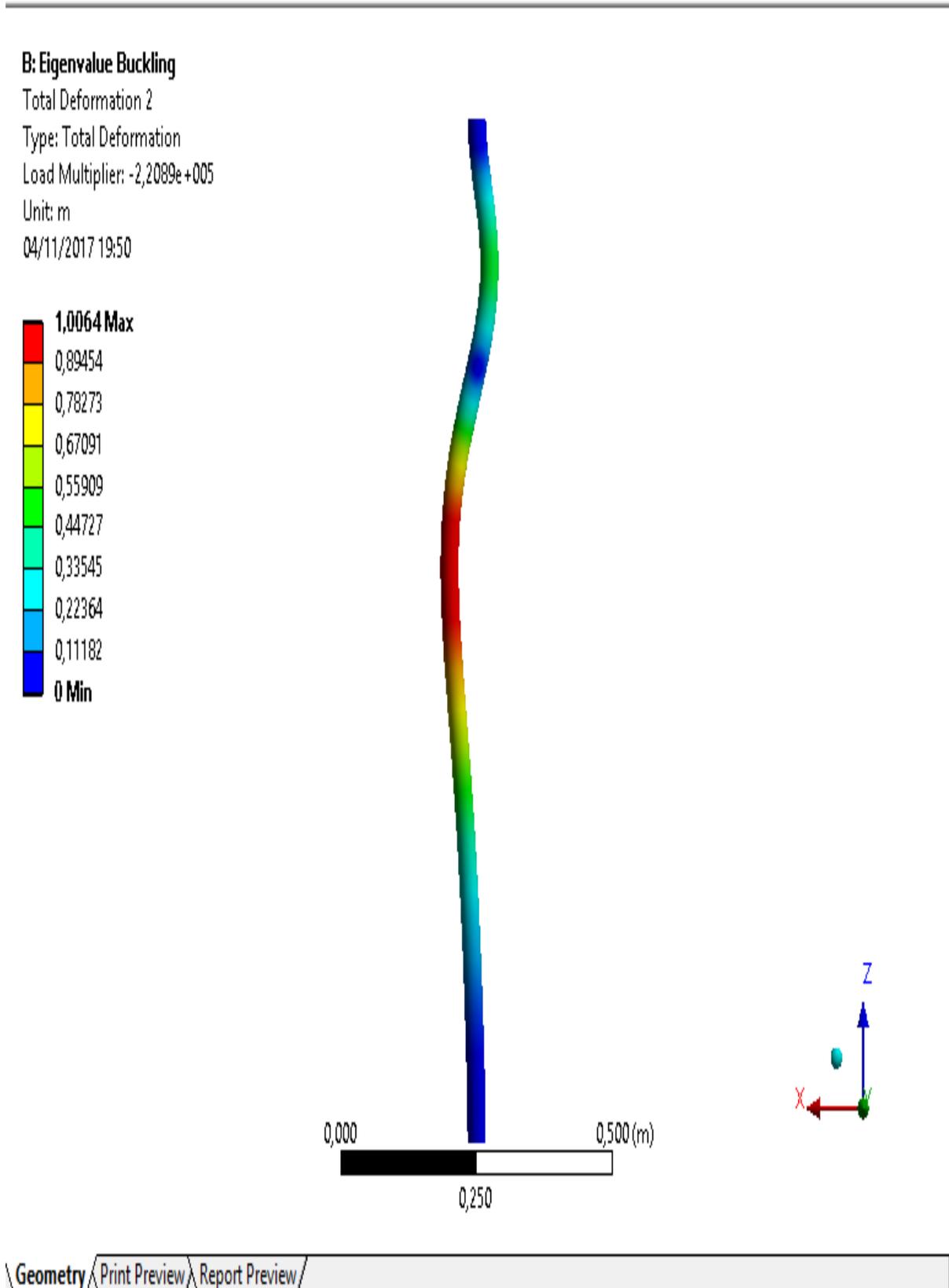


Figura 63 - 1º modo de flambagem para viga circular de 1 metro.



**Figura 64 - 1° modo de flambagem para viga U de 1,3 metros.****B: Eigenvalue Buckling**

Total Deformation

Type: Total Deformation

Load Multiplier: -61079

Unit: m

04/11/2017 19:59

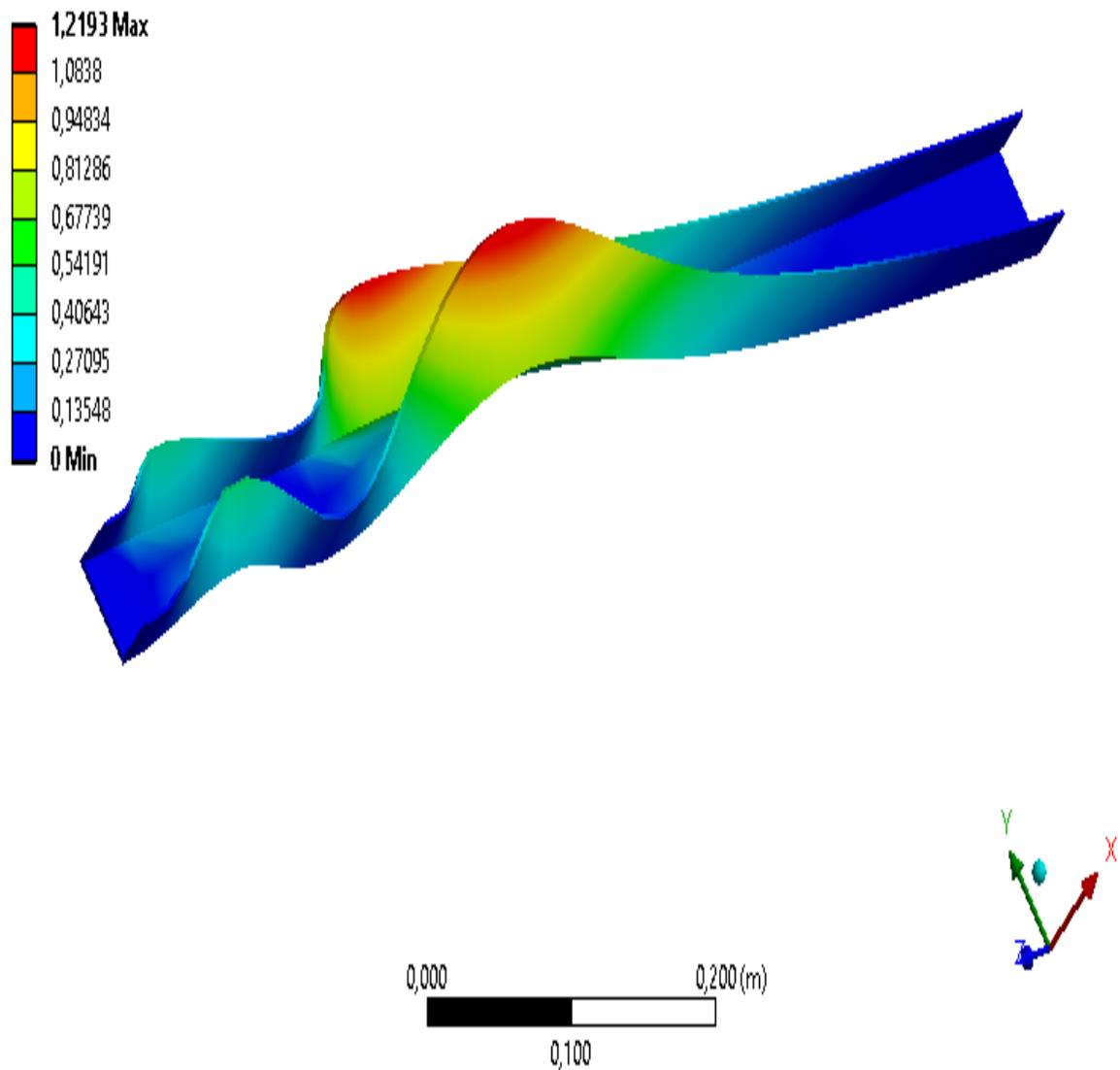


Figura 65 - 2º modo de flambagem para viga U de 1,3 metros.

**B: Eigenvalue Buckling**

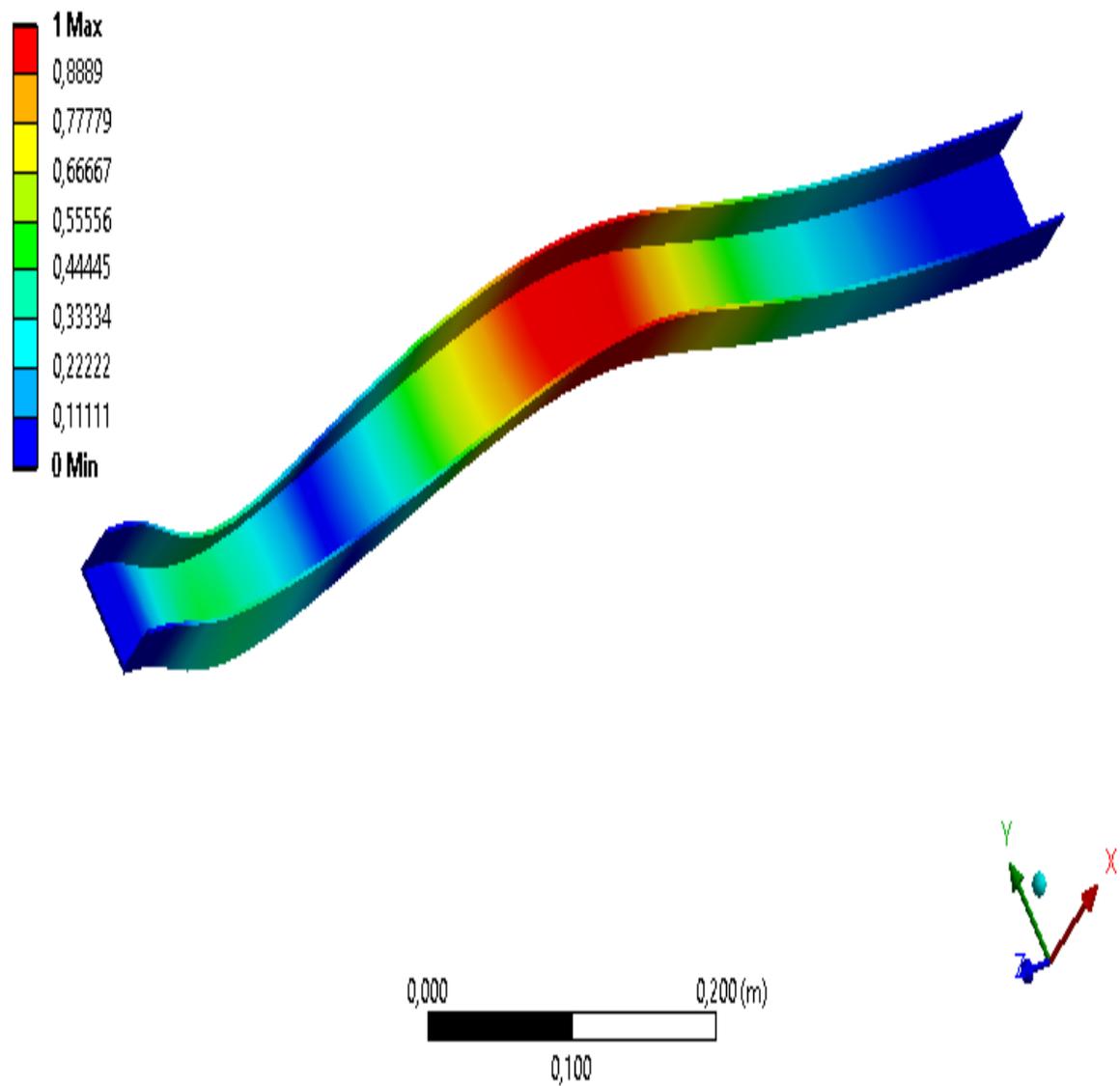
Total Deformation 2

Type: Total Deformation

Load Multiplier: -37845

Unit: m

04/11/2017 20:00



**Figura 66 - 3º modo de flambagem para viga U de 1,3 metros.****B: Eigenvalue Buckling**

Total Deformation 5

Type: Total Deformation

Load Multiplier: -15844

Unit: m

04/11/2017 20:01

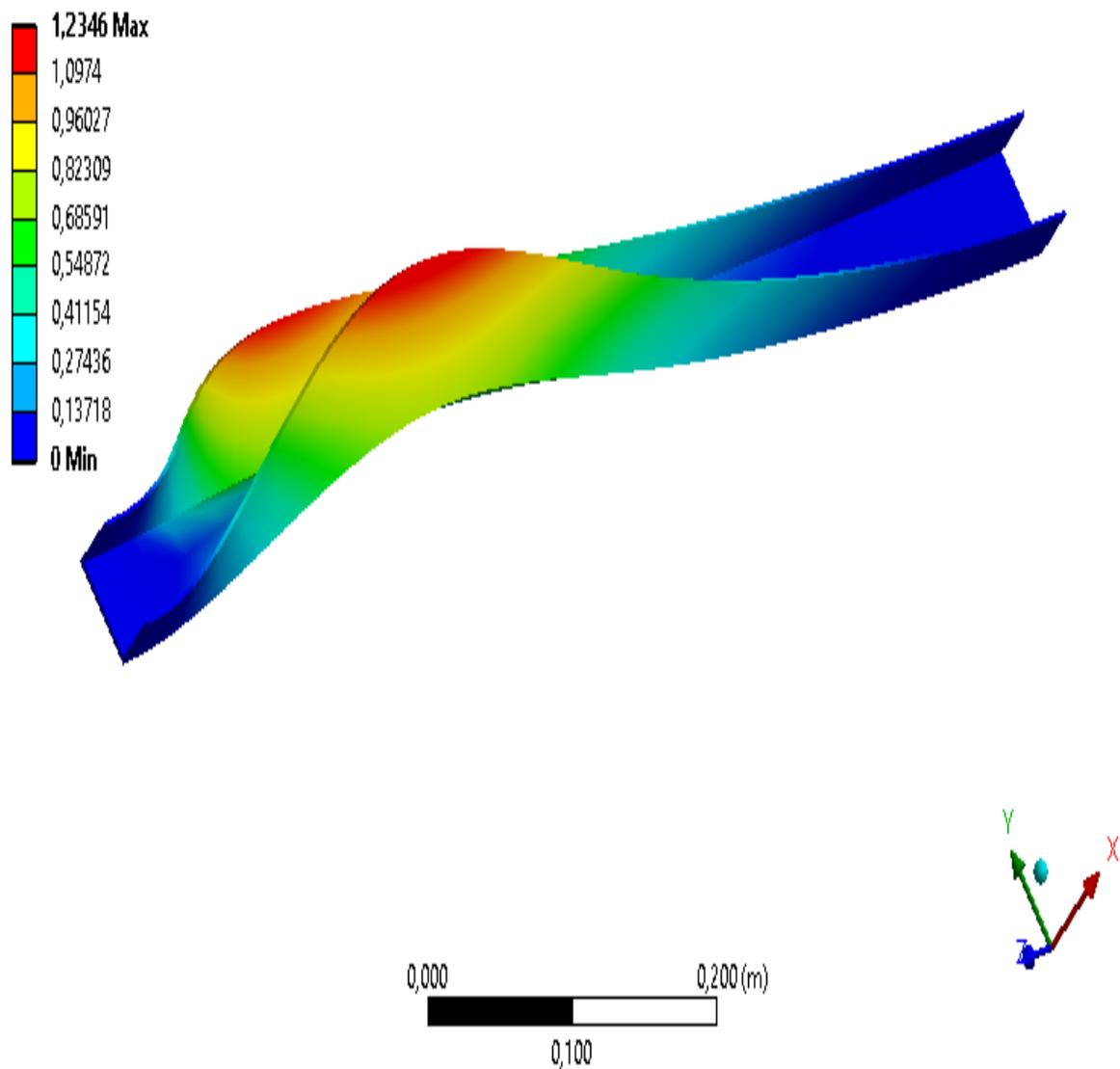


Figura 67 - 1º modo de flambagem para viga U de 1 metro.

**B: Eigenvalue Buckling**

Total Deformation

Type: Total Deformation

Load Multiplier: -60924

Unit: m

04/11/2017 20:18

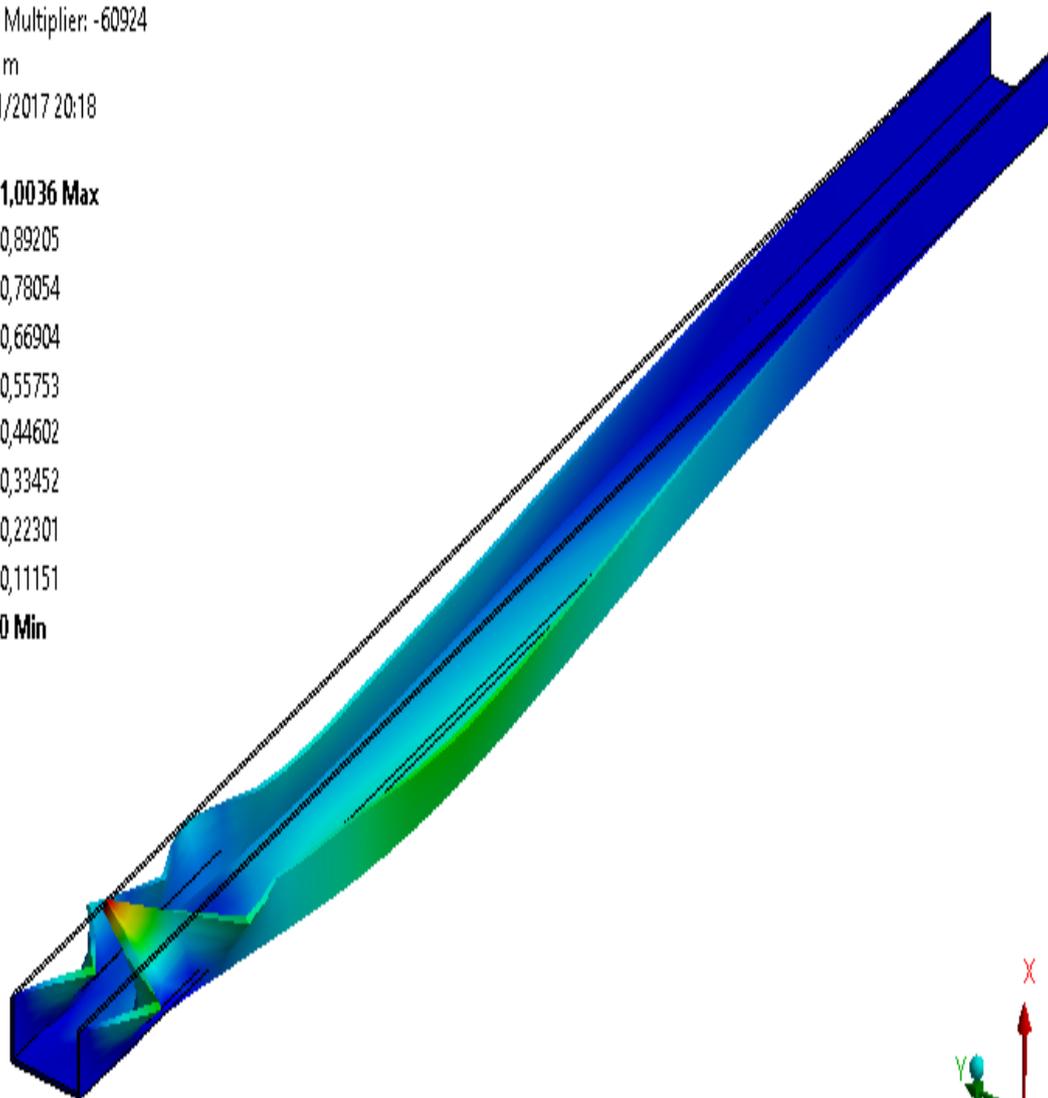
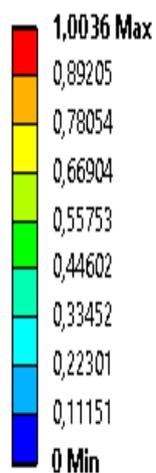


Figura 68 - 2° modo de flambar para viga U de 1 metro.

**B: Eigenvalue Buckling**

Total Deformation 3

Type: Total Deformation

Load Multiplier: -56907

Unit: m

04/11/2017 20:19

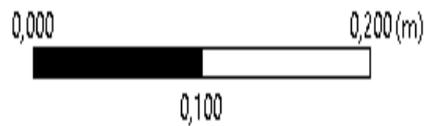
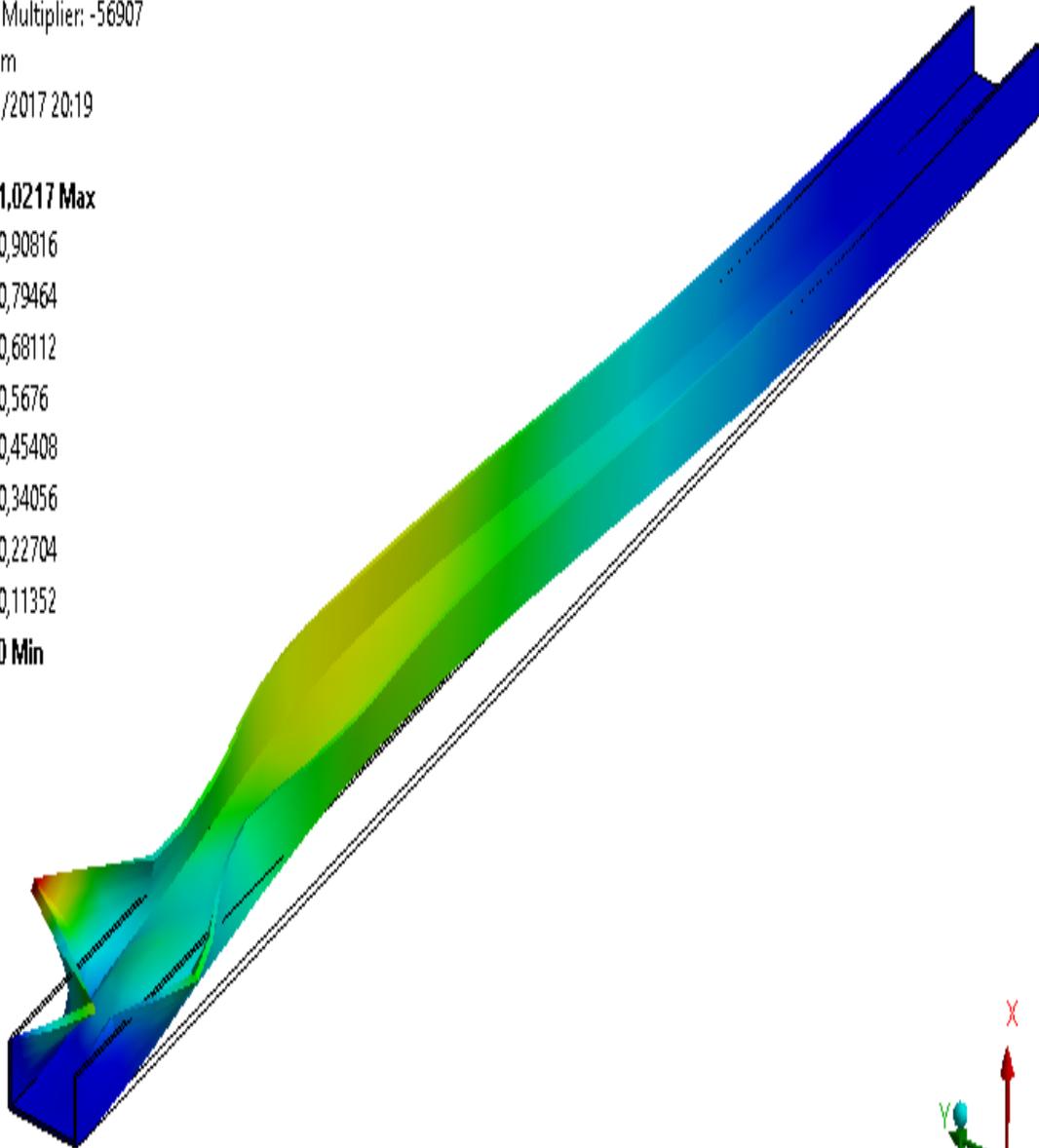
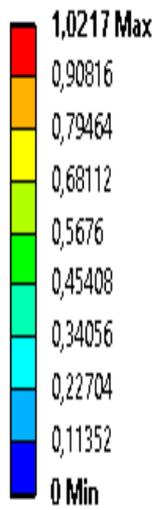


Figura 69 - 1º modo de flambagem para viga U de 0,8 metros.

**B: Eigenvalue Buckling**

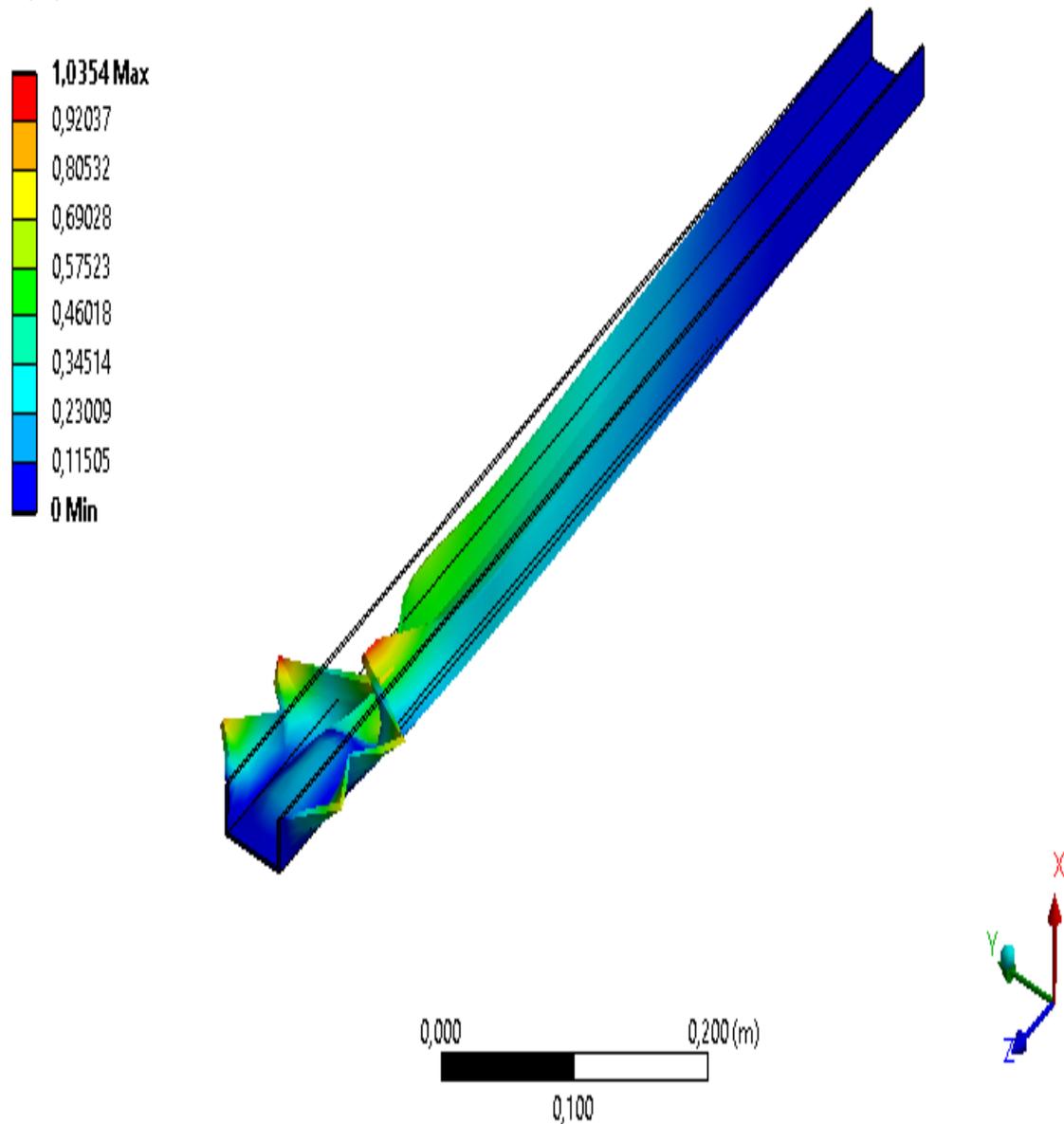
Total Deformation

Type: Total Deformation

Load Multiplier: -78134

Unit: m

04/11/2017 20:34



**Figura 70 - 2º modo de flambagem para viga U de 0,8 metros.****B: Eigenvalue Buckling**

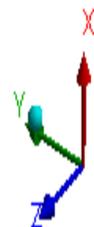
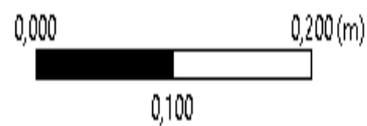
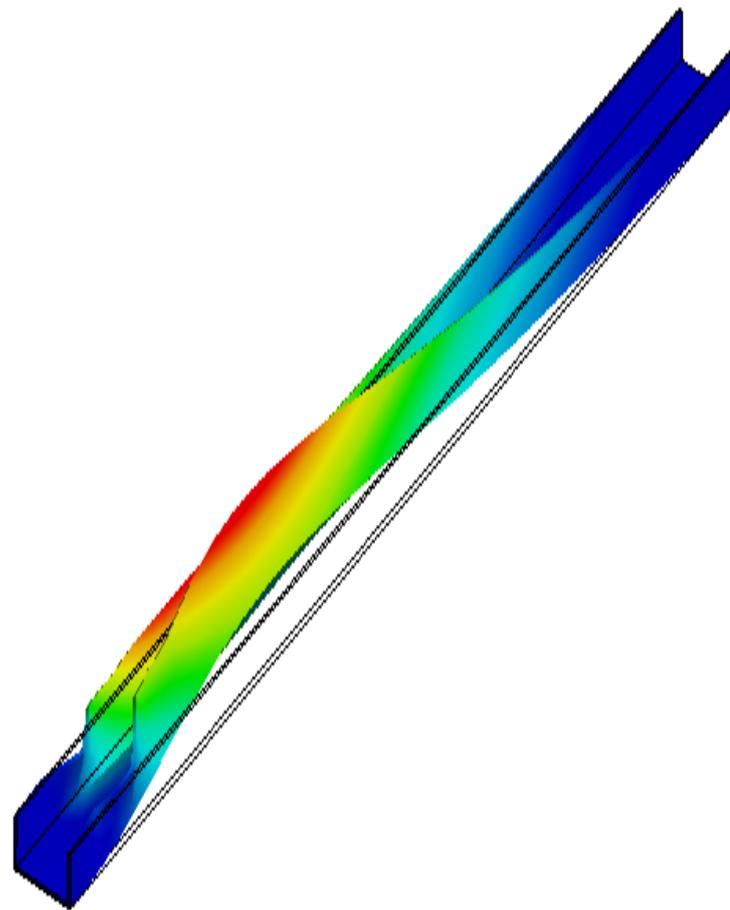
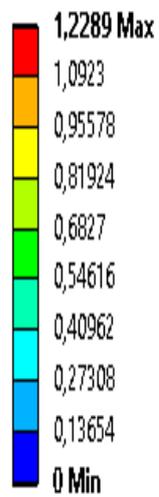
Total Deformation 2

Type: Total Deformation

Load Multiplier: -74744

Unit: m

04/11/2017 20:35



**Figura 71 - 1º modo de flambagem para viga Z de 6,6 metros.****B: Eigenvalue Buckling**

Total Deformation

Type: Total Deformation

Load Multiplier: -8164,4

Unit: m

04/11/2017 21:10

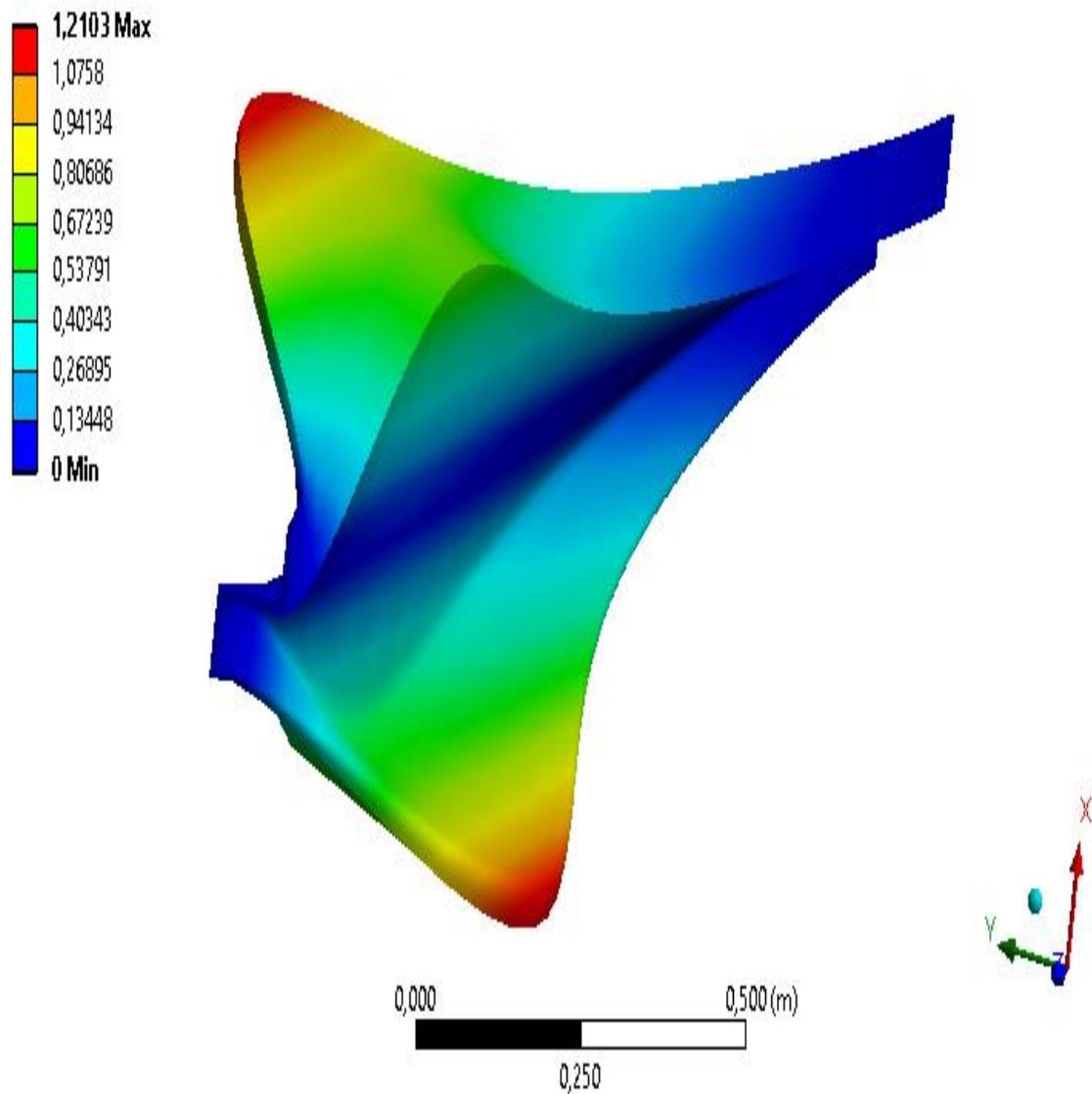


Figura 72 - 2º modo de flambagem para viga Z de 6,6 metros.

B: Eigenvalue Buckling  
Total Deformation 2  
Type: Total Deformation  
Load Multiplier: -7930,9  
Unit: m  
04/11/2017 21:11

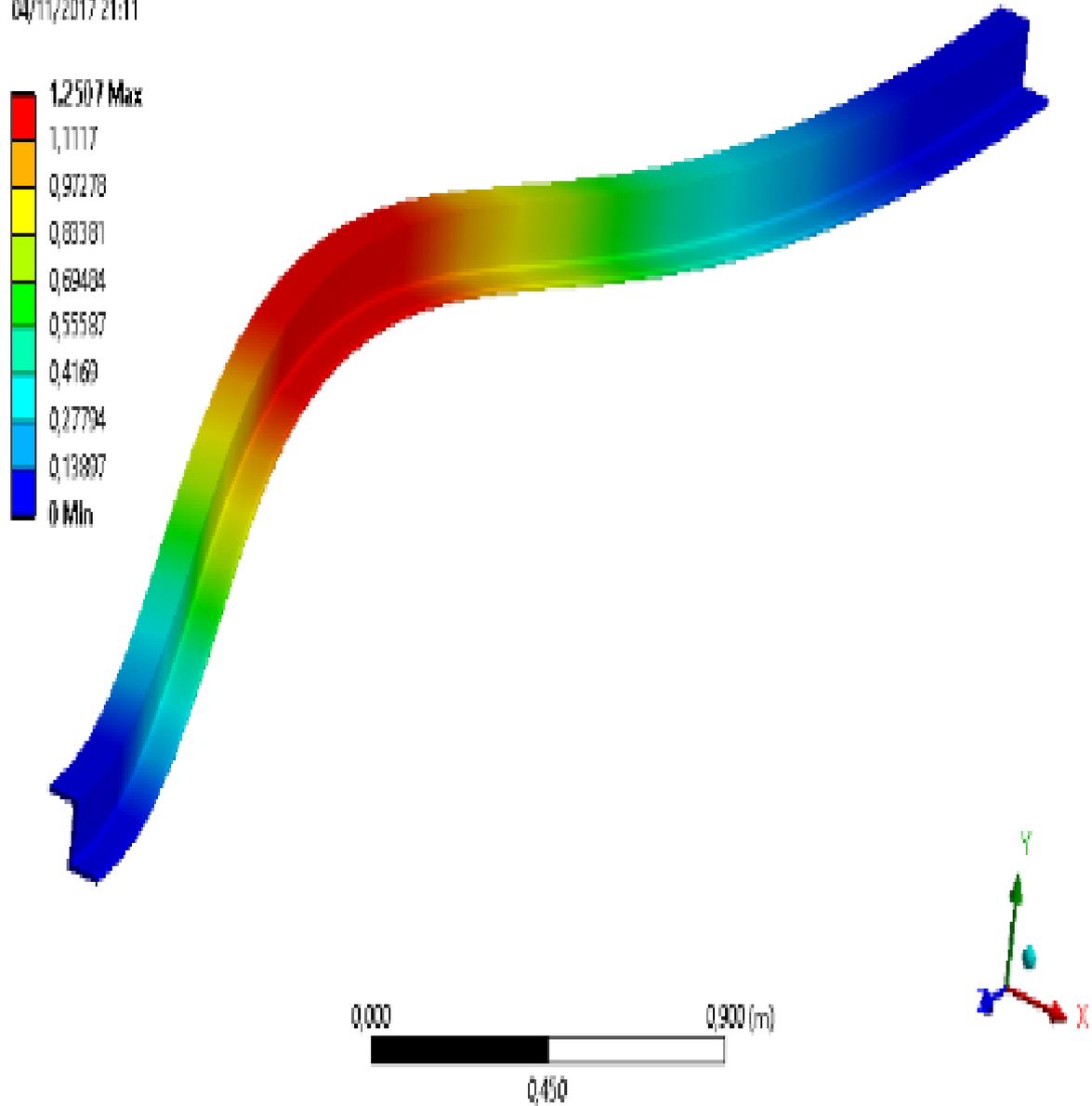


Figura 73 - 1º modo de flambagem para viga Z de 4,2 metros.

**B: Eigenvalue Buckling**

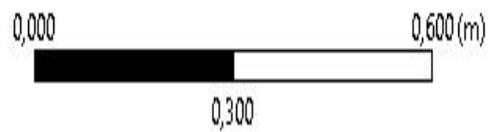
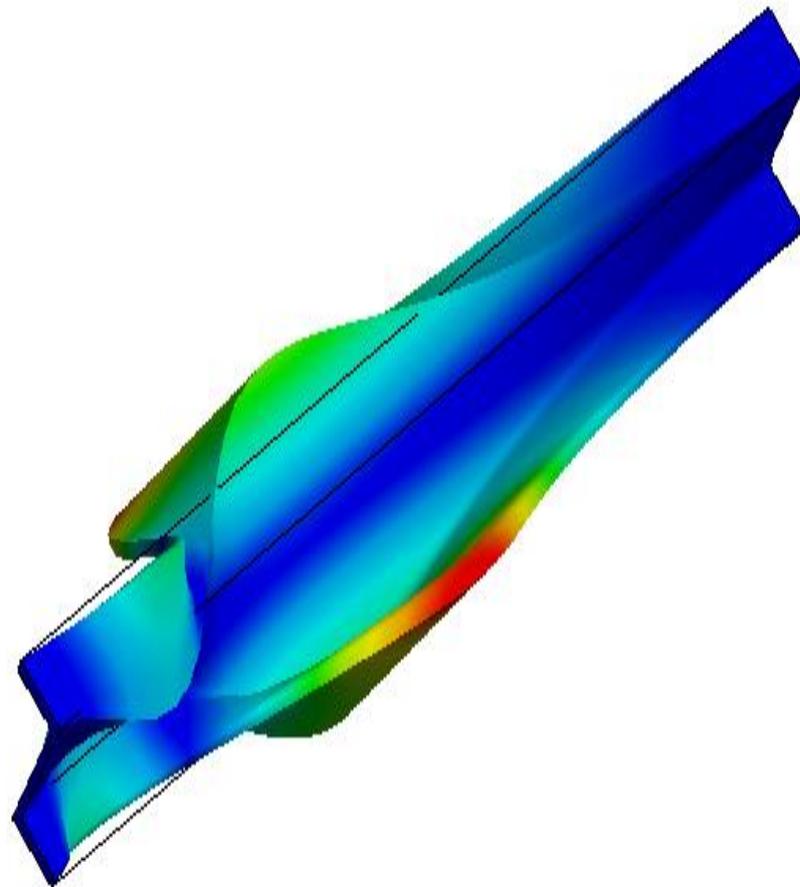
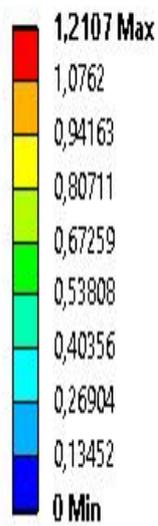
Total Deformation

Type: Total Deformation

Load Multiplier: -26675

Unit: m

04/11/2017 21:20



**Figura 74 - 2º modo de flambagem para viga Z de 4,2 metros.****B: Eigenvalue Buckling**

Total Deformation 2

Type: Total Deformation

Load Multiplier: -20034

Unit: m

04/11/2017 21:25

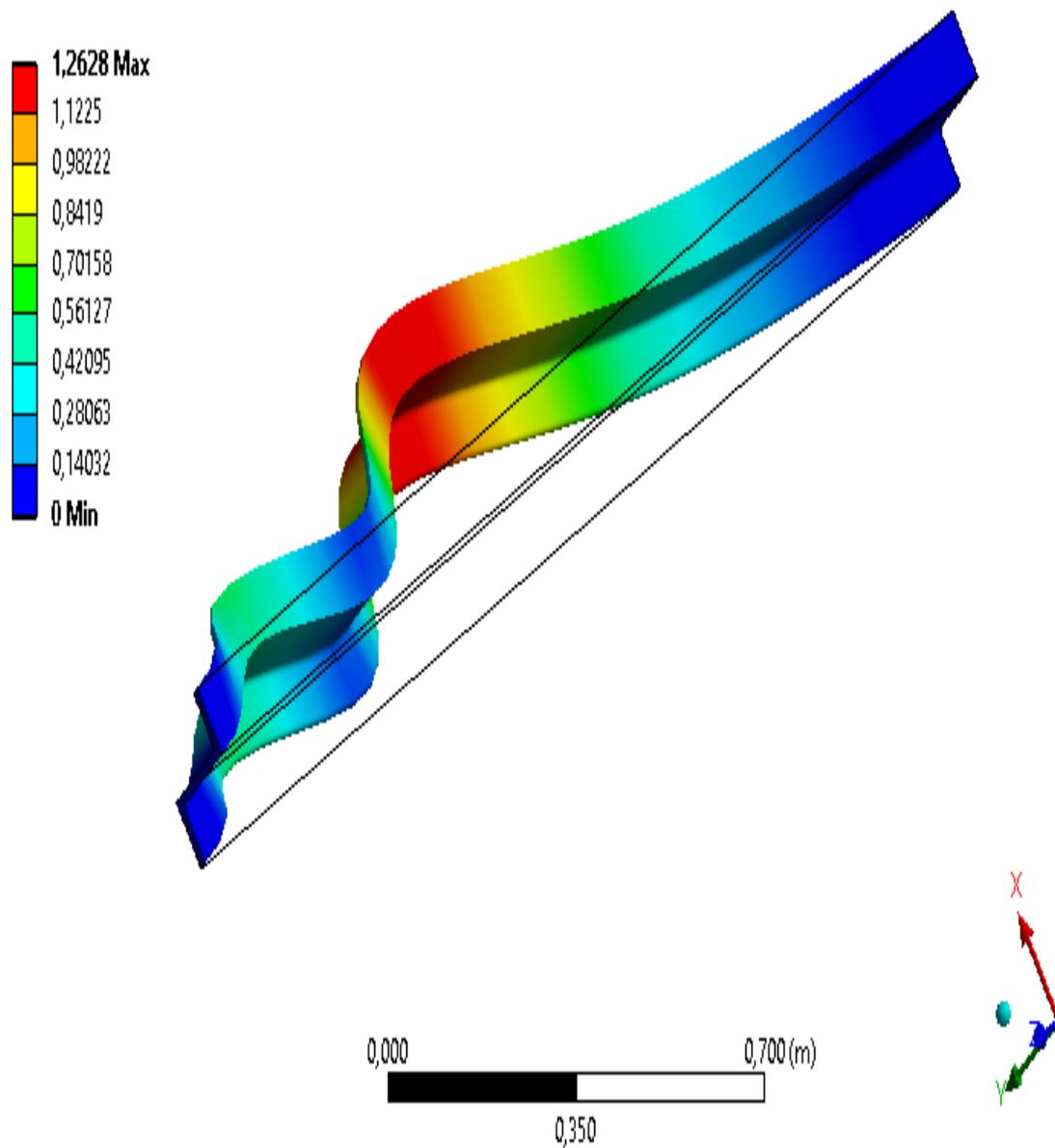


Figura 75 - 1º modo de flambagem para viga Z de 3,1 metros.

**B: Eigenvalue Buckling**

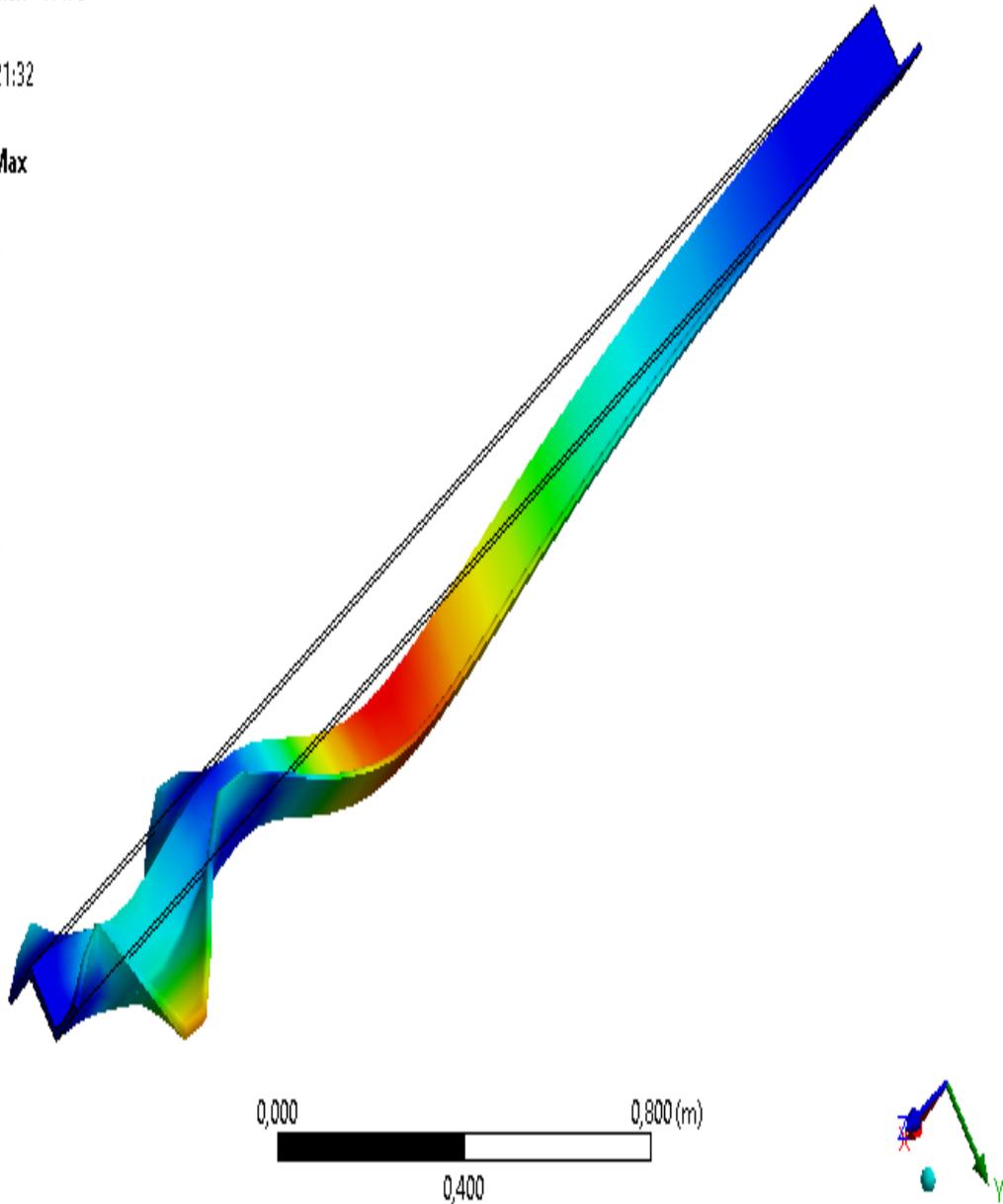
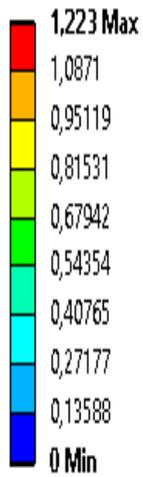
Total Deformation 2

Type: Total Deformation

Load Multiplier: -41478

Unit: m

04/11/2017 21:32



**Figura 76 - 3º modo de flambagem para viga Z de 3,1 metros.****B: Eigenvalue Buckling**

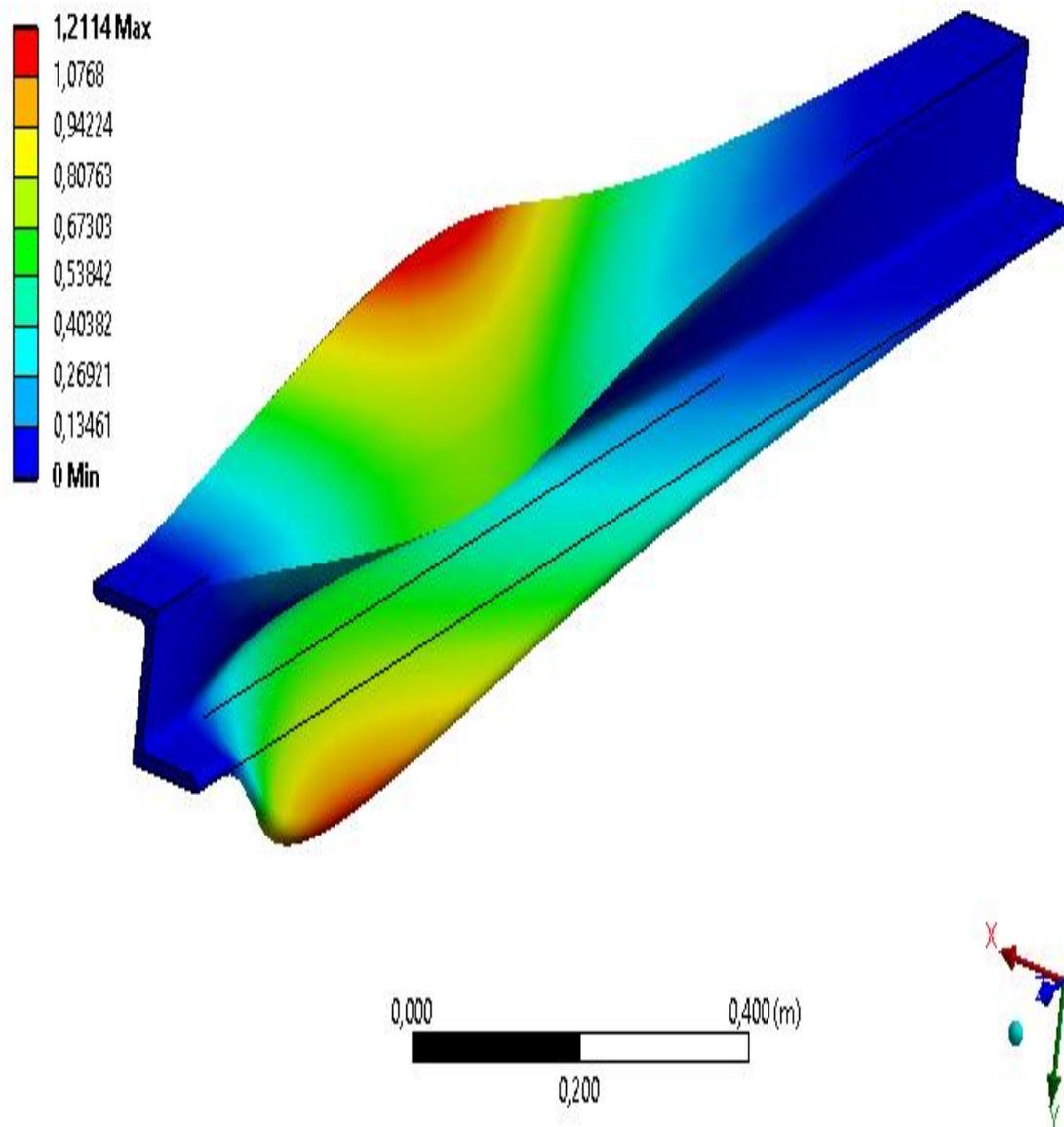
Total Deformation 3

Type: Total Deformation

Load Multiplier: -31843

Unit: m

04/11/2017 21:32



## ANEXOS

Figura 77 - Valores limite de  $b/t$ Tabela F.1 — Valores de  $(b/t)_{lim}$ 

Elementos	Grupo	Descrição dos elementos	Alguns exemplos com indicação de $b$ e $t$	$(b/t)_{lim}$
AA	1	<ul style="list-style-type: none"> <li>Mesas ou almas de seções tubulares retangulares</li> <li>Lamelas e chapas de diafragmas entre linhas de parafusos ou soldas</li> </ul>		$1,40 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$
	2	<ul style="list-style-type: none"> <li>Almas de seções I, H ou U</li> <li>Mesas ou almas de seção-caixão</li> <li>Todos os demais elementos que não integram o Grupo 1</li> </ul>		$1,49 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$
AL	3	Abas de cantoneiras simples ou múltiplas providas de chapas de travessamento		$0,45 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$
	4	<ul style="list-style-type: none"> <li>Mesas de seções I, H, T ou U laminadas</li> <li>Abas de cantoneiras ligadas continuamente ou projetadas de seções I, H, T ou U laminadas ou soldadas</li> <li>Chapas projetadas de seções I, H, T ou U laminadas ou soldadas</li> </ul>		$0,56 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$
	5	Mesas de seções I, H, T ou U soldadas <sup>a</sup>		$0,64 \sqrt{\frac{E}{(f_y/k_c)}}$
	6	Almas de seções T		$0,75 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$

Fonte: Adaptado da Norma ABNT 8800:2008.