

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE ENGENHARIA MECÂNICA
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

PEDRO HENRIQUE DELMONACO ANTUNES

**MODELO TRIDIMENSIONAL DE ANÁLISE DINÂMICA COM
IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DE UM VEÍCULO AUTOMOTOR**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

PATO BRANCO

2016

PEDRO HENRIQUE DELMONACO ANTUNES

**MODELO TRIDIMENSIONAL DE ANÁLISE DINÂMICA COM
IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DE UM VEÍCULO AUTOMOTOR**

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação, apresentado à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2, do Curso de Engenharia Mecânica da Coordenação de Engenharia Mecânica – COEME – da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, Campus Pato Branco, como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro Mecânico.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Rogerio Novak

PATO BRANCO

2016

FOLHA DE APROVAÇÃO

MODELO TRIDIMENSIONAL DE ANÁLISE DINÂMICA COM IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DE UM VEÍCULO AUTOMOTOR

Pedro Henrique Delmonaco Antunes

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado no dia 30/11/2016 como requisito parcial para a obtenção do Título de Engenheiro Mecânico, do curso de Engenharia Mecânica do Departamento Acadêmico de Mecânica (DAMEC) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Câmpus Pato Branco (UTFPR-PB). O candidato foi arguido pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora julgou o trabalho **APROVADO**.

Prof. Dr. Robson Gonçalves Trentin
(UTFPR)

Prof. Dr. Gilson Adamczuk Oliveira
(UTFPR)

Prof. Dr. Paulo Rogério Novak
(UTFPR)
Orientador

Prof. Dr. Bruno Bellini Medeiros
Responsável pelo TCC do Curso de Eng. Mecânica

DEDICATÓRIA

Dedico o presente trabalho de conclusão de curso àqueles que amo, meu pai Henrique Antunes de Sousa e minha mãe Silvia Helena Delmonaco Antunes.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos, indiferentemente, que participaram e ou contribuíram de alguma forma para a realização do presente trabalho de conclusão de curso, e em especial:

Aos meus pais, Henrique e Silvia Helena, pelo esteio incondicional durante toda a minha vida;

Aos meus familiares, pela grande valia ao longo da minha graduação;

Aos meus amigos e colegas de graduação, por todos os momentos felizes que passamos juntos, estes que ficarão para sempre guardados na minha memória;

À Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR Campus Pato Branco - pelo compromisso de desenvolver a educação tecnológica de excelência por meio do ensino, pesquisa e extensão;

Ao professor Paulo Rogerio Novak, pela orientação no desenvolvimento deste trabalho de conclusão de curso;

Aos meus demais professores, sem exceções.

RESUMO

ANTUNES, Pedro Henrique Delmonaco. Modelo Tridimensional de Análise Dinâmica com Implementação Numérica de um Veículo Automotor. 2016. 107 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecânica) - Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2016.

Em resumo, o presente estudo propôs um modelo tridimensional seguido de uma implementação numérica que objetivou analisar o comportamento dinâmico de um veículo automotor com 6 (seis) graus de liberdade. O modelo foi elaborado sob a perspectiva do fenômeno de *ride*, visando explicitar o comportamento dinâmico de um veículo automotor sob condições predeterminadas. Foram implementados 2 (dois) estudos de caso, um modelo automotor de passeio e um modelo automotor *off road*, para permitir a avaliação de propriedades geométricas, estruturais e construtivas destes. Por conseguinte, cada estudo de caso foi avaliado para duas respostas distintas, uma resposta referente à uma excitação constante e outra resposta referente à aplicação de um impulso de movimento somado à esta excitação constante. Sob o progresso e execução do presente trabalho, foi possível determinar os principais modos de vibrar correspondentes aos graus de liberdade governantes empregados, além de abordar pontos de interesse no âmbito das especificações técnicas dos modelos dos estudos de caso, uma vez que uma série de variáveis e suas respostas dinâmicas as solicitações ponderadas foram analisadas.

Palavras-Chave: modelo veicular tridimensional, passeio, *off road*

ABSTRACT

ANTUNES, Pedro Henrique Delmonaco. Three Dimensional Model of Dynamic Analysis with Numerical Implementation of an Automotor Vehicle. 2016. 107 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Diploma in Mechanical Engineering) - Course of Mechanical Engineering, Technical University Federal of Parana. Pato Branco, 2016.

In summary, the present study proposed a three-dimensional model followed by a numerical implementation that aimed to analyze the dynamic behavior of a motor vehicle with 6 (six) degrees of freedom. The model was elaborated from the perspective of the ride phenomenon, aiming at explaining the dynamic behavior of a motor vehicle under predetermined conditions. Two case studies were carried out, a passenger automotive model and an off-road automotive model, to allow the evaluation of geometric, structural and constructive properties. Therefore, each case study was evaluated for two distinct responses, a response relating to a constant excitation and another response concerning the application of a motion pulse added to this constant excitation. Under the progress and execution of the present work, it was possible to determine the main modes of vibration corresponding to the governing degrees of freedom employed, as well as to address points of interest within the technical specifications of the case study models, since a series of variables And their dynamic responses the weighted requests were analyzed.

Keywords: three dimensional model, passenger, off road

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - O carro patenteado por Carl Benz em 1886.....	15
Figura 2 - Sistema de Eixos Coordenados Veicular SAE.	18
Figura 3 - O fenômeno do ride.	19
Figura 4 - O fenômeno do ride.	20
Figura 5 - Espectro de densidades típico de perfis de elevação de uma via.....	21
Figura 6 - Reações de torque por momentos secundários.	23
Figura 7 - Mapa espectral das vibrações embarcadas em um veículo.....	24
Figura 8 - Mapa espectral das vibrações embarcadas em um veículo.....	24
Figura 9 - Motor transversal típico.....	25
Figura 10 - Geometria de um veículo quando em manobra.	26
Figura 11 - Propriedades das componentes de força nos pneus.	27
Figura 12 - Sistema de suspensão esquemático.....	29
Figura 13 - Sistema de suspensão traseira Four Link.....	30
Figura 14 - Sistema de suspensão traseira Hotchkiss.....	31
Figura 15 - Sistema de suspensão traseira De Dion.....	31
Figura 16 - Sistema de suspensão tipo braços oscilantes (Trailing-Arm).....	32
Figura 17 - Sistema de suspensão tipo SLA (Short-Long Arm ou Double Wishbone).....	33
Figura 18 - Sistema de suspensão tipo Multi-Link.....	33
Figura 19 - Sistema de suspensão tipo MacPherson.....	34
Figura 20 - Sistema de coordenadas e principais graus de liberdade da carroceria.	36
Figura 21 - Modelo esquemático de 1/4 de veículo com dois graus de liberdade.....	37
Figura 22 - Representação esquemática do modelo tridimensional em estrutura de arames. ..	39
Figura 23 - Matriz massa [M] simbólica.	45
Figura 24 - Matriz massa [M] numérica.....	46
Figura 25 - Matriz amortecimento [C] simbólica.....	46
Figura 26 - Matriz amortecimento [C] numérica.....	47

Figura 27 - Matriz rigidez [K] simbólica.....	47
Figura 28 - Matriz rigidez [K] numérica.	48
Figura 29 - Matriz massa [M] simbólica.	49
Figura 30 - Matriz massa [M] numérica.	49
Figura 31 - Matriz amortecimento [C] simbólica.....	50
Figura 32 - Matriz amortecimento [C] numérica.....	50
Figura 33 - Matriz rigidez [K] simbólica.....	51
Figura 34 - Matriz rigidez [K] numérica.	51
Figura 35 - Matriz dos autovalores [λ].	55
Figura 36 - Matriz dos autovetores [ϕ].	55
Figura 37 - Matriz das frequências naturais [Hz].	56
Figura 38 - Matriz das frequências naturais [rad/s].	56
Figura 39 - Modo de vibrar de Bounce (deslocamento vertical de corpo rígido da carroceria) no modelo passeio.	57
Figura 40 - Modo de vibrar de Pitch (ângulo da carroceria revolucionado em torno do eixo das ordenadas) no modelo passeio.	58
Figura 41 - Modo de vibrar do primeiro deslocamento vertical (eixo dianteiro) do conjunto de suspensão no modelo passeio.	59
Figura 42 - Modo de vibrar do primeiro deslocamento vertical (eixo dianteiro) do conjunto de suspensão no modelo passeio.	59
Figura 43 - Modo de vibrar do segundo deslocamento vertical (eixo traseiro) do conjunto de suspensão no modelo passeio.	60
Figura 44 - Modo de vibrar do segundo deslocamento vertical (eixo traseiro) do conjunto de suspensão no modelo passeio.	60
Figura 45 - Modo de vibrar de Bounce com impulso no modelo passeio.	61
Figura 46 - Modo de vibrar de Pitch com impulso no modelo passeio.	62
Figura 47 - Modo de vibrar do primeiro deslocamento vertical (eixo dianteiro) com impulso no modelo passeio.	62
Figura 48 - Modo de vibrar do primeiro deslocamento vertical (eixo dianteiro) com impulso no modelo passeio.	63

Figura 49 - Modo de vibrar do segundo deslocamento vertical (eixo traseiro) com impulso no modelo passeio.	63
Figura 50 - Modo de vibrar do segundo deslocamento vertical (eixo traseiro) com impulso no modelo passeio.	64
Figura 51 - Matriz dos autovalores $[\lambda]$	66
Figura 52 - Matriz dos autovetores $[\phi]$	66
Figura 53 - Matriz das frequências naturais [Hz].	67
Figura 54 - Matriz das frequências naturais [rad/s].	67
Figura 55 - Modo de vibrar de Bounce (deslocamento vertical de corpo rígido da carroceria) no modelo off road.	68
Figura 56 - Modo de vibrar de Pitch (ângulo da carroceria revolucionado em torno do eixo das ordenadas) no modelo off road.	69
Figura 57 - Modo de vibrar do primeiro deslocamento vertical (eixo dianteiro) do conjunto de suspensão no modelo off road.	70
Figura 58 - Modo de vibrar do primeiro deslocamento vertical (eixo dianteiro) do conjunto de suspensão no modelo off road.	70
Figura 59 - Modo de vibrar do segundo deslocamento vertical (eixo traseiro) do conjunto de suspensão no modelo off road.	71
Figura 60 - Modo de vibrar do segundo deslocamento vertical (eixo traseiro) do conjunto de suspensão no modelo off road.	71
Figura 61 - Modo de vibrar de Bounce com impulso no modelo off road.	72
Figura 62 - Modo de vibrar de Pitch com impulso no modelo off road.	73
Figura 63 - Modo de vibrar do primeiro deslocamento vertical (eixo dianteiro) com impulso no modelo off road.	73
Figura 64 - Modo de vibrar do primeiro deslocamento vertical (eixo dianteiro) com impulso no modelo off road.	74
Figura 65 - Modo de vibrar do segundo deslocamento vertical (eixo traseiro) com impulso no modelo off road.	74
Figura 66 - Modo de vibrar do segundo deslocamento vertical (eixo traseiro) com impulso no modelo off road.	75
Figura 67 - Modo de vibrar do primeiro deslocamento vertical (eixo dianteiro) com impulso no modelo off road.	75

Figura 68 - Modo de vibrar do segundo deslocamento vertical (eixo traseiro) com impulso no modelo off road.76

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Parâmetros de simulação	54
Tabela 2 - Parâmetros de simulação	65

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	OBJETIVO GERAL.....	16
1.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	16
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	17
2.1	INTRODUÇÃO.....	17
2.2	FUNDAMENTOS DA DINÂMICA VEICULAR	17
2.3	<i>RIDE</i>	19
2.3.1	Fontes Excitadoras de <i>Ride</i>	20
2.3.1.1	Irregularidades do perfil do pavimento de rolagem.....	20
2.3.1.2	Fontes embarcadas.....	22
2.3.1.3	Sistema pneu-roda	22
2.3.1.4	Sistema de direção	22
2.3.1.5	Motor	25
2.4	<i>HANDLING</i>	26
2.4.1	Forças de <i>Handling</i> nos Pneus	27
2.5	SUSPENSÃO	28
2.5.1	Suspensão de Eixo Rígido	29
2.5.2	Suspensão Independente.....	32
3	METODOLOGIA	34
3.1	MODELO TRIDIMENSIONAL DE ANÁLISE DINÂMICA	34
3.1.1	Graus de Liberdade.....	35
3.1.2	Massa Suspensa e Massa Não Suspensa.....	36
3.1.3	Pneus.....	36
3.1.4	Pista	37
3.2	EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO DINÂMICO	37

3.2.1 Translação dos Graus de Liberdade	42
3.2.2 Matrizes Massa, Amortecimento e Rigidez do Modelo Categoria Passeio.....	45
3.2.3 Matrizes Massa, Amortecimento e Rigidez do Modelo Categoria <i>Off Road</i>	49
3.3 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA	52
4 RESULTADOS.....	54
4.1 MODELO VEICULAR TRIDIMENSIONAL CATEGORIA PASSEIO	54
4.2 MODELO VEICULAR TRIDIMENSIONAL CATEGORIA <i>OFF ROAD</i>	65
5 CONCLUSÕES	76
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	78
APÊNDICE A - IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA.....	80
MODELO VEICULAR TRIDIMENSIONAL CATEGORIA PASSEIO	80
MODELO VEICULAR TRIDIMENSIONAL CATEGORIA <i>OFF ROAD</i>	94

1 INTRODUÇÃO

Automóvel, em sua semântica, diz respeito a auto, àquele que se locomove por seus próprios meios e foi influenciado pelo termo Francês *automobile*. Comemorou-se, recentemente, 130 (cento e trinta) anos do registro da primeira patente de um veículo automotor movido a gasolina, concedida ao engenheiro alemão Carl Benz, em 1886, vide Figura 1. Carl Benz foi o primeiro a registrar a invenção, entretanto, cabe ressaltar que outro engenheiro alemão, Gottlieb Daimler, executou um projeto semelhante no mesmo ano.

O surgimento dos veículos a motor de combustão interna representou um grande marco nas áreas de interesse ligadas à tecnologia e engenharia, primordialmente. Haja vista a necessidade de se compreender a complexa e nova gama de características construtivas destas máquinas, grandes estudos foram realizados e implementados ao longo destes anos. Estes estudos, em conjunto com os massivos avanços tecnológicos e de engenharia, por sua vez, guiaram o aperfeiçoamento e otimização dos veículos automotores tais quais os conhecemos hoje.

Figura 1 - O carro patenteado por Carl Benz em 1886.



Fonte: Cortesia de Mercedes-Benz.

Consoante sob a ótica das evoluções supracitadas e com ênfase no escopo da dinâmica veicular, faz-se necessário o estudo do comportamento e, por conseguinte, das respostas destas máquinas aos inúmeros esforços a que estão submetidas durante o seu pleno funcionamento. Logo, o presente estudo propõe um modelo tridimensional seguido de uma

implementação numérica que objetiva analisar o comportamento dinâmico de um veículo automotor de quatro rodas.

1.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo geral do presente estudo fundamenta-se no desenvolvimento de um modelo veicular automotor tridimensional com 6 (seis) graus de liberdade e, por conseguinte, na implementação numérica intrínseca a este modelo.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Visa implementar uma ferramenta computacional hábil o bastante para descrever e prever a resposta dinâmica de um modelo veicular automotor tridimensional com 6 (seis) graus de liberdade;
- O modelo analítico matemático a ser levado à prática objetiva permitir a avaliação das funções de uma gama de propriedades geométricas, estruturais e de pré-projeto veiculares sob a ótica de um fenômeno de interesse;
- O modelo supracitado será elaborado sob a perspectiva do fenômeno de *ride*, visando explicitar o comportamento dinâmico de um veículo automotor sob condições determinadas de construção e projeto;
- Consoante sob o progresso e execução do presente trabalho, será possível, em caráter qualitativo e quantitativo, abordar pontos de interesse no âmbito das especificações técnicas do veículo, haja vista que uma série de variáveis e suas respostas dinâmicas as solicitações ponderadas serão elucidadas.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 INTRODUÇÃO

Segundo Gillespie (1992), o entendimento da dinâmica veicular pode ser tangido em dois níveis, o primeiro faz menção ao método empírico e o segundo ao método analítico. O embasamento teórico do método empírico deriva de tentativas e erros, fato que, comumente, pode levar a conclusões falhas devido ao mau entendimento dos fenômenos físicos e mecânicos envolvidos. Em contrapartida, o método analítico visa descrever os pontos de interesse relacionados à mecânica fundamentado nos conhecimentos das leis da física e da matemática. Portanto, esta última abordagem é usualmente privilegiada pela comunidade científica.

Em casos simples, por exemplo, estes modelos podem ser representados por equações algébricas ou diferenciais que correlacionam as variáveis pertinentes ao fenômeno, criando, assim, uma ferramenta capaz de identificar e prever fatores importantes da dinâmica veicular, o modo como estes operam e sob quais condições, sobretudo.

Com o alvorecer da engenharia da computação e a progressiva otimização de hardwares e softwares, é notório que o profissional de engenharia dedicado à esta área de conhecimento, por sua vez, ganhou uma ferramenta poderosa e hábil capaz de implementar modelos cada vez mais complexos e aproximados da realidade, minimizando, assim, a margem de erro intrínseca ao estudo.

2.2 FUNDAMENTOS DA DINÂMICA VEICULAR

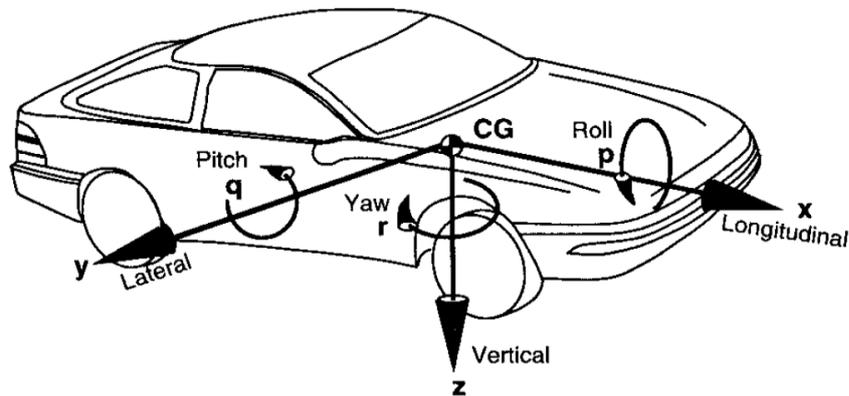
Acerca dos princípios de performance do veículo automotor, o movimento é abordado sob a ótica de quatro variáveis básicas, são estas: aceleração, frenagem, *handling* e *ride*.

As forças dominantes agindo no sistema em estudo são impostas pela interação do pneu com o pavimento de rolagem. Estes estímulos podem ser divididos e agrupados conforme a sua direção, orientação e resposta, respectivamente. As forças tangenciais derivadas da interação pneu solo correspondem ao controle do veículo. As forças laterais propiciam o controle direcional e a estabilidade relevantes. As forças longitudinais originam aceleração e desaceleração, por conseguinte.

Consoante sob Gillespie (1992), faz-se necessário um perfeito e íntimo entendimento do comportamento dos pneus, sobretudo, caracterizado pelos carregamentos e momentos gerados sobre uma ampla gama de condições sob as quais estes operam.

Para o correto entendimento do escopo deste estudo, o sistema de eixos coordenados empregado pela SAE para a determinação do centro de gravidade do modelo e os principais ângulos seguem na Figura 2.

Figura 2 - Sistema de Eixos Coordenados Veicular SAE.



Fonte: Gillespie, T. D., 1992. Fundamentals of Vehicle Dynamics. SAE.

- Ângulo de *Roll* (ou rolagem): ângulo revolucionado em torno do eixo x;
- Ângulo de *Pitch* (ou guinada): ângulo revolucionado em torno do eixo y;
- Ângulo de *Yaw* (ou direção): ângulo revolucionado em torno do eixo z.

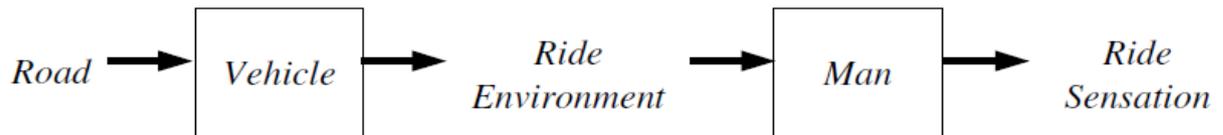
Sucintamente, o termo *ride* faz referência à interação do veículo com o pavimento de rolagem e, portanto, com as diversas fontes de excitação geradas pelo perfil da pista e, por conseguinte, com a sensação obtida pelo motorista deste veículo. Em contrapartida, o termo *handling* diz respeito ao comportamento de um veículo automotor quando este estiver sob uma ação de controle motora, isto é, em manobra.

É sabido que o presente estudo irá abordar, detalhadamente, o fenômeno de *ride*, todavia, ambos os conceitos serão discutidos no decorrer dos tópicos subsequentes.

2.3 RIDE

A Figura 3 esquematiza um resumo global apresentado por Butkunas (1966) dos elementos vinculados à uma avaliação de *ride* para veículos automotores, em geral.

Figura 3 - O fenômeno do ride.



Fonte: Butkunas, A. A., 1966. Power Spectral Density and Ride Evaluation. SAE.

O termo *ride* corresponde à interação do veículo com o pavimento de rolagem e, portanto, com as diversas fontes de excitação geradas pelo perfil da pista e, por conseguinte, com a sensação obtida pelo motorista deste veículo.

Consoante sob Gillespie (1992), o espectro de vibrações pode ser dividido em duas faixas de frequências e categorizado como *ride* (0-25 Hz) e ruído (25-20.000 Hz). O limite de 25 Hz corresponde, aproximadamente, ao limiar absoluto da audibilidade humana, bem como à faixa superior das frequências de vibrações usualmente detectadas em veículos automotores em condições de baixas e médias rotações e, por este motivo, tem a sua adoção justificada. Os diferentes tipos de vibrações estão fortemente correlacionados, dificultando o processo de classificação e separação, logo, o fenômeno de ruído está normalmente presente em excitações em faixas de frequências baixas, por exemplo.

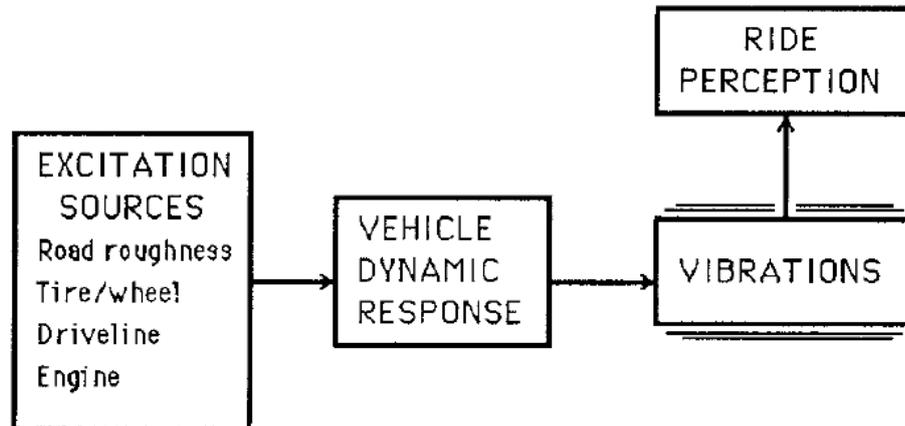
O ambiente de vibrações e, por conseguinte, o conforto vibro acústico faz-se dos mais importantes critérios pelos quais os usuários julgam um veículo automotor no processo de aquisição. Logo, denota-se a relevância do escopo deste estudo.

O veículo é uma estrutura complexa e dinâmica, mas este somente externa vibrações em resposta as excitações de entrada do sistema. As propriedades de resposta determinam a magnitude, direção e orientação, respectivamente, das vibrações impostas ao interior da carroceria e, em último nível, estas propriedades de resposta definem a percepção dos passageiros a estas vibrações, vide Figura 4. Então, o entendimento do fenômeno de *ride* envolve o estudo de três tópicos principais:

- Fontes excitadoras de *ride*;
- Mecânica básica de resposta da vibração veicular;

- Percepção humana e tolerância a vibrações.

Figura 4 - O fenômeno do ride.



Fonte: Gillespie, T. D., 1992. Fundamentals of Vehicle Dynamics. SAE.

2.3.1 Fontes Excitadoras de *Ride*

Há múltiplas fontes de excitação pelas quais um veículo automotor pode ser estimulado em resposta as vibrações de *ride*. Estas fontes podem, usualmente, ser agrupadas em duas classes principais: relativas às irregularidades do perfil do pavimento de rolagem e relativas às fontes embarcadas do próprio veículo.

2.3.1.1 Irregularidades do perfil do pavimento de rolagem

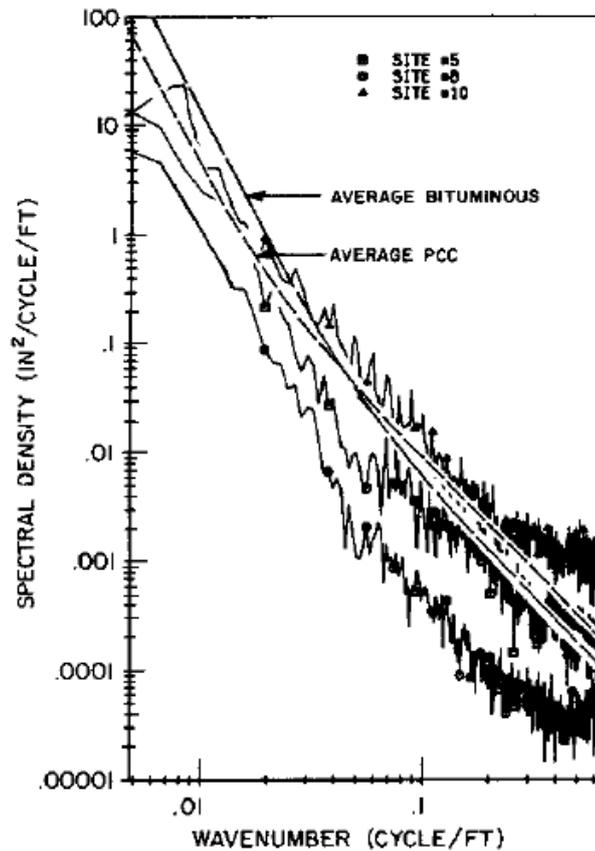
De acordo com Gillespie (1992), entende-se por irregularidades do perfil da via toda e qualquer alteração característica da superfície desta, que englobam desde falhas provenientes do desgaste pelo uso contínuo até as imperfeições aleatórias naturais da mesma. As imperfeições são descritas pelo perfil de elevação ao longo do pavimento de rolagem e trilha do pneu no trânsito do veículo. É de comum acordo que este perfil apresenta componentes em um amplo espectro de frequências e, portanto, é descrito pelo próprio perfil, bem como por uma distribuição estatística. A função *Power Spectral Density* (PSD) é uma das mais representativas para a aplicação deste conceito.

Consoante sob a óptica de qualquer outro sinal aleatório, o perfil de elevação ou irregularidade sobre um comprimento característico do pavimento de rolagem pode ser

decomposto pela Transformada de Fourier em um somatório de senóides, variando com as respectivas amplitudes e fases. A plotagem destas amplitudes em função das frequências espaciais caracteriza a função *Power Spectral Density* (PSD). As frequências espaciais são expressas como número de onda em unidades de ciclos por pé (ou ciclos por metro), e esta é o inverso do comprimento de onda da senóide que excita a frequência.

O perfil de elevação do pavimento de rolagem pode ser mensurado através de um estudo de amplitude e extensão obtido via testes ou através de perfilômetros de alta velocidade. Uma vez que a função *Power Spectral Density* (PSD) é determinada, plotagens semelhantes à Figura 5 podem ser construídas.

Figura 5 - Espectro de densidades típico de perfis de elevação de uma via.



Fonte: Gillespie, T. D., 1992. Fundamentals of Vehicle Dynamics. SAE.

Gillespie (1992) conclui que, embora a função *Power Spectral Density* (PSD) seja única para cada seção do pavimento de rolagem analisado, todas as vias mostram uma homogeneidade característica de comportamento, haja vista a queda na amplitude da função com o posterior aumento da frequência espacial e, portanto, com a diminuição do comprimento de onda. Logo, a função supracitada revela traços da qualidade da pista em estudo, uma vez que

quão maior a amplitude e o comprimento de onda, pior serão as propriedades referentes à qualidade desta.

2.3.1.2 Fontes embarcadas

De acordo com Gillespie (1992), as vibrações derivadas destas fontes são originadas pelo movimento de corpos rotativos, majoritariamente. São estes: sistema pneu-roda, sistema de direção e motor.

2.3.1.3 Sistema pneu-roda

Segundo Patricio (2005), o sistema pneu-roda, sob a luz de um modelo ideal e teórico, é hábil o bastante para absorver as vibrações derivadas do *ride*, evitando que o veículo automotor seja excitado nestas frequências. Todavia, um número finito de fatores relacionados as imperfeições nos processos de fabricação de pneus, rodas, cubos de roda, freios e demais componentes mecânicos, por conseguinte, caracterizam não uniformidades do sistema, destoando do modelo ideal e teórico supracitado. Estas não uniformidades são, em sua maioria, do tipo:

- Massa desbalanceada;
- Variação de precisão dimensional;
- Variação de rigidez.

Estas não uniformidades, ao passo que originam carregamentos de forças e momentos nas direções vertical (radial), longitudinal (trativa) e/ou lateral e são transmitidas para os eixos do veículo, constituem fontes excitadoras de *ride*.

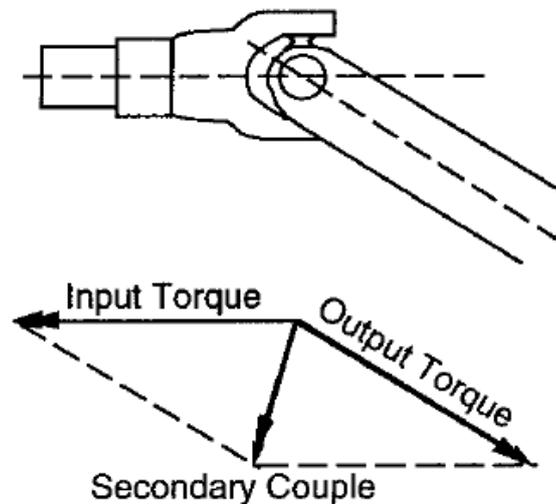
2.3.1.4 Sistema de direção

Consoante com Patricio (2005), o conjunto de direção é a união do eixo de transmissão - responsável por transferir torque motriz para o conjunto pneu-roda - e a caixa de marchas - responsável por transferir o respectivo torque motriz de acordo com a solicitação da caixa diferencial.

Haja vista o espectro das frequências de vibração consideradas no escopo do fenômeno de *ride*, o eixo de transmissão, dentre uma série de outros componentes, é o que apresenta maior influência no *ride*, vide Figura 6 Esta influência está ligada a aspectos de:

- Massas desbalanceadas estática e dinamicamente;
- Momentos torcionais aplicados sobre o eixo de transmissão em virtude da angulação presente nas juntas universais das extremidades deste.

Figura 6 - Reações de torque por momentos secundários.

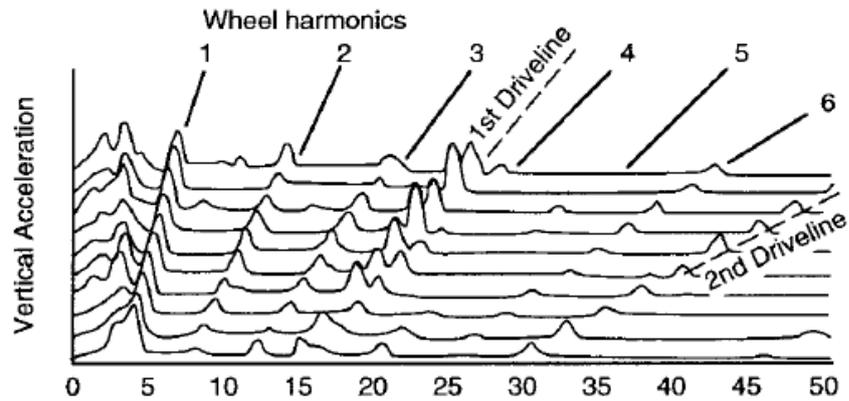


Fonte: Gillespie, T. D., 1992. Fundamentals of Vehicle Dynamics. SAE.

As Figuras 7 e 8 seguintes contextualizam um espectro da natureza das vibrações nativas das fontes embarcadas discutidas acima: sistema pneu-roda e conjunto de direção, respectivamente.

Segundo Gillespie (1992), neste caso específico, o parâmetro de aceleração foi mensurado em um veículo fora de estrada (*truck cab*) sob condições cuidadosamente controladas da rugosidade da superfície do pavimento de rolagem, a fim de suprimir os efeitos da pista sem mascarar o efeito do conjunto pneu-roda em foco.

Figura 7 - Mapa espectral das vibrações embarcadas em um veículo.

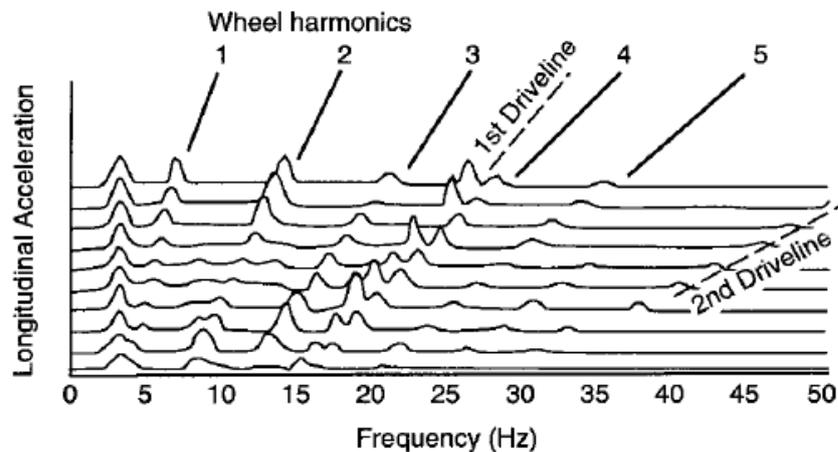


Fonte: Gillespie, T. D., 1992. Fundamentals of Vehicle Dynamics. SAE.

Seis harmônicos análogos ao conjunto pneu-roda podem ser observados nestes mapas espectrais. As excitações de entrada do conjunto pneu-roda aparecem nos picos ou cristas do mapa espectral, movendo-se em direção as frequências de maior intensidade conforme a velocidade é aumentada. O primeiro, o segundo e os maiores harmônicos são explícitos no mapa espectral.

A aproximadamente 3,7 vezes do primeiro harmônico do conjunto pneu/roda percebe-se o primeiro harmônico do sistema de direção, proveniente do efeito das massas desbalanceadas do eixo de transmissão e outros componentes rotativos. Este comportamento repete-se a duas vezes o primeiro valor, ou seja, a 7,4 vezes o primeiro harmônico do conjunto pneu/roda. Este segundo harmônico é reflexo do torque surgido no eixo de transmissão em virtude dos ângulos das juntas universais. (PATRICIO, L. F. S., 2005).

Figura 8 - Mapa espectral das vibrações embarcadas em um veículo.



Fonte: Gillespie, T. D., 1992. Fundamentals of Vehicle Dynamics. SAE.

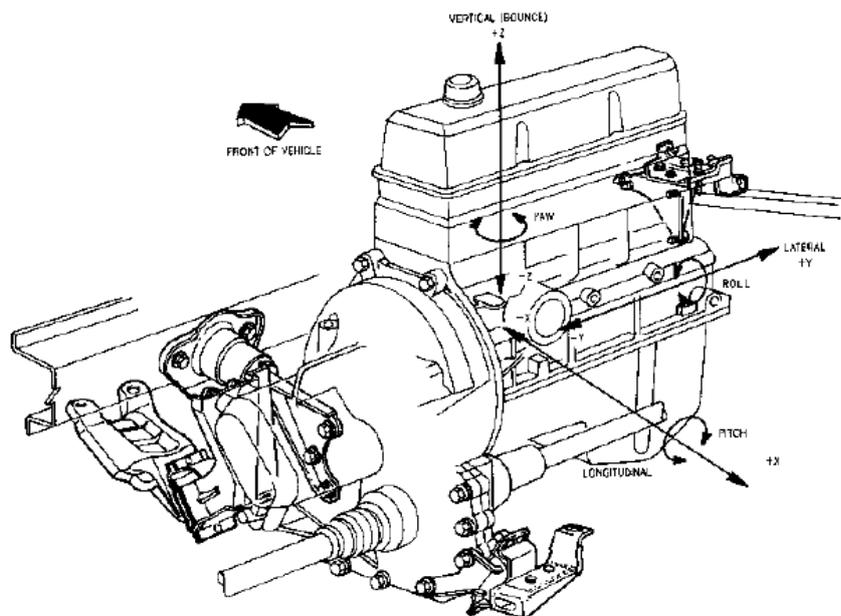
2.3.1.5 Motor

De acordo com Patricio (2005), em virtude de sua forma e componentes construtivos, a unidade geradora de força motriz - o motor - atua em duas frentes distintas no escopo do estudo do fenômeno de *ride*. Logo, por ter seu funcionamento ligado a elementos rotativos, este é facilmente associado a uma fonte de excitação de *ride*. Em contrapartida, em razão de sua massa, este é um absorvedor de vibrações, principalmente das verticais (ou *bounce*) nativas do conjunto pneu-roda, por conseguinte.

Como o motor fornece potência em um processo cíclico, o eixo virabrequim sofre esforços pulsantes ao longo de um ciclo de explosão, ou seja, o torque fornecido não é puramente constante. A existência do volante do motor, que age como uma inércia a fim de “acumular” energia mecânica, faz com que a forma de onda do torque seja composta por uma componente constante, somada com outra pulsante, que é a correspondente às explosões que o volante não conseguiu uniformizar. (PATRICIO, L. F. S., 2005).

Consoante sob a abordagem, estas variações de torque, atuando ao longo do sistema de transmissão, resultam em fontes de excitação vibracional de *ride*. A Figura 9 ilustra que o motor vibra com seis graus de liberdade, três translacionais e três rotacionais, em torno dos eixos do sistema coordenado.

Figura 9 - Motor transversal típico.



Fonte: Gillespie, T. D., 1992. Fundamentals of Vehicle Dynamics. SAE.

2.4 HANDLING

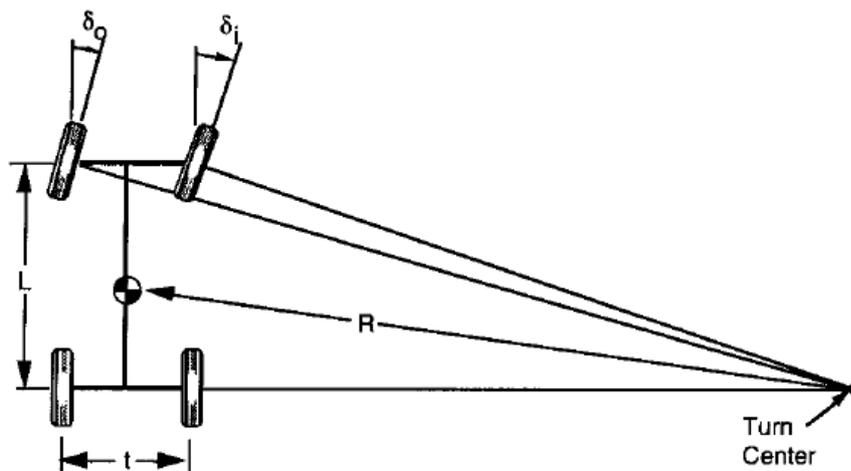
Consoante sob Gillespie (1992), o comportamento de *cornering* de um veículo automotor é um importante modo de performance e geralmente equacionado com o *handling*.

De acordo com Patricio (2005), *handling* é um termo empregado para explicar acerca da habilidade de um veículo automotor em realizar manobras, o estudo de como este o faz e a percepção do condutor versus o comportamento do veículo. Por conseguinte, *handling* é a interação do veículo com o condutor, sob o contexto de uma maior ou menor dificuldade desta manobra ser realizada por um motorista real, logo, o comportamento do motorista tem influência e reflete nos resultados futuros. Em contrapartida, o significado de *cornering* concerne à capacidade e habilidade de um veículo automotor em realizar manobras sob a ótica de um motorista perfeito, isto é, a sua influência sobre os resultados futuros é desprezada.

É visto que, em um escopo mais amplo, ambos os termos *cornering* e *handling* se confundem como o comportamento de um veículo em realizar manobras.

O objetivo inicial do estudo da teoria de *handling* é a melhoria do projeto do veículo a partir da detecção da existência e posterior otimização de parâmetros de performance. O limite último deste estudo visa a predição do comportamento dinâmico do veículo em resposta a manobras do motorista ou a distúrbios do ambiente. (DIXON, J. C., 1996).

Figura 10 - Geometria de um veículo quando em manobra.



Fonte: Gillespie, T. D., 1992. Fundamentals of Vehicle Dynamics. SAE.

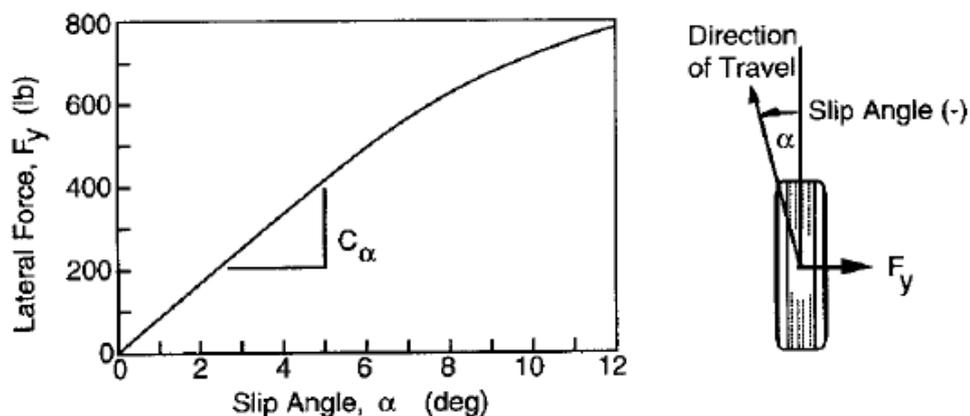
Conforme Patricio (2005), as propriedades relativas ao *handling* são funções de uma série de propriedades do chassi, do sistema de suspensão, do conjunto pneu-roda, da

geometria característica do veículo e do ambiente, por exemplo. Os elementos representativos para o respectivo estudo do fenômeno de *handling* são a velocidade e o raio de curvatura descrito pelo centro de massa do sistema, ao passo que estes parâmetros variam, principalmente, com o nível de aceleração - longitudinal e, portanto, lateral - e com a posição da roda no movimento de mudança de direção ou esterçamento, consulte a Figura 10.

2.4.1 Forças de *Handling* nos Pneus

Segundo Gillespie (1992), sob condições de *handling* - ou *cornering* - em que os pneus devem desenvolver forças laterais, estes também experimentarão, por sua vez, um deslizamento lateral ao longo da linha de rolagem. O ângulo entre a direção de *heading* e a direção de *travel* é denominado ângulo de escorregamento e representado pela letra grega α . Estes são ilustrados na Figura 11.

Figura 11 - Propriedades das componentes de força nos pneus.



Fonte: Gillespie, T. D., 1992. Fundamentals of Vehicle Dynamics. SAE.

A força lateral, denotada por F_y , é chamada de força de *cornering* quando o ângulo de curvatura é nulo. Dado um determinado carregamento no pneu, a força de *cornering* aumenta com o ângulo de escorregamento. Para ângulos de escorregamento consideravelmente pequenos (menores ou iguais a 5 graus) o comportamento é linear e pode ser descrito por:

$$F_y = C_\alpha \times \alpha$$

A constante de proporcionalidade, $C\alpha$, é conhecida como rigidez de *cornering* e pode ser facilmente determinada por meio da inclinação da curva para F_y versus α quando α é nulo.

O parâmetro rigidez de *cornering* é dependente de inúmeras variáveis. Tamanho do pneu e características construtivas, número de lonas, ângulos de cordão, largura de roda e trilho, por exemplo, representam algumas destas variáveis. Para um dado pneu, o carregamento e a pressão de inflação são as variáveis principais, a velocidade, no que lhe diz respeito, não influencia fortemente as forças de *cornering* produzidas por um pneu.

2.5 SUSPENSÃO

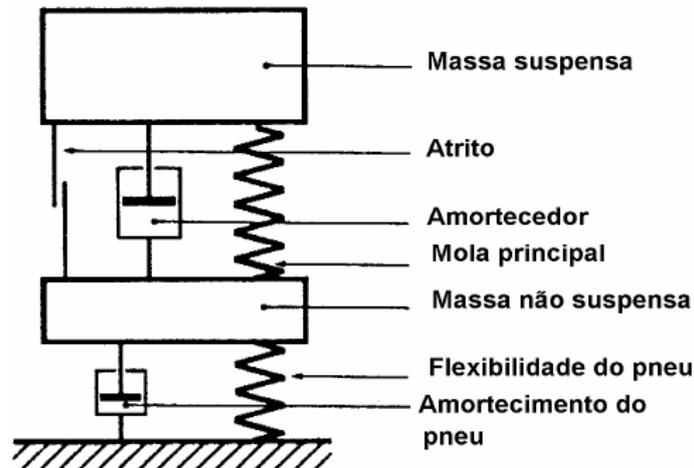
Consoante sob Gillespie (1992) e Milliken (1995), as funções primárias de um sistema de suspensão automotiva são:

- Prover conformidade vertical, de modo que as rodas possam seguir as desigualdades da pista, isolando o chassi das vibrações e rugosidades do pavimento de rolagem;
- Manter as rodas e seus ângulos de manobra fieis ao movimento original;
- Reagir as forças de controle impostas pelos pneus e suportá-las - forças longitudinais (aceleração e frenagem) e forças laterais (*cornering*), além de torques e momentos derivados dos movimentos de direção;
- Resistir ao movimento de *roll* do chassi;
- Manter os pneus em contato com o pavimento de rolagem com a mínima variação de carregamentos.

Segundo Patricio (2005), a mola e o amortecedor principais agem como elementos de sustentação da massa suspensa e, por sua vez, têm a função de dissipar esta energia. O conjunto de suspensão principal também atua na redução do movimento da roda que tende a se propagar para a carroceria. Estes são ilustrados na Figura 12.

Logo, a suspensão filtra a vibração, captando e assimilando parte da energia elástica, cinética e térmica da massa não suspensa do sistema em estudo.

Figura 12 - Sistema de suspensão esquemático.



Fonte: Máximo, Luiz F. B., 2002, Estudo do comportamento dinâmico de um veículo de passageiros em manobras de handling, pág. 07.

Os sistemas de suspensão são, comumente, agrupados em duas categorias distintas, obedecendo ao grau de interdependência entre o movimento das rodas em seus respectivos eixos de transmissão. São estas: suspensões de eixo rígido ou suspensões independentes.

De acordo com Patricio (2005), possuem características diferentes entre a parte anterior e posterior, sendo responsável direta pelo *cornering* do veículo. Algumas destas são: rigidez das molas, coeficiente de amortecimento dos amortecedores, câmbor em linha reta, alterações do câmbor na mudança de direção das rodas, posição do centro de rolagem da suspensão, frequência e modos vibracionais dos seus elementos, por exemplo.

2.5.1 Suspensão de Eixo Rígido

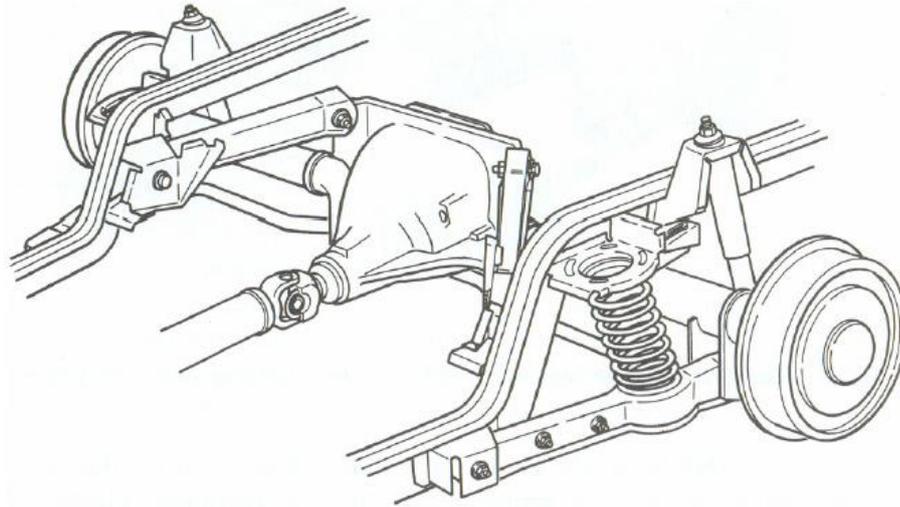
Consoante sob Gillespie (1992), o modelo de suspensão de eixo rígido tem como característica principal algum nível de interdependência entre uma roda e sua correspondente ao longo da linha de ação do eixo sobre o qual ambas estão dispostas, de modo que há uma transmissão de movimento de uma roda à outra. A relação de interdependência é necessariamente concebida através de um elemento geométrico rígido, isto é, uma barra estabilizadora.

O sistema de suspensão de eixo rígido apresenta como vantagem a não influência do movimento de *roll* da carroceria no ângulo de câmbor do sistema pneu-roda. Assim, há pequenas variações em situações de *cornering*.

Segundo Patricio (2005), a grande desvantagem deste modelo de suspensão encontra-se, justamente, no elemento de ligação entre as rodas. Haja vista que em manobras de esterçamento, por exemplo, a barra estabilizadora gera certo grau de desconforto vibracional para o motorista, baixando, por conseguinte, a qualidade de ride do veículo.

As configurações de suspensões de eixo rígido mais usuais são: Quatro Links (*Four Link*), *Hotchkiss* e *De Dion*.

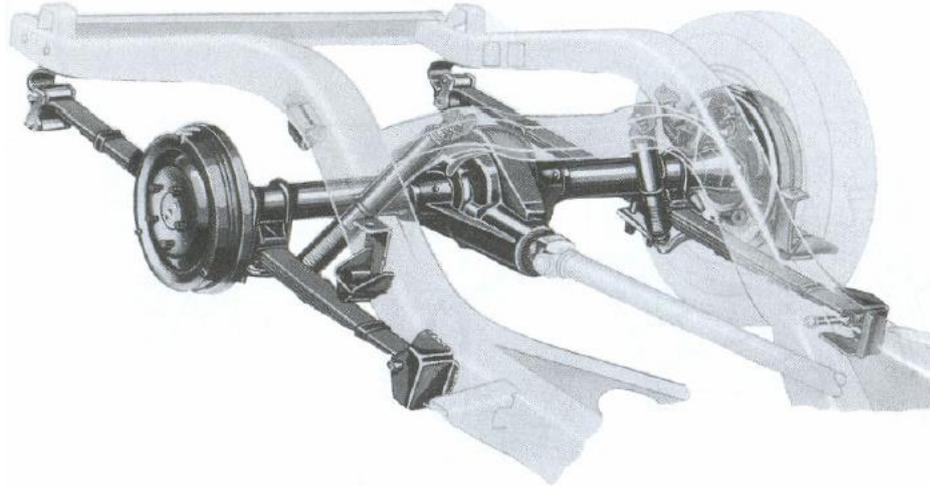
Figura 13 - Sistema de suspensão traseira Four Link.



Fonte: Gillespie, T. D., 1992. Fundamentals of Vehicle Dynamics. SAE.

A configuração de suspensão Quatro Links (*Four Link*), vide Figura 13, dispõe de uma estrutura com molas helicoidais e amortecedores configurados separadamente. Este arranjo experimentou a sua utilização nas décadas recentes em carros de passageiros de grande porte, com eixos traseiros rígidos, em especial.

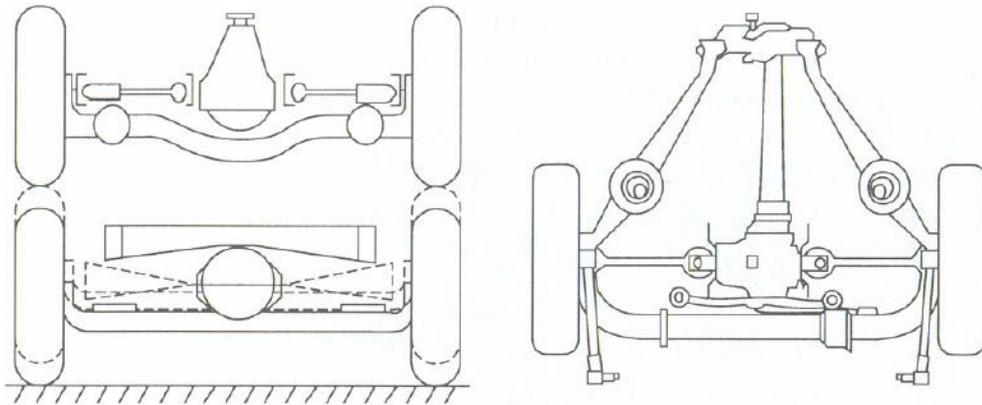
Figura 14 - Sistema de suspensão traseira Hotchkiss.



Fonte: Gillespie, T. D., 1992. Fundamentals of Vehicle Dynamics. SAE.

A configuração de suspensão *Hotchkiss*, vide Figura 14 dispõe de uma estrutura com um par de molas semielípticas montadas longitudinalmente em um eixo rígido. As principais desvantagens deste modelo de conjunto torsor incidem sobre o conforto vibro acústico, em razão do ruído e vibração gerados por suas características construtivas.

Figura 15 - Sistema de suspensão traseira De Dion.



Fonte: Gillespie, T. D., 1992. Fundamentals of Vehicle Dynamics. SAE.

A configuração de suspensão *De Dion*, vide Figura 15, dispõe de uma estrutura com semieixos estriados deslizantes ou com tubo deslizante. Encerra a vantagem de diminuir a massa não suspensa e a principal desvantagem consiste na adição de atrito ao sistema em função de suas características construtivas.

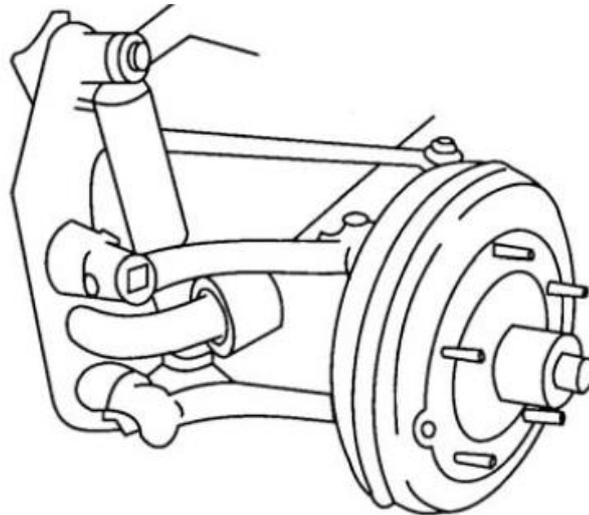
2.5.2 Suspensão Independente

Segundo Gillespie (1992) e Milliken (1995), o modelo de suspensão independente permite que cada uma das rodas se desloque verticalmente sem nenhum nível de interdependência entre uma roda e sua correspondente ao longo da linha de ação do eixo sobre o qual ambas estão dispostas, de modo que não há transmissão de movimento.

São utilizadas, principalmente, nas suspensões dianteiras por necessitarem de um espaço menor para a montagem e por não apresentarem o elemento de ligação entre as rodas - barra estabilizadora - o que aumenta o vão para a alocação do conjunto motopropulsor, sobretudo.

As configurações de suspensões independentes mais usuais são: braços oscilantes (*Trailing-Arm*), SLA (*Short-Long Arm* ou *Double Wishbone*), *MacPherson* (ou *McPherson*) e *Multi-Link*.

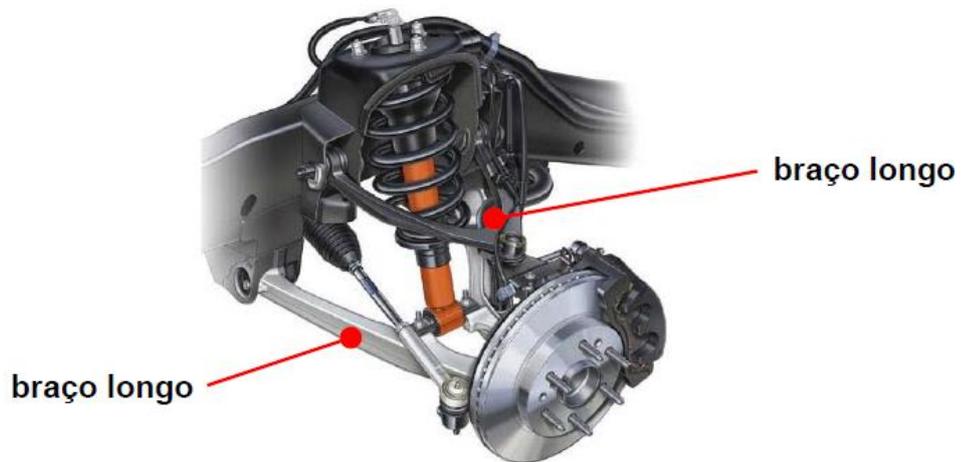
Figura 16 - Sistema de suspensão tipo braços oscilantes (*Trailing-Arm*).



Fonte: Gillespie, T. D., 1992. Fundamentals of Vehicle Dynamics. SAE.

A configuração de suspensão tipo braços oscilantes (*Trailing-Arm*), vide Figura 16, apresenta um esqueleto com dois feixes de molas submetidos à torção e montados transversalmente. Este arranjo torsor experimentou a sua utilização no período da II Guerra Mundial pela Volkswagen e Porsche, principalmente.

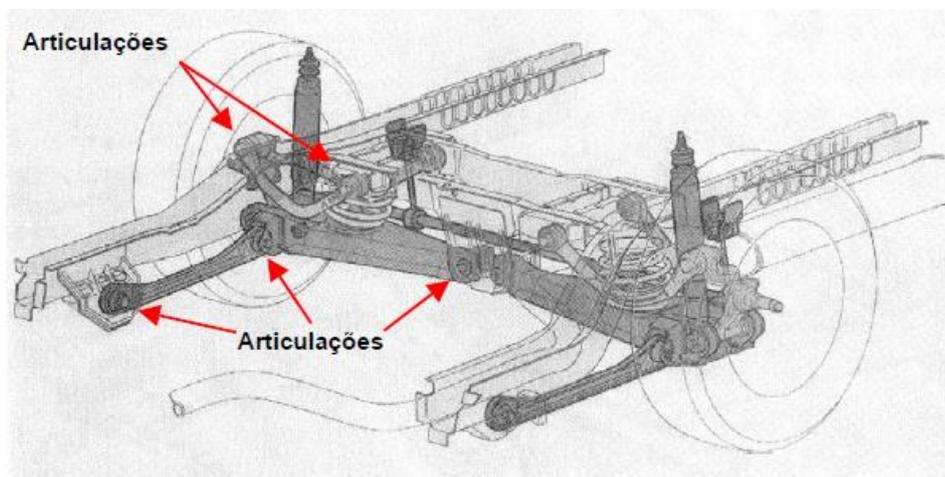
Figura 17 - Sistema de suspensão tipo SLA (Short-Long Arm ou Double Wishbone).



Fonte: JR., L. M. P. F. 2006. Estudo da dinâmica vertical de uma suspensão veicular do tipo MacPherson.

A configuração de suspensão tipo SLA (*Short-Long Arm* ou *Double Wishbone*), vide Figura 17, foi largamente utilizada no conjunto tórso anterior dos veículos norte-americanos após a II Guerra Mundial.

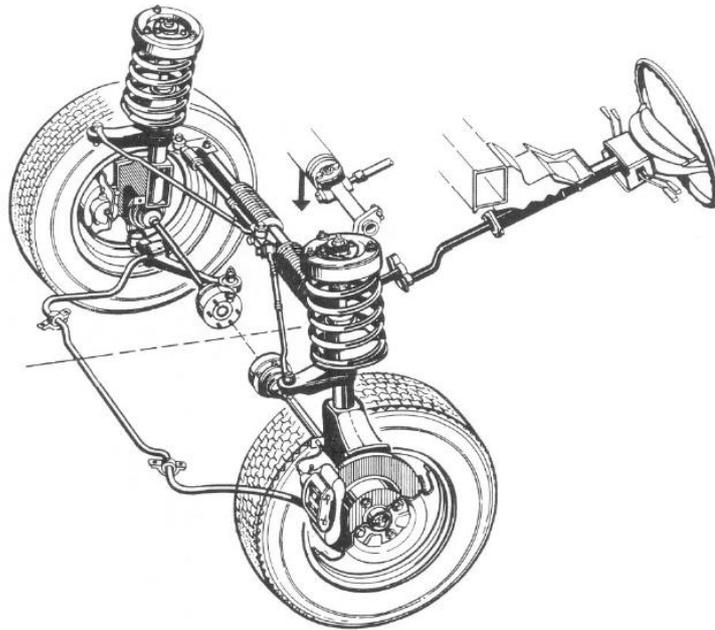
Figura 18 - Sistema de suspensão tipo Multi-Link.



Fonte: JR., L. M. P. F. 2006. Estudo da dinâmica vertical de uma suspensão veicular do tipo MacPherson.

A configuração de suspensão tipo *Multi-Link*, vide Figura 18, dispõe de um esqueleto com articulações nas conexões presentes nas pontas das barras.

Figura 19 - Sistema de suspensão tipo MacPherson.



Fonte: JR., L. M. P. F. 2006. Estudo da dinâmica vertical de uma suspensão veicular do tipo MacPherson.

A configuração de suspensão tipo *MacPherson*, vide Figura 19, é uma variação da suspensão de bandeja dupla em “A”. A fixação do amortecedor, tipo hidráulico telescópico, é feita diretamente no chassi ou manga de eixo. Este, por sua vez, gera carga axial no sentido contrário ao da velocidade de oscilação da roda e passa a suportar carregamentos laterais e longitudinais.

3 METODOLOGIA

3.1 MODELO TRIDIMENSIONAL DE ANÁLISE DINÂMICA

O modelo veicular tridimensional abordado no respectivo trabalho foi amplamente influenciado pelos trabalhos desenvolvidos por Bouazara et al (2001), Saturnino (2004) e Patricio (2005).

A resposta dinâmica do modelo à excitação foi engendrada no plano bidimensional, em um primeiro momento, para, posteriormente, ser estruturada em três dimensões, visando explicitar o comportamento dinâmico deste sob condições predeterminadas.

Consoante sob a ótica de que o modelo veicular tridimensional será contemplado no fenômeno de *ride*, faz-se necessário o perfeito entendimento de que as excitações serão

impostas, necessariamente, pela interação do veículo com o pavimento de rolagem e com as diversas fontes de excitação geradas pelas irregularidades do perfil da pista.

As excitações aplicadas ao modelo serão os deslocamentos verticais impostos pelo pavimento y_{pd} e y_{pt} . Haja vista que o veículo trafega em linha reta obedecendo as premissas do *ride*, é possível confrontar estes deslocamentos, uma vez que o conjunto pneu-roda traseiro percorre o mesmo trajeto que o conjunto pneu-roda dianteiro, porém com certo atraso temporal.

3.1.1 Graus de Liberdade

Sob a premissa de implementar um modelo veicular tridimensional de análise dinâmica que, por conseguinte, contemplaria uma ferramenta de pré-projeto para estudos no escopo deste trabalho, foram definidos os graus de liberdade fundamentais para descrever as principais características dinâmicas do modelo.

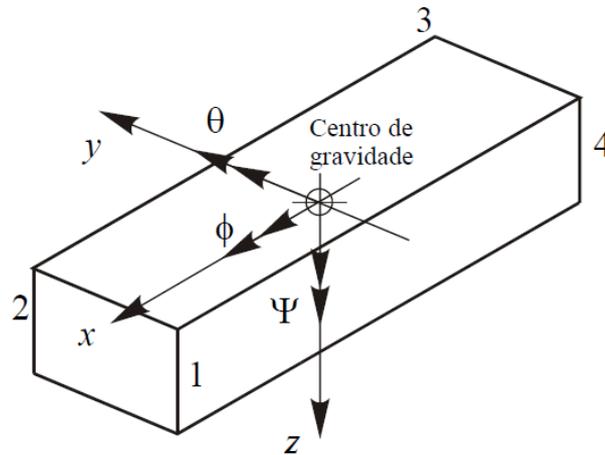
Os 6 (seis) graus de liberdade governantes assumidos foram:

- Z_{CG} : deslocamento vertical do CG (*bounce*);
- Θ_{cg} : ângulo de *pitch* do CG (guinada);
- Z_{RDE} : deslocamento vertical da roda dianteira esquerda;
- Z_{RDD} : deslocamento vertical da roda dianteira direita;
- Z_{RTE} : deslocamento vertical da roda traseira esquerda;
- Z_{RTD} : deslocamento vertical da roda traseira direita.

Além destes, foram adotados graus de liberdade secundários a fim de estabelecer correlações entre as variáveis geométricas características do modelo. São estes:

- Z_{SDE} : deslocamento vertical da suspensão dianteira esquerda;
- Z_{SDD} : deslocamento vertical da suspensão dianteira direita;
- Z_{STE} : deslocamento vertical da suspensão traseira esquerda;
- Z_{STD} : deslocamento vertical da suspensão traseira direita.

Figura 20 - Sistema de coordenadas e principais graus de liberdade da carroceria.



Fonte: ROCHA, F. K. 2004. Desenvolvimento de uma metodologia para análise de estrutura veicular.

Conforme Rocha (2004), a direção de deslocamento do veículo é no sentido positivo do eixo das abscissas e os pontos 1, 2, 3 e 4 definem a posição das massas não suspensas do veículo. Estes são ilustrados na Figura 20.

3.1.2 Massa Suspensa e Massa Não Suspensa

A massa total do veículo é dividida em duas parcelas, massa suspensa e massa não suspensa. A massa suspensa engloba as massas dos componentes que estão posicionados sobre o conjunto da suspensão principal. Em contrapartida, a massa não suspensa concerne as massas das rodas e acessórios da suspensão, em geral.

No presente trabalho, a massa suspensa coincide com a massa global da carroceria do modelo automotor e a massa não suspensa com a massa de cada uma das rodas e parcelas de elementos sobrepostos, respectivamente.

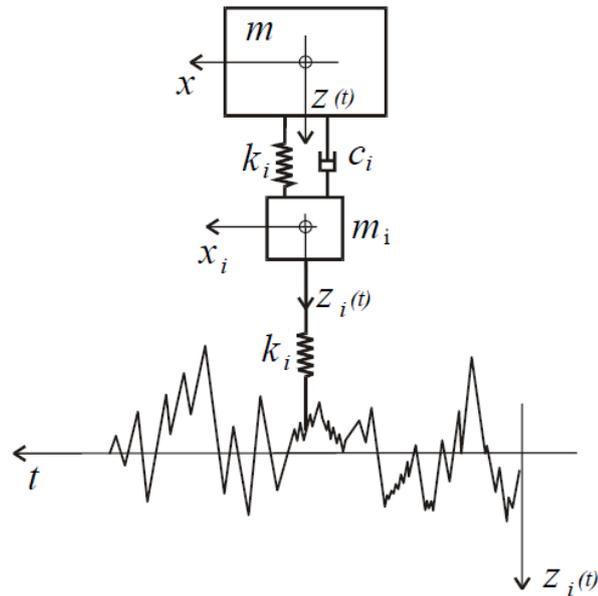
3.1.3 Pneus

Conforme Pereira (2011), o modelo de pneu ponto de contato é representado pela combinação em paralelo de um sistema massa-mola-amortecedor.

O modelo de pneu ponto de contato não amortecido corresponde a uma simplificação deste e é caracterizado por um sistema massa-mola, por sua vez.

Estes são ilustrados na Figura 21.

Figura 21 - Modelo esquemático de 1/4 de veículo com dois graus de liberdade.



Fonte: ROCHA, F. K. 2004. Desenvolvimento de uma metodologia para análise de estrutura veicular.

3.1.4 Pista

Segundo Patricio (2005), a pista é caracterizada por uma frequência de excitação descrita através da expressão:

$$f = \text{Velocidade de marcha} \times N^\circ \text{ de onda}$$

Logo, a frequência de excitação do pavimento de rolagem para uma velocidade de marcha de 60 [km/h] corresponde à 0,6 [Hz].

3.2 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO DINÂMICO

O presente trabalho lança mão da abordagem matemática de equilíbrio dinâmico ou de d'Alembert para a obtenção das equações diferenciais do movimento.

O modelo analítico matemático do veículo pode ser expresso como:

$$[M]\{\ddot{Z}\} + [C]\{\dot{Z}\} + [K]\{Z\} = \{f\}$$

Onde:

- $[M]$ = matriz massa;
- $\{\ddot{Z}\}$ = vetor aceleração;
- $[C]$ = matriz amortecimento;
- $\{\dot{Z}\}$ = vetor velocidade;
- $[K]$ = matriz rigidez;
- $\{Z\}$ = vetor posição;
- $\{f\}$ = vetor excitação.

No estudo analítico do modelo, o vetor excitação fica discriminado como:

$$\{f\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_{pde} Z_{pde} \\ K_{pdd} Z_{pdd} \\ K_{pte} Z_{pte} \\ K_{ptd} Z_{ptd} \end{bmatrix}$$

O perfil de pista empregado é caracterizado por um formato senoidal, podendo ou não apresentar uma defasagem entre eixos definida por um atraso de transporte.

Logo, a excitação dos pneus pode ser expressa como:

$$Z_{pde} = A \text{sen}(wt)$$

$$Z_{pdd} = A \text{sen}(wt)$$

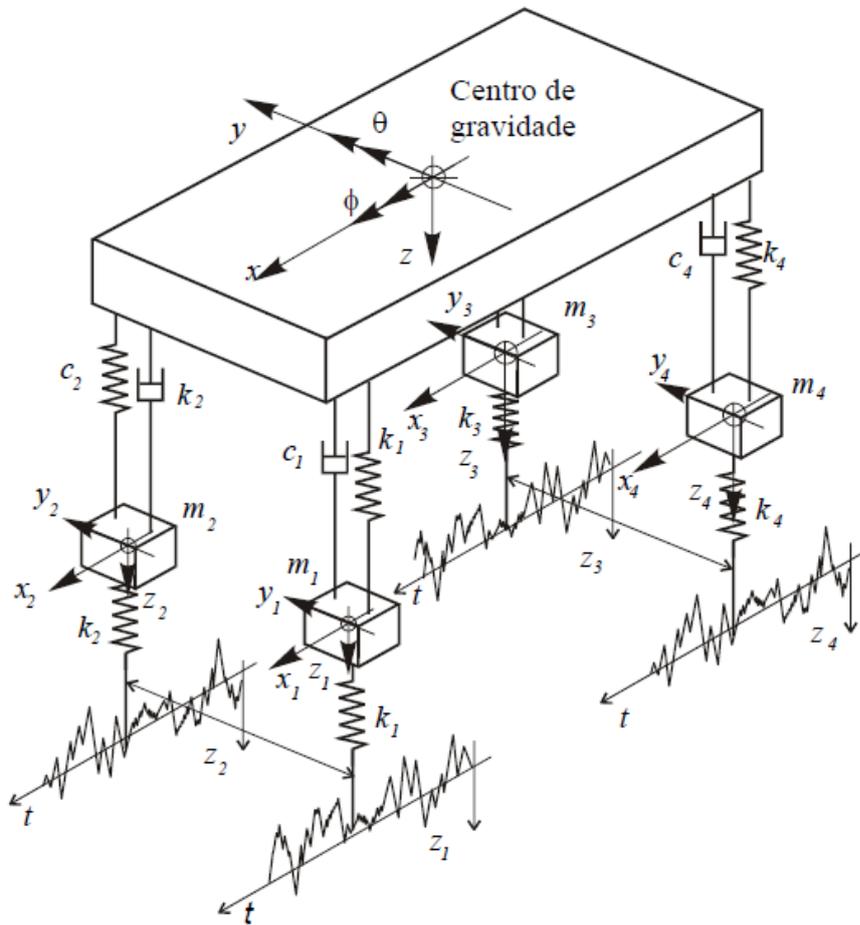
$$Z_{pte} = A \text{sen}(wt + \alpha)$$

$$Z_{ptd} = A \text{sen}(wt + \alpha)$$

Onde:

- A = amplitude de excitação da pista;
- ω = frequência de excitação da pista;
- α = ângulo de fase que evidencia o tempo de defasagem.

Figura 22 - Representação esquemática do modelo tridimensional em estrutura de arames.



Fonte: ROCHA, F. K. 2004. Desenvolvimento de uma metodologia para análise de estrutura veicular.

Hipóteses adotadas para facilitar o desenvolvimento matemático do modelo ilustrado na Figura 22:

- A carroceria é modelada como uma estrutura perfeitamente rígida, externando somente movimento de corpo rígido;
- O modelo tridimensional retratado tem suspensão independente dianteira e traseira, logo, qualquer razão de interdependência entre uma roda e sua correspondente ao longo da linha de ação do eixo é negligenciada;
- A massa suspensa é acrescida da massa pertencente ao elemento motopropulsor;
- A massa de cada roda tem um acréscimo de uma parcela equivalente à massa da bandeja de suspensão e do elemento mola;
- Os eixos de *roll* e *pitch* são pensados como perpendiculares em todas as abordagens ao longo deste equacionamento;

- É considerada a aproximação para pequenos deslocamentos na cinemática deste equacionamento;
- Este trabalho lança mão da abordagem matemática de equilíbrio dinâmico ou de d'Alembert para a obtenção das equações diferenciais do movimento.

São dados de entrada do modelo:

- Rigidez de mola dos pneus [K_{pde} , K_{pdd} , K_{pte} , K_{ptd}];
- Rigidez e coeficiente de amortecimento da suspensão [K_{sde} , K_{sdd} , K_{ste} , K_{std} , C_{sde} , C_{sdd} , C_{ste} , C_{std}];
- Massa das rodas [m_{rde} , m_{rdd} , m_{rte} , m_{rtd}];
- Traços geométricos;
- Perfil de pista;
- Velocidade de marcha.

- **Roda dianteira esquerda**

$$\sum F_z = m_{rde} \ddot{Z}_{rde}$$

$$m_{rde} \ddot{Z}_{rde} = -K_{pde}(Z_{rde} - Z_{pde}) + K_{sde}(Z_{sde} - Z_{rde}) + C_{sde}(\dot{Z}_{sde} - \dot{Z}_{rde})$$

$$m_{rde} \ddot{Z}_{rde} + K_{pde}(Z_{rde} - Z_{pde}) - K_{sde}(Z_{sde} - Z_{rde}) - C_{sde}(\dot{Z}_{sde} - \dot{Z}_{rde}) = 0$$

- **Roda dianteira direita**

$$\sum F_z = m_{rdd} \ddot{Z}_{rdd}$$

$$m_{rdd} \ddot{Z}_{rdd} = -K_{pdd}(Z_{rdd} - Z_{pdd}) + K_{sdd}(Z_{sdd} - Z_{rdd}) + C_{sdd}(\dot{Z}_{sdd} - \dot{Z}_{rdd})$$

$$m_{rdd} \ddot{Z}_{rdd} + K_{pdd}(Z_{rdd} - Z_{pdd}) - K_{sdd}(Z_{sdd} - Z_{rdd}) - C_{sdd}(\dot{Z}_{sdd} - \dot{Z}_{rdd}) = 0$$

- **Roda traseira esquerda**

$$\sum F_z = m_{rte} \ddot{Z}_{rte}$$

$$m_{rte} \ddot{Z}_{rte} = -K_{pte}(Z_{rte} - Z_{pte}) + K_{ste}(Z_{ste} - Z_{rte}) + C_{ste}(\dot{Z}_{ste} - \dot{Z}_{rte})$$

$$m_{rte} \ddot{Z}_{rte} + K_{pte}(Z_{rte} - Z_{pte}) - K_{ste}(Z_{ste} - Z_{rte}) - C_{ste}(\dot{Z}_{ste} - \dot{Z}_{rte}) = 0$$

- **Roda traseira direita**

$$\sum \mathbb{F}_Z = m_{rtd} \ddot{Z}_{rtd}$$

$$m_{rtd} \ddot{Z}_{rtd} = -K_{ptd}(Z_{rtd} - Z_{ptd}) + K_{std}(Z_{std} - Z_{rtd}) + C_{std}(\dot{Z}_{std} - \dot{Z}_{rtd})$$

$$m_{rtd} \ddot{Z}_{rtd} + K_{ptd}(Z_{rtd} - Z_{ptd}) - K_{std}(Z_{std} - Z_{rtd}) - C_{std}(\dot{Z}_{std} - \dot{Z}_{rtd}) = 0$$

- **Equação de equilíbrio dinâmico da carroceria**

A equação de equilíbrio dinâmico para o grau de liberdade que abrange o deslocamento vertical da carroceria - movimento de *bounce* - segue:

$$\sum \mathbb{F}_Z = m_{CG} \ddot{Z}_{CG}$$

$$m_{CG} \ddot{Z}_{CG} = -K_{sde}(Z_{sde} - Z_{rde}) - C_{sde}(\dot{Z}_{sde} - \dot{Z}_{rde})$$

$$-K_{sdd}(Z_{sdd} - Z_{rdd}) - C_{sdd}(\dot{Z}_{sdd} - \dot{Z}_{rdd})$$

$$-K_{ste}(Z_{ste} - Z_{rte}) - C_{ste}(\dot{Z}_{ste} - \dot{Z}_{rte})$$

$$-K_{std}(Z_{std} - Z_{rtd}) - C_{std}(\dot{Z}_{std} - \dot{Z}_{rtd})$$

Reorganizando os termos, segue:

$$m_{CG} \ddot{Z}_{CG} + K_{sde}(Z_{sde} - Z_{rde}) + C_{sde}(\dot{Z}_{sde} - \dot{Z}_{rde})$$

$$+K_{sdd}(Z_{sdd} - Z_{rdd}) + C_{sdd}(\dot{Z}_{sdd} - \dot{Z}_{rdd})$$

$$+K_{ste}(Z_{ste} - Z_{rte}) + C_{ste}(\dot{Z}_{ste} - \dot{Z}_{rte})$$

$$+K_{std}(Z_{std} - Z_{rtd}) - C_{std}(\dot{Z}_{std} - \dot{Z}_{rtd}) = 0$$

A equação de equilíbrio dinâmico para o grau de liberdade que abrange o ângulo revolucionado em torno do eixo das ordenadas - ângulo de *pitch* ou guinada - da carroceria segue:

$$\sum \mathbb{M}y = J_{\theta CG} \ddot{\theta}_{CG}$$

$$\begin{aligned} J_{\theta CG} \ddot{\theta}_{CG} = & +Ia C_{sde}(\dot{Z}_{sde} - \dot{Z}_{rde}) + Ia C_{sdd}(\dot{Z}_{sdd} - \dot{Z}_{rdd}) \\ & -Ib C_{ste}(\dot{Z}_{ste} - \dot{Z}_{rte}) - Ib C_{std}(\dot{Z}_{std} - \dot{Z}_{rtd}) \\ & +Ia K_{sde}(Z_{sde} - Z_{rde}) + Ia K_{sdd}(Z_{sdd} - Z_{rdd}) \\ & -Ib K_{ste}(Z_{ste} - Z_{rte}) - Ib K_{std}(Z_{std} - Z_{rtd}) \end{aligned}$$

Reorganizando os termos, segue:

$$\begin{aligned} J_{\theta CG} \ddot{\theta}_{CG} - Ia C_{sde}(\dot{Z}_{sde} - \dot{Z}_{rde}) - Ia C_{sdd}(\dot{Z}_{sdd} - \dot{Z}_{rdd}) \\ + Ib C_{ste}(\dot{Z}_{ste} - \dot{Z}_{rte}) + Ib C_{std}(\dot{Z}_{std} - \dot{Z}_{rtd}) \\ - Ia K_{sde}(Z_{sde} - Z_{rde}) - Ia K_{sdd}(Z_{sdd} - Z_{rdd}) \\ + Ib K_{ste}(Z_{ste} - Z_{rte}) + Ib K_{std}(Z_{std} - Z_{rtd}) = 0 \end{aligned}$$

3.2.1 Translação dos Graus de Liberdade

A translação dos graus de liberdade locais para os graus de liberdade globais do modelo veicular tridimensional segue:

$$Z_{sde} = Z_{CG} - Ia \theta_{CG}$$

$$\dot{Z}_{sde} = \dot{Z}_{CG} - Ia \dot{\theta}_{CG}$$

$$Z_{sdd} = Z_{CG} - Ia \theta_{CG}$$

$$\dot{Z}_{sdd} = \dot{Z}_{CG} - Ia \dot{\theta}_{CG}$$

$$Z_{ste} = Z_{CG} + Ib \theta_{CG}$$

$$\dot{Z}_{ste} = \dot{Z}_{CG} + Ib \dot{\theta}_{CG}$$

$$Z_{std} = Z_{CG} + Ib \theta_{CG}$$

$$\dot{Z}_{std} = \dot{Z}_{CG} + Ib \dot{\theta}_{CG}$$

Logo, é plausível reescrever as equações de equilíbrio dinâmico transladando os graus de liberdade locais para os graus de liberdade globais do modelo veicular tridimensional.

A equação de equilíbrio dinâmico para o grau de liberdade que abrange o deslocamento vertical da carroceria - movimento de *bounce* - segue:

$$\sum Fz = m_{CG} \ddot{Z}_{CG}$$

$$\begin{aligned} m_{CG} \ddot{Z}_{CG} + (C_{sde} + C_{sdd} + C_{ste} + C_{std})\dot{Z}_{CG} + (-IaC_{sde} - IaC_{sdd} + IbC_{ste} + IbC_{std})\dot{\theta}_{CG} \\ + (-C_{sde})\dot{Z}_{rde} + (-C_{sdd})\dot{Z}_{rdd} + (-C_{ste})\dot{Z}_{rte} + (-C_{std})\dot{Z}_{rtd} \\ + (K_{sde} + K_{sdd} + K_{ste} + K_{std})Z_{CG} + (-IaK_{sde} - IaK_{sdd} + IbK_{ste} + IbK_{std})\theta_{CG} \\ + (-K_{sde})Z_{rde} + (-K_{sdd})Z_{rdd} + (-K_{ste})Z_{rte} + (-K_{std})Z_{rtd} = 0 \end{aligned}$$

A equação de equilíbrio dinâmico para o grau de liberdade que abrange o ângulo revolucionado em torno do eixo das ordenadas - ângulo de *pitch* ou guinada - da carroceria segue:

$$\sum My = J_{\theta CG} \ddot{\theta}_{CG}$$

$$\begin{aligned} J_{\theta CG} \ddot{\theta}_{CG} + (-IaC_{sde} - IaC_{sdd} + IbC_{ste} + IbC_{std})\dot{Z}_{CG} \\ + (Ia^2C_{sde} + Ia^2C_{sdd} + Ib^2C_{ste} + Ib^2C_{std})\dot{\theta}_{CG} \\ + (IaC_{sde})\dot{Z}_{rde} + (IaC_{sdd})\dot{Z}_{rdd} + (-IbC_{ste})\dot{Z}_{rte} + (-IbC_{std})\dot{Z}_{rtd} \\ + (-IaK_{sde} - IaK_{sdd} + IbK_{ste} + IbK_{std})Z_{CG} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(Ia^2K_{sde} + Ia^2K_{sdd} + Ib^2K_{ste} + Ib^2K_{std})\theta_{CG} \\
& +(IaK_{sde})Z_{rde} + (IaK_{sdd})Z_{rdd} + (-IbK_{ste})Z_{rte} + (-IbK_{std})Z_{rtd} = 0
\end{aligned}$$

A equação de equilíbrio dinâmico para o grau de liberdade que abrange o deslocamento vertical da roda dianteira esquerda - movimento de *bounce* - segue:

$$\begin{aligned}
\sum F_z &= m_{rde} \ddot{Z}_{rde} \\
m_{rde} \ddot{Z}_{rde} &+ (-C_{sde})\dot{Z}_{CG} + (IaC_{sde})\dot{\theta}_{CG} + (C_{sde})\dot{Z}_{rde} \\
&+(K_{sde})Z_{CG} + (IaK_{sde})\theta_{CG} + (K_{sde} + K_{pde})Z_{rde} = K_{pde} Z_{pde}
\end{aligned}$$

A equação de equilíbrio dinâmico para o grau de liberdade que abrange o deslocamento vertical da roda dianteira direita - movimento de *bounce* - segue:

$$\begin{aligned}
\sum F_z &= m_{rdd} \ddot{Z}_{rdd} \\
m_{rdd} \ddot{Z}_{rdd} &+ (-C_{sdd})\dot{Z}_{CG} + (IaC_{sdd})\dot{\theta}_{CG} + (C_{sdd})\dot{Z}_{rdd} \\
&+(K_{sdd})Z_{CG} + (IaK_{sdd})\theta_{CG} + (K_{sdd} + K_{pdd})Z_{rdd} = K_{pdd} Z_{pdd}
\end{aligned}$$

A equação de equilíbrio dinâmico para o grau de liberdade que abrange o deslocamento vertical da roda traseira esquerda - movimento de *bounce* - segue:

$$\begin{aligned}
\sum F_z &= m_{rte} \ddot{Z}_{rte} \\
m_{rte} \ddot{Z}_{rte} &+ (-C_{ste})\dot{Z}_{CG} + (-IbC_{ste})\dot{\theta}_{CG} + (C_{ste})\dot{Z}_{rte} \\
&+(K_{ste})Z_{CG} + (-IbK_{ste})\theta_{CG} + (K_{ste} + K_{pte})Z_{rte} = K_{pte} Z_{pte}
\end{aligned}$$

A equação de equilíbrio dinâmico para o grau de liberdade que abrange o deslocamento vertical da roda traseira direita - movimento de *bounce* - segue:

$$\sum \mathbb{F}z = m_{rtd} \ddot{Z}_{rtd}$$

$$m_{rtd} \ddot{Z}_{rtd} + (-C_{std})\dot{Z}_{CG} + (-IbC_{std})\dot{\theta}_{CG} + (C_{std})\dot{Z}_{rtd} \\ + (K_{std})Z_{CG} + (-IbK_{std})\theta_{CG} + (K_{std} + K_{ptd})Z_{rtd} = K_{ptd} Z_{ptd}$$

3.2.2 Matrizes Massa, Amortecimento e Rigidez do Modelo Categoria Passeio

Simbolicamente, a matriz massa [M] é descrita na Figura 23:

Figura 23 - Matriz massa [M] simbólica.

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline \ddot{Z}_{CG} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \ddot{\theta}_{CG} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \ddot{Z}_{rde} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \ddot{Z}_{rdd} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \ddot{Z}_{rte} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \ddot{Z}_{rtd} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline m_{11} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{12} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{13} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{14} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{15} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{16} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{CG} \ddot{Z}_{CG} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline m_{21} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{22} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{23} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{24} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{25} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{26} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline J_{\theta CG} \ddot{\theta}_{CG} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline m_{31} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{32} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{33} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{34} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{35} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{36} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{rde} \ddot{Z}_{rde} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline m_{41} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{42} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{43} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{44} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{45} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{46} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{rdd} \ddot{Z}_{rdd} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline m_{51} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{52} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{53} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{54} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{55} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{56} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{rte} \ddot{Z}_{rte} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline m_{61} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{62} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{63} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{64} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{65} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{66} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline m_{rtd} \ddot{Z}_{rtd} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Fonte: Autoria própria.

Numericamente, a matriz massa [M] é descrita na Figura 24:

Figura 24 - Matriz massa [M] numérica.

$$M = \begin{bmatrix} 1513 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2443,3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$$

Fonte: Autoria própria.

Simbolicamente, a matriz amortecimento [C] é descrita na Figura 25:

Figura 25 - Matriz amortecimento [C] simbólica.

$$C = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{CG} & \dot{\theta}_{CG} & \dot{Z}_{rde} & \dot{Z}_{rdd} & \dot{Z}_{rte} & \dot{Z}_{rtd} \\ C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{matrix} m_{CG} \dot{Z}_{CG} \\ J_{\theta CG} \dot{\theta}_{CG} \\ m_{rde} \dot{Z}_{rde} \\ m_{rdd} \dot{Z}_{rdd} \\ m_{rte} \dot{Z}_{rte} \\ m_{rtd} \dot{Z}_{rtd} \end{matrix}$$

Fonte: Autoria própria.

Numericamente, a matriz amortecimento [C] é descrita na Figura 26:

Figura 26 - Matriz amortecimento [C] numérica.

$$C = \begin{bmatrix} 800 & 26,7 & -200 & -200 & -200 & -200 \\ 26,7 & 1261,3 & 244,4 & 244,4 & -257,7 & -257,7 \\ -200 & 244,4 & 200 & 0 & 0 & 0 \\ -200 & 244,4 & 0 & 200 & 0 & 0 \\ -200 & -257,7 & 0 & 0 & 200 & 0 \\ -200 & -257,7 & 0 & 0 & 0 & 200 \end{bmatrix}$$

Fonte: Autoria própria.

Simbolicamente, a matriz rigidez [K] é descrita na Figura 27:

Figura 27 - Matriz rigidez [K] simbólica.

$$K = \begin{bmatrix} Z_{CG} & \theta_{CG} & Z_{rde} & Z_{rdd} & Z_{rte} & Z_{rtd} \\ K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & m_{CG} Z_{CG} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & J_{\theta_{CG}} \theta_{CG} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & m_{rde} Z_{rde} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} & m_{rdd} Z_{rdd} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} & m_{rte} Z_{rte} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} & m_{rtd} Z_{rtd} \end{bmatrix}$$

Fonte: Autoria própria.

Numericamente, a matriz rigidez [K] é descrita na Figura 28:

Figura 28 - Matriz rigidez [K] numérica.

$$K = \begin{bmatrix} 60000 & 2004 & -15000 & -15000 & -15000 & -15000 \\ 2004 & 94600 & 18327 & 18327 & -19329 & -19329 \\ -15000 & 18327 & 165000 & 0 & 0 & 0 \\ -15000 & 18327 & 0 & 165000 & 0 & 0 \\ -15000 & -19329 & 0 & 0 & 165000 & 0 \\ -15000 & -19329 & 0 & 0 & 0 & 165000 \end{bmatrix}$$

Fonte: Autoria própria.

Onde:

- Matriz [M]: apresenta valores em [kg ou kg m²];
- Matriz [C]: apresenta valores em [kg/s];
- Matriz [K]: apresenta valores em [N/m ou kg/s²].

3.2.3 Matrizes Massa, Amortecimento e Rigidez do Modelo Categoria *Off Road*

Simbolicamente, a matriz massa [M] é descrita na Figura 29:

Figura 29 - Matriz massa [M] simbólica.

$$M = \begin{matrix} & \ddot{Z}_{CG} & \ddot{\theta}_{CG} & \ddot{Z}_{rde} & \ddot{Z}_{rdd} & \ddot{Z}_{rte} & \ddot{Z}_{rtd} & \\ \begin{matrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \\ m_{41} \\ m_{51} \\ m_{61} \end{matrix} & \begin{matrix} m_{12} \\ m_{22} \\ m_{32} \\ m_{42} \\ m_{52} \\ m_{62} \end{matrix} & \begin{matrix} m_{13} \\ m_{23} \\ m_{33} \\ m_{43} \\ m_{53} \\ m_{63} \end{matrix} & \begin{matrix} m_{14} \\ m_{24} \\ m_{34} \\ m_{44} \\ m_{54} \\ m_{64} \end{matrix} & \begin{matrix} m_{15} \\ m_{25} \\ m_{35} \\ m_{45} \\ m_{55} \\ m_{65} \end{matrix} & \begin{matrix} m_{16} \\ m_{26} \\ m_{36} \\ m_{46} \\ m_{56} \\ m_{66} \end{matrix} & \begin{matrix} m_{CG} \ddot{Z}_{CG} \\ J_{\theta CG} \ddot{\theta}_{CG} \\ m_{rde} \ddot{Z}_{rde} \\ m_{rdd} \ddot{Z}_{rdd} \\ m_{rte} \ddot{Z}_{rte} \\ m_{rtd} \ddot{Z}_{rtd} \end{matrix} \end{matrix}$$

Fonte: Autoria própria.

Numericamente, a matriz massa [M] é descrita na Figura 30:

Figura 30 - Matriz massa [M] numérica.

$$M = \begin{matrix} \begin{matrix} 8616 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 16353 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 42,6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 42,6 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 42,6 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 42,6 \end{matrix} \end{matrix}$$

Fonte: Autoria própria.

Simbolicamente, a matriz amortecimento [C] é descrita na Figura 31:

Figura 31 - Matriz amortecimento [C] simbólica.

$$C = \begin{array}{c} \dot{Z}_{CG} \\ \dot{\theta}_{CG} \\ \dot{Z}_{rde} \\ \dot{Z}_{rdd} \\ \dot{Z}_{rte} \\ \dot{Z}_{rtd} \end{array} \begin{array}{c} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \\ C_{14} \\ C_{15} \\ C_{16} \\ C_{21} \\ C_{22} \\ C_{23} \\ C_{24} \\ C_{25} \\ C_{26} \\ C_{31} \\ C_{32} \\ C_{33} \\ C_{34} \\ C_{35} \\ C_{36} \\ C_{41} \\ C_{42} \\ C_{43} \\ C_{44} \\ C_{45} \\ C_{46} \\ C_{51} \\ C_{52} \\ C_{53} \\ C_{54} \\ C_{55} \\ C_{56} \\ C_{61} \\ C_{62} \\ C_{63} \\ C_{64} \\ C_{65} \\ C_{66} \end{array} \begin{array}{c} m_{CG} \dot{Z}_{CG} \\ J_{\theta CG} \dot{\theta}_{CG} \\ m_{rde} \dot{Z}_{rde} \\ m_{rdd} \dot{Z}_{rdd} \\ m_{rte} \dot{Z}_{rte} \\ m_{rtd} \dot{Z}_{rtd} \end{array}$$

Fonte: Autoria própria.

Numericamente, a matriz amortecimento [C] é descrita na Figura 32:

Figura 32 - Matriz amortecimento [C] numérica.

$$C = \begin{array}{c} 16000 \\ -5360 \\ -4000 \\ -4000 \\ -4000 \\ -4000 \\ -4000 \end{array} \begin{array}{c} -5360 \\ 40983,200 \\ 7600 \\ 7600 \\ -4920 \\ -4920 \\ -4920 \end{array} \begin{array}{c} -4000 \\ 7600 \\ 4000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} -4000 \\ 7600 \\ 0 \\ 4000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} -4000 \\ -4920 \\ 0 \\ 0 \\ 4000 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} -4000 \\ -4920 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4000 \end{array}$$

Fonte: Autoria própria.

Simbolicamente, a matriz rigidez [K] é descrita na Figura 33:

Figura 33 - Matriz rigidez [K] simbólica.

$$K = \begin{matrix} & Z_{CG} & \theta_{CG} & Z_{rde} & Z_{rdd} & Z_{rte} & Z_{rtd} & \\ \begin{matrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{matrix} & \begin{matrix} m_{CG} Z_{CG} \\ J_{\theta_{CG}} \theta_{CG} \\ m_{rde} Z_{rde} \\ m_{rdd} Z_{rdd} \\ m_{rte} Z_{rte} \\ m_{rtd} Z_{rtd} \end{matrix} \end{matrix}$$

Fonte: Autoria própria.

Numericamente, a matriz rigidez [K] é descrita na Figura 34:

Figura 34 - Matriz rigidez [K] numérica.

$$K = \begin{matrix} \begin{matrix} 740000 & -247900 & -185000 & -185000 & -185000 & -185000 \\ -247900 & 1895473 & 351500 & 351500 & -227550 & -227550 \\ -185000 & 351500 & 2035000 & 0 & 0 & 0 \\ -185000 & 351500 & 0 & 2035000 & 0 & 0 \\ -185000 & -227550 & 0 & 0 & 2035000 & 0 \\ -185000 & -227550 & 0 & 0 & 0 & 2035000 \end{matrix} \end{matrix}$$

Fonte: Autoria própria.

Onde:

- Matriz [M]: apresenta valores em [kg ou kg m²];
- Matriz [C]: apresenta valores em [kg/s];
- Matriz [K]: apresenta valores em [N/m ou kg/s²].

3.3 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

A ferramenta computacional adotada para a implementação numérica das equações de equilíbrio dinâmico foi o MATLAB, desenvolvido por MathWorks®. A escolha desta foi priorizada pois a plataforma MATLAB é otimizada para a resolução de problemas de engenharia e científicos, sobretudo. Concomitantemente, a linguagem matricial desta plataforma é uma maneira natural de expressar matemática computacional, além disto, as ferramentas e capacidades do MATLAB são rigorosamente testadas e projetadas para trabalhar em conjunto com as necessidades do usuário.

Logo, a problemática do modelo veicular tridimensional de análise dinâmica foi implementada numericamente na linguagem da plataforma. Esta problemática pode ser esmiuçada:

$$[M]\{\ddot{Z}\} + [C]\{\dot{Z}\} + [K]\{Z\} = \{f\}$$

Onde:

$$\{\ddot{Z}\} = \begin{bmatrix} \ddot{Z}_{CG}(t) \\ \ddot{\theta}_{CG}(t) \\ \ddot{Z}_{rde} \\ \ddot{Z}_{rdd} \\ \ddot{Z}_{rte} \\ \ddot{Z}_{rtd} \end{bmatrix}; \{\dot{Z}\} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{CG}(t) \\ \dot{\theta}_{CG}(t) \\ \dot{Z}_{rde} \\ \dot{Z}_{rdd} \\ \dot{Z}_{rte} \\ \dot{Z}_{rtd} \end{bmatrix}; \{Z\} = \begin{bmatrix} Z_{CG}(t) \\ \theta_{CG}(t) \\ Z_{rde} \\ Z_{rdd} \\ Z_{rte} \\ Z_{rtd} \end{bmatrix}$$

Por conseguinte, o vetor excitação fica discriminado como:

$$\{f\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_{pde} Z_{pde} \\ K_{pdd} Z_{pdd} \\ K_{pte} Z_{pte} \\ K_{ptd} Z_{ptd} \end{bmatrix}$$

Em concordância com o problema descrito, é de fácil percepção que a solução deste envolve a determinação da resposta de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem não-homogênea.

A plataforma empregada possui uma miscelânea de funções e ferramentas para resolver o problema acima descrito. Desta maneira, a função `ode23` foi a eleita para abordar esta resolução. Esta função é baseada na fórmula explícita - calcula o valor de uma função $f(t,y)$ com t e y determinados anteriormente no algoritmo de solução - de Runge-Kutta de 2ª e 3ª ordem, também chamada de par Dormand-Prince, em substituição à fórmula de Fehlberg utilizada em versões anteriores do programa.

4 RESULTADOS

Ponderadas as matrizes massa [M] e rigidez [K] do modelo analítico e discriminada a matriz amortecimento [C].

4.1 MODELO VEICULAR TRIDIMENSIONAL CATEGORIA PASSEIO

Dados de entrada conforme Tabela 1:

Tabela 1 - Parâmetros de simulação

Parâmetro	Módulo	Unidade
m_{CG}	1513	[kg]
$J_{\theta CG}$	2443,3	[kg m ²]
m_{rodas}	50	[kg]
$C_{suspensão\ dianteira}$	200	[kg/s]
$C_{suspensão\ traseira}$	200	[kg/s]
$K_{suspensão\ dianteira}$	15e+03	[kg/s ²]
$K_{suspensão\ traseira}$	15e+03	[kg/s ²]
K_{pneus}	150e+03	[kg/s ²]
Ia	1221,8e-03	[m]
Ib	1288,6e-03	[m]
Ic	500e-03	[m]
Id	500e-03	[m]
Ie	500e-03	[m]
If	500e-03	[m]

Fonte: PATRICIO, L. F. S. 2005. Desenvolvimento matemático e implementação numérica de um modelo tridimensional para a determinação das respostas dinâmicas de um veículo automotor.

Matriz dos autovalores $[\lambda]$, conforme a Figura 35:

Figura 35 - Matriz dos autovalores $[\lambda]$.

$\lambda =$	36,622	0	0	0	0	0
	0	34,548	0	0	0	0
	0	0	3303,707	0	0	0
	0	0	0	3303,495	0	0
	0	0	0	0	3300,000	0
	0	0	0	0	0	3300,000

Fonte: Autoria própria.

Matriz dos autovetores $[\phi]$, conforme a Figura 36:

Figura 36 - Matriz dos autovetores $[\phi]$.

$\phi =$	0,87454	-0,62112	-0,00514	0,00322	-9,23e-18	-1,71e-17
	0,44484	0,75617	-0,00261	-0,00393	5,48e-16	6,52e-16
	0,03043	-0,14194	0,15761	-0,68930	0,70710	0,37286
	0,03043	-0,14194	0,15761	-0,68930	-0,70710	-0,37286
	0,13309	0,03245	0,68930	0,15761	-5,69e-14	-0,60080
	0,13309	0,03245	0,68930	0,15761	-5,71e-14	0,60080

Fonte: Autoria própria.

Matriz das frequências naturais [Hz], conforme a Figura 37:

Figura 37 - Matriz das frequências naturais [Hz].

$$fn = \begin{bmatrix} 0,96317 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,93561 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9,14788 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9,14788 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9,14275 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9,14275 \end{bmatrix}$$

Fonte: Autoria própria.

Matriz das frequências naturais [rad/s], conforme a Figura 38:

Figura 38 - Matriz das frequências naturais [rad/s].

$$wn = \begin{bmatrix} 6,05178 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5,87862 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 57,47786 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 57,47786 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 57,44563 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 57,44563 \end{bmatrix}$$

Fonte: Autoria própria.

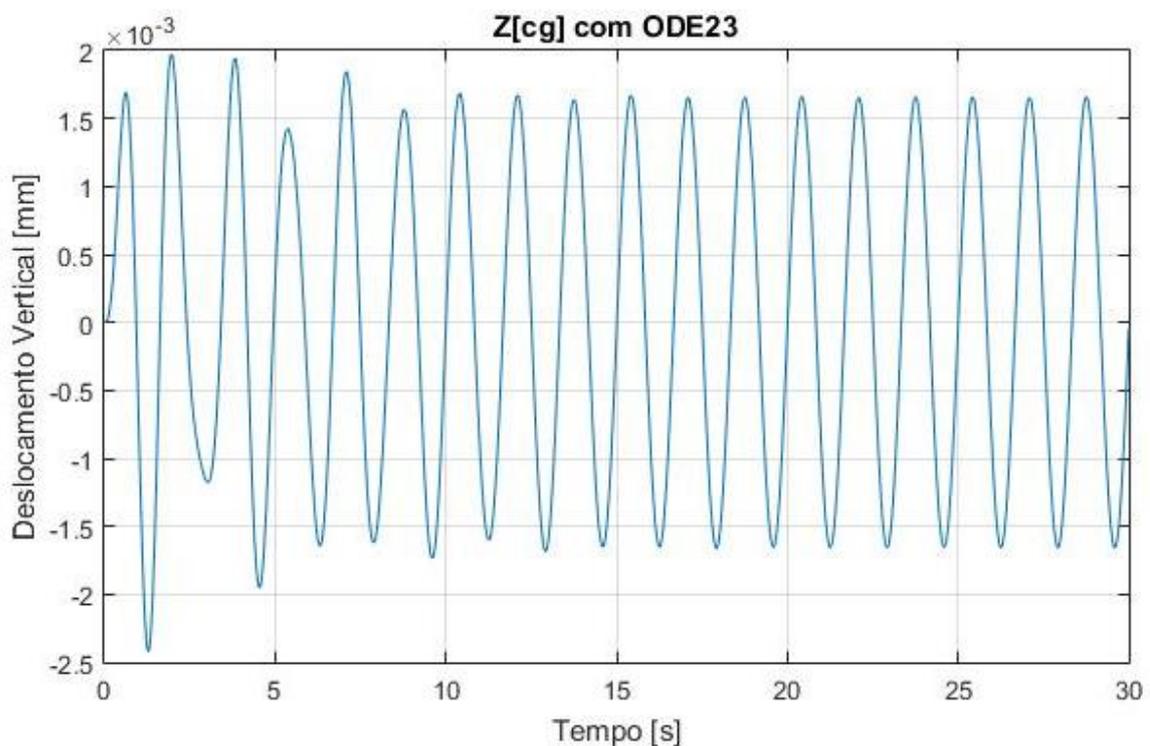
Analisando as matrizes de autovalores e autovetores acima discriminadas, pode-se ratificar:

- i. Na frequência de 0,96317 [Hz] o modo de vibrar predominante é o de *Bounce* (deslocamento vertical de corpo rígido da carroceria) com um fator de acoplamento com o modo de vibrar de *Pitch*.

- ii. Na frequência de 0,93561 [Hz] o modo de vibrar predominante é o de *Pitch* (ângulo da carroceria revolucionado em torno do eixo das ordenadas) com um fator de acoplamento com o modo de vibrar de *Bounce*.
- iii. Na frequência de 9,14788 [Hz] o modo de vibrar predominante coincide com o primeiro modo de deslocamento vertical (eixo dianteiro) do conjunto de suspensão.
- iv. Na frequência de 9,14275 [Hz] o modo de vibrar predominante coincide com o segundo modo de deslocamento vertical (eixo traseiro) do conjunto de suspensão.

Na Figura 39, o modo de vibrar predominante é o de *Bounce* do modelo passeio, através da análise do gráfico é possível observar que a amplitude máxima (positiva) do movimento é de aproximadamente $1,972e-03$ [mm] no tempo de 1,966 [s]. Em contrapartida, a amplitude máxima (negativa) do movimento é de aproximadamente $2,421e-03$ [mm] no tempo de 1,285 [s].

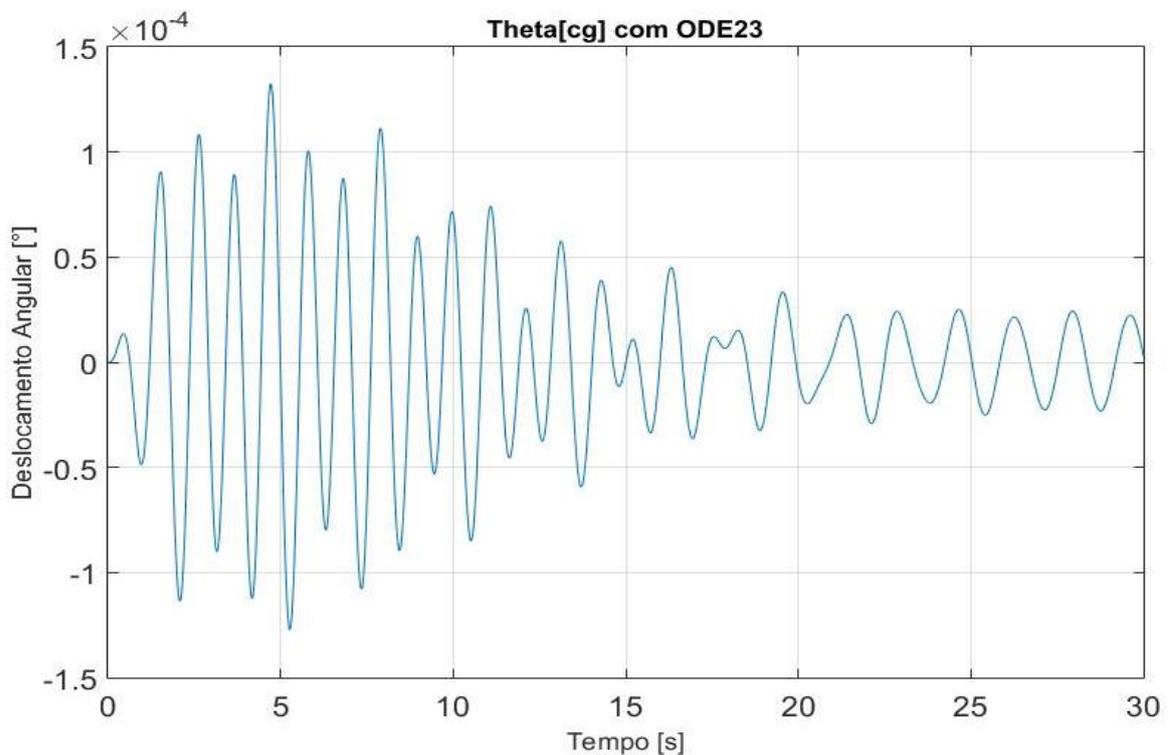
Figura 39 - Modo de vibrar de Bounce (deslocamento vertical de corpo rígido da carroceria) no modelo passeio.



Fonte: Autoria própria.

Na Figura 40, o modo de vibrar predominante é o de *Pitch* do modelo passeio, através da análise do gráfico é possível observar que a amplitude máxima (positiva) do movimento é de aproximadamente $1,325 \times 10^{-4}$ [°] no tempo de 4,714 [s]. Em contrapartida, a amplitude máxima (negativa) do movimento é de aproximadamente $1,272 \times 10^{-4}$ [°] no tempo de 5,266 [s].

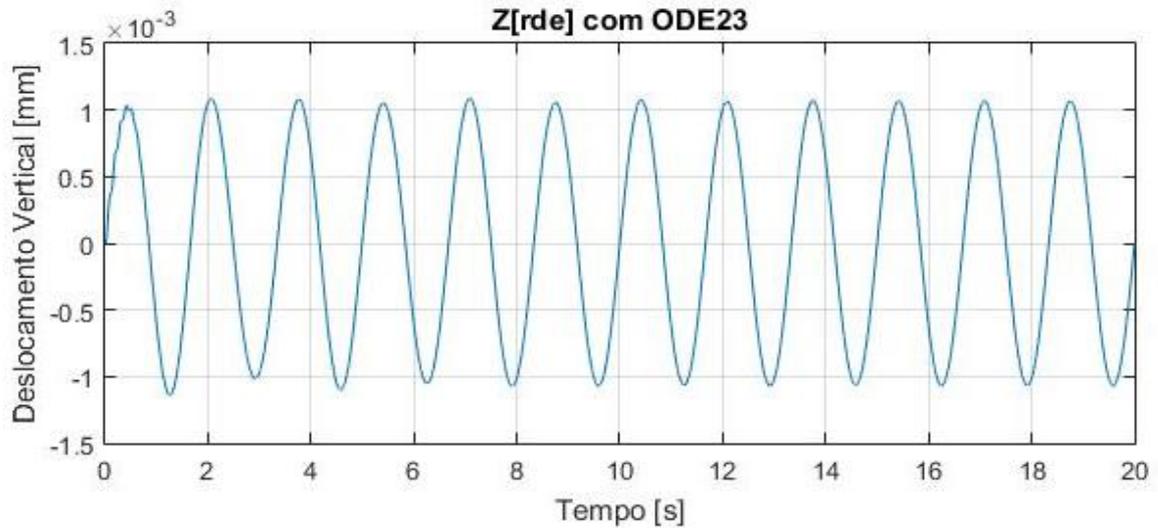
Figura 40 - Modo de vibrar de Pitch (ângulo da carroceria revolucionado em torno do eixo das ordenadas) no modelo passeio.



Fonte: Autoria própria.

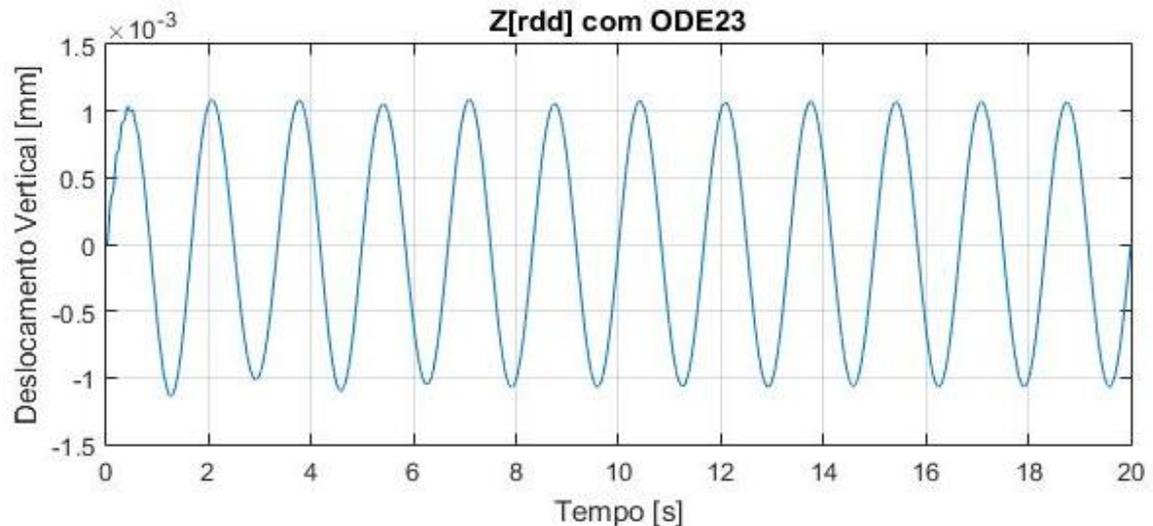
Nas Figuras 41 e 42, o modo de vibrar predominante é o de *Bounce* do eixo dianteiro do conjunto de suspensão do modelo passeio, através da análise do gráfico é possível observar que a amplitude máxima (positiva) do movimento é de aproximadamente $1,084 \times 10^{-3}$ [mm] no tempo de 2,058 [s]. Em contrapartida, a amplitude máxima (negativa) do movimento é de aproximadamente $1,137 \times 10^{-3}$ [mm] no tempo de 1,255 [s].

Figura 41 - Modo de vibrar do primeiro deslocamento vertical (eixo dianteiro) do conjunto de suspensão no modelo passeio.



Fonte: Autoria própria.

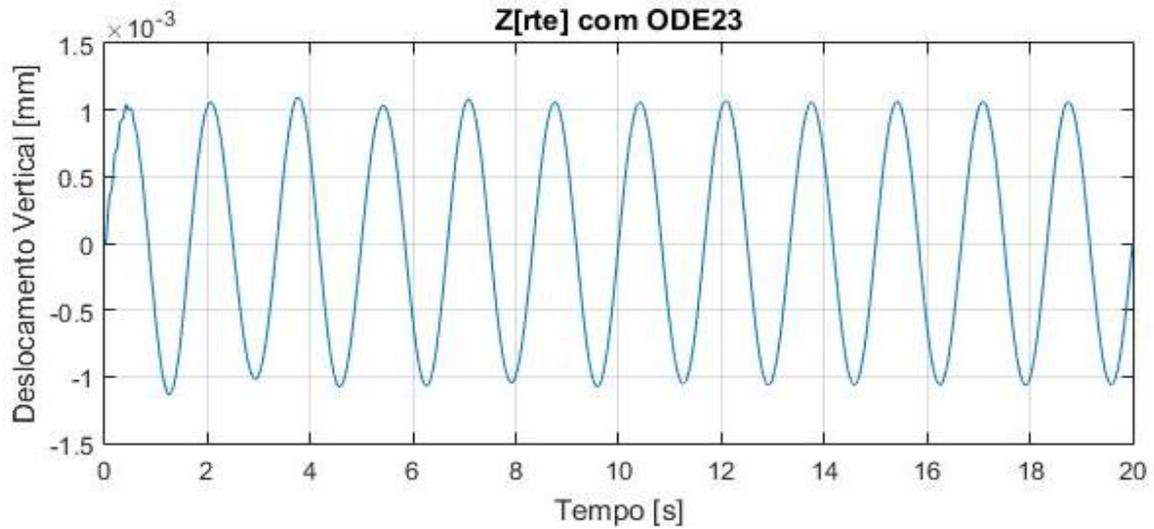
Figura 42 - Modo de vibrar do primeiro deslocamento vertical (eixo dianteiro) do conjunto de suspensão no modelo passeio.



Fonte: Autoria própria.

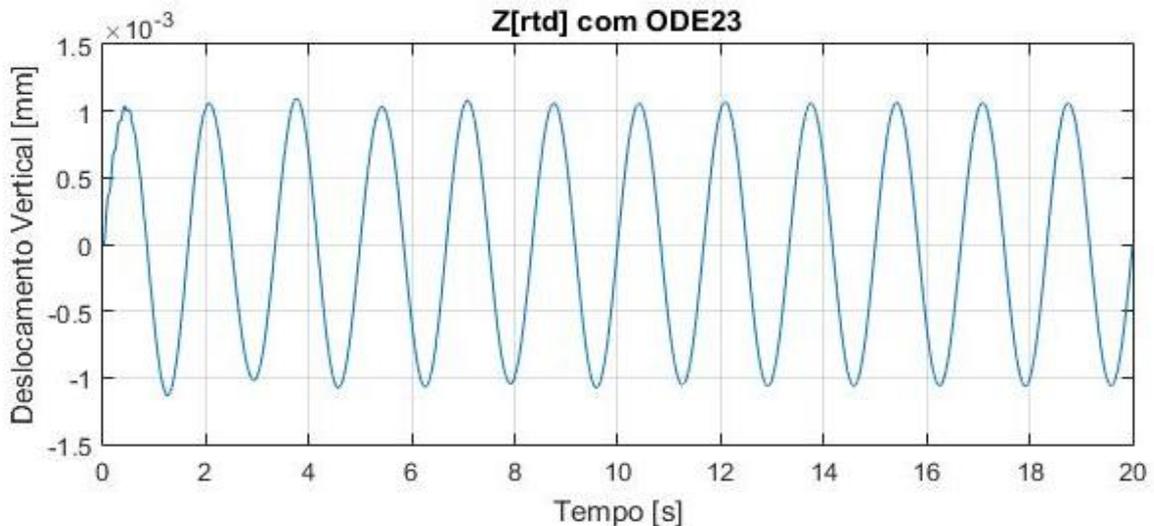
Nas Figuras 43 e 44, o modo de vibrar predominante é o de *Bounce* do eixo traseiro do conjunto de suspensão do modelo passeio, através da análise do gráfico é possível observar que a amplitude máxima (positiva) do movimento é de aproximadamente $1,058e-03$ [mm] no tempo de 2,052 [s]. Em contrapartida, a amplitude máxima (negativa) do movimento é de aproximadamente $1,132e-03$ [mm] no tempo de 1,248 [s].

Figura 43 - Modo de vibrar do segundo deslocamento vertical (eixo traseiro) do conjunto de suspensão no modelo passeio.



Fonte: Autoria própria.

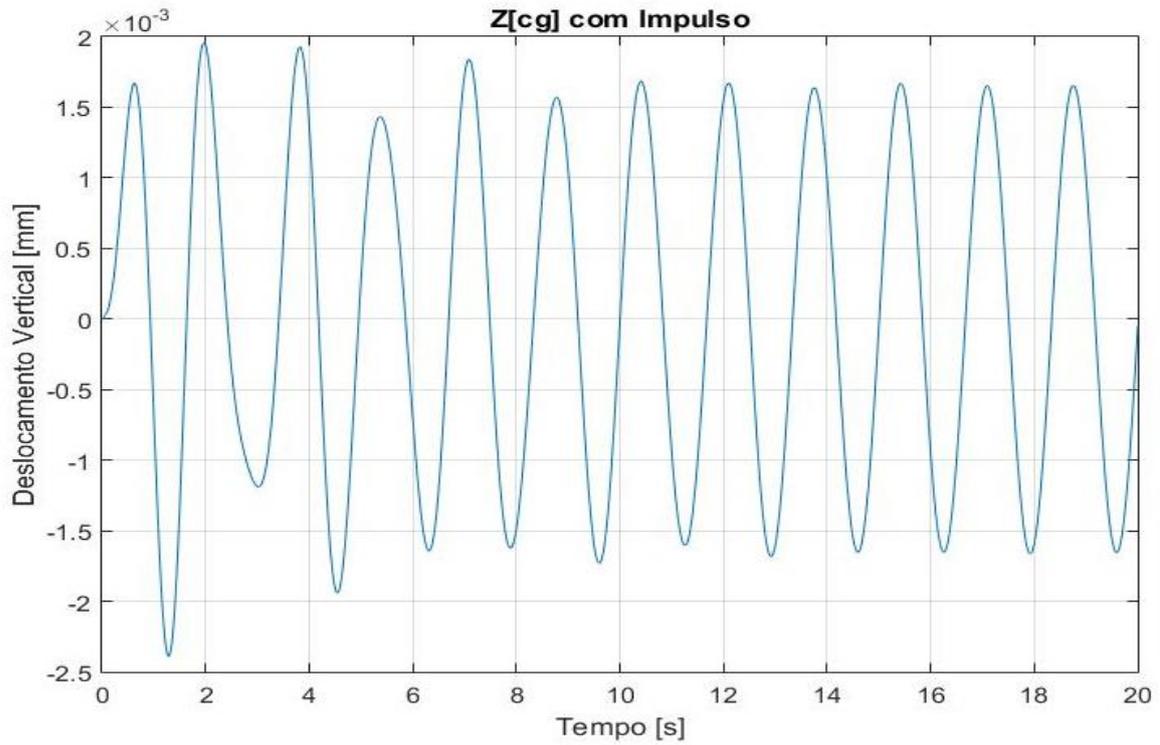
Figura 44 - Modo de vibrar do segundo deslocamento vertical (eixo traseiro) do conjunto de suspensão no modelo passeio.



Fonte: Autoria própria.

Na Figura 45, o modo de vibrar predominante é o de *Bounce* com impulso do modelo passeio, através da análise do gráfico é possível observar que a amplitude máxima (positiva) do movimento é de aproximadamente $1,956e-03$ [mm] no tempo de 1,969 [s]. Em contrapartida, a amplitude máxima (negativa) do movimento é de aproximadamente $2,391e-03$ [mm] no tempo de 1,286 [s].

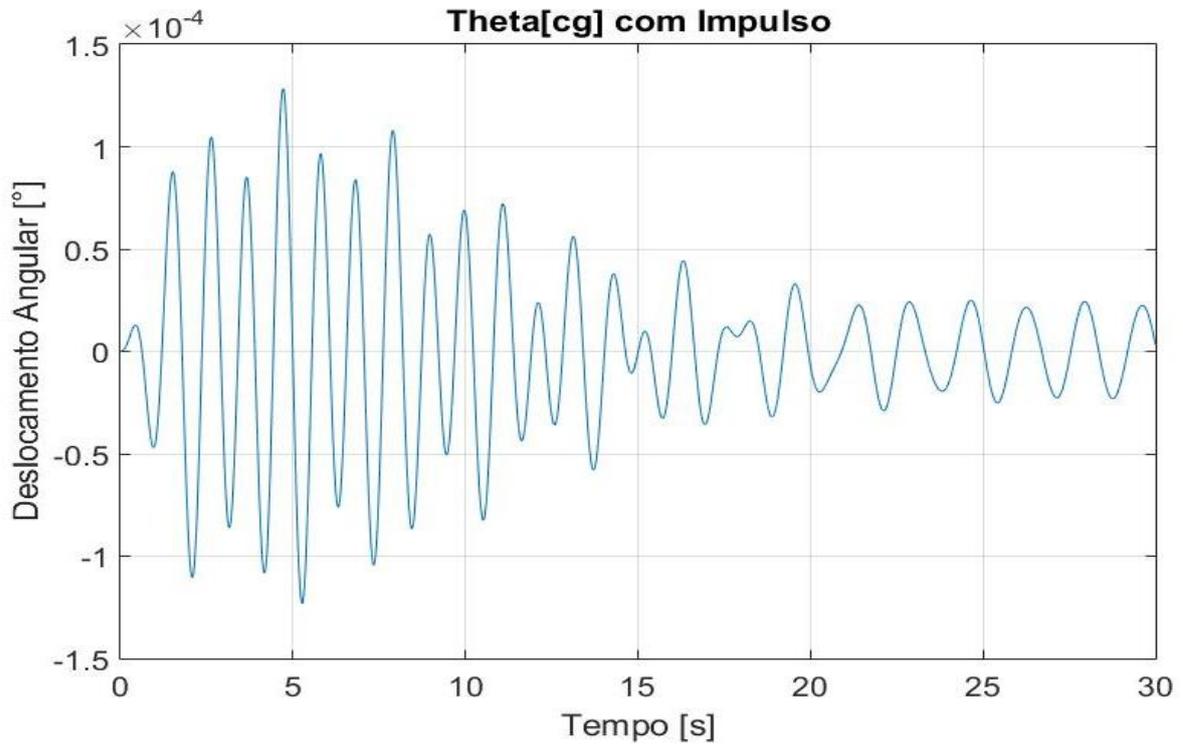
Figura 45 - Modo de vibrar de Bounce com impulso no modelo passeio.



Fonte: Autoria própria.

Na Figura 46, o modo de vibrar predominante é o de *Pitch* com impulso do modelo passeio, através da análise do gráfico é possível observar que a amplitude máxima (positiva) do movimento é de aproximadamente $1,283e-04$ [°] no tempo de 4,717 [s]. Em contrapartida, a amplitude máxima (negativa) do movimento é de aproximadamente $1,232e-04$ [°] no tempo de 5,265 [s].

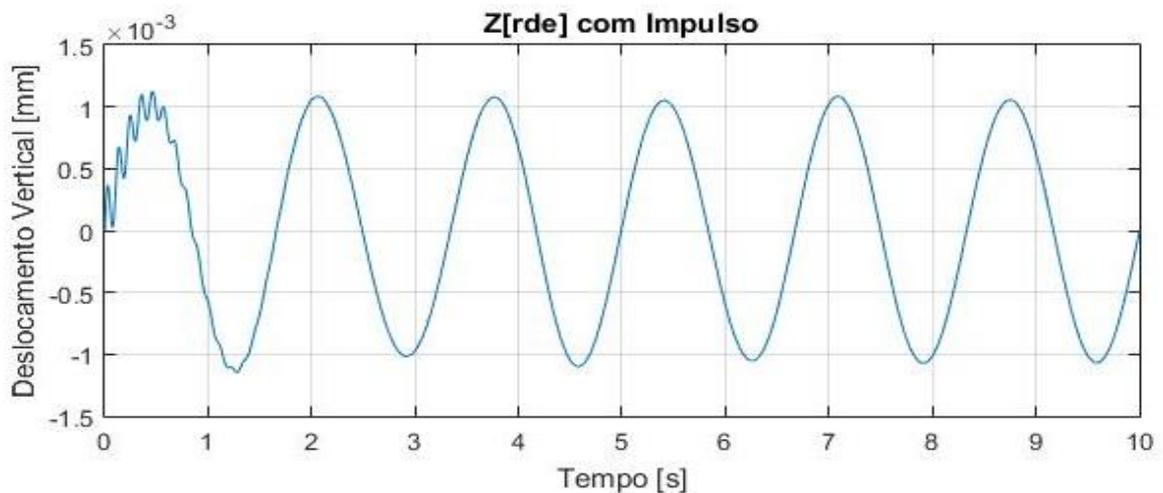
Figura 46 - Modo de vibrar de Pitch com impulso no modelo passeio.



Fonte: Autoria própria.

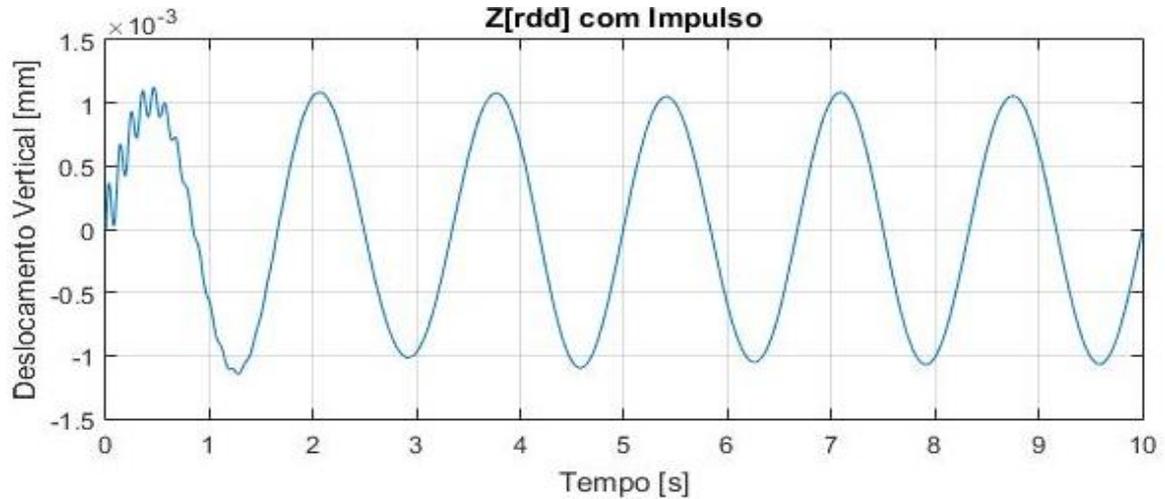
Nas Figuras 47 e 48, o modo de vibrar predominante é o de *Bounce* com impulso do eixo dianteiro do conjunto de suspensão do modelo passeio, através da análise do gráfico é possível observar que a amplitude máxima (positiva) do movimento é de aproximadamente $1,126 \times 10^{-3}$ [mm] no tempo de 0,4638 [s]. Em contrapartida, a amplitude máxima (negativa) do movimento é de aproximadamente $1,148 \times 10^{-3}$ [mm] no tempo de 1,278 [s].

Figura 47 - Modo de vibrar do primeiro deslocamento vertical (eixo dianteiro) com impulso no modelo passeio.



Fonte: Autoria própria.

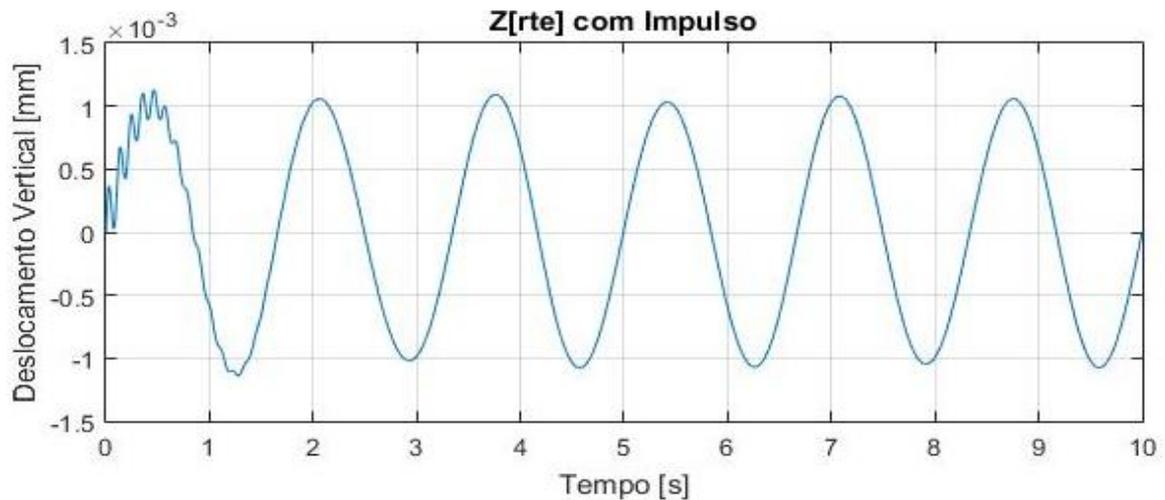
Figura 48 - Modo de vibrar do primeiro deslocamento vertical (eixo dianteiro) com impulso no modelo passeio.



Fonte: Autoria própria.

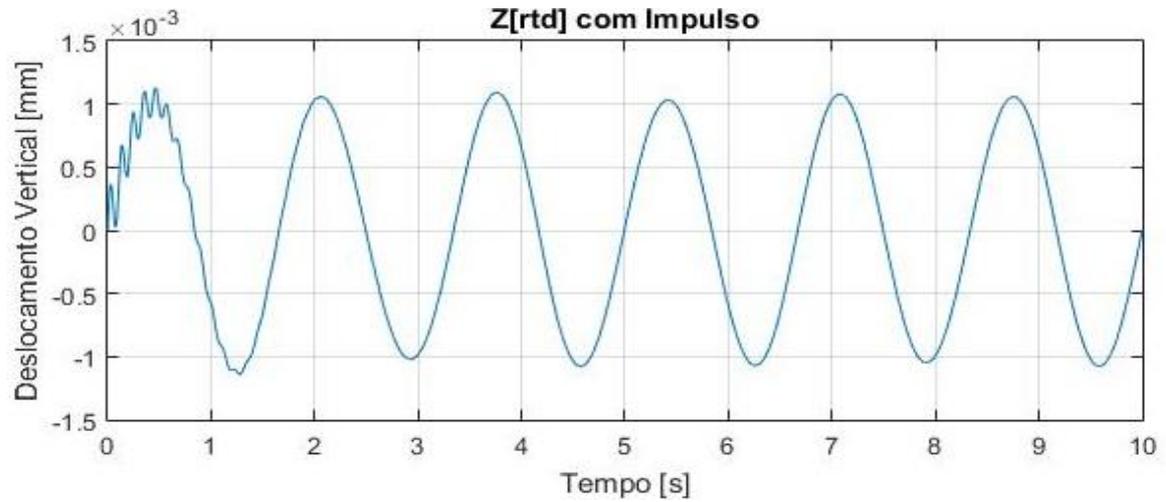
Nas Figuras 49 e 50, o modo de vibrar predominante é o de *Bounce* com impulso do eixo traseiro do conjunto de suspensão do modelo passeio, através da análise do gráfico é possível observar que a amplitude máxima (positiva) do movimento é de aproximadamente $1,129 \times 10^{-3}$ [mm] no tempo de 0,4631 [s]. Em contrapartida, a amplitude máxima (negativa) do movimento é de aproximadamente $1,141 \times 10^{-3}$ [mm] no tempo de 1,279 [s].

Figura 49 - Modo de vibrar do segundo deslocamento vertical (eixo traseiro) com impulso no modelo passeio.



Fonte: Autoria própria.

Figura 50 - Modo de vibrar do segundo deslocamento vertical (eixo traseiro) com impulso no modelo passeio.



Fonte: Autoria própria.

Nas Figuras 47, 48, 49 e 50 são observadas oscilações características no primeiro harmônico dos respectivos gráficos, este comportamento do modo de vibrar dos eixos do conjunto de suspensão do modelo passeio caracteriza a incapacidade deste sistema em dissipar a energia proveniente do impulso inicial.

4.2 MODELO VEICULAR TRIDIMENSIONAL CATEGORIA *OFF ROAD*

Dados de entrada conforme Tabela 2:

Tabela 2 - Parâmetros de simulação

Parâmetro	Módulo	Unidade
m_{CG}	8616	[kg]
$J_{\theta CG}$	16353	[kg m ²]
m_{rodas}	42,6	[kg]
$C_{suspensão\ dianteira}$	4e+03	[kg/s]
$C_{suspensão\ traseira}$	4e+03	[kg/s]
$K_{suspensão\ dianteira}$	185e+03	[kg/s ²]
$K_{suspensão\ traseira}$	185e+03	[kg/s ²]
K_{pneus}	1850e+03	[kg/s ²]
Ia	1900e-03	[m]
Ib	1230e-03	[m]
Ic	1250e-03	[m]
Id	1250e-03	[m]
Ie	1250e-03	[m]
If	1250e-03	[m]

Fonte: PAZOOKI, A., RAKHEJA, S., CAO, D. 2011. Modeling and validation of Off-Road Vehicle Ride Dynamics.

Matriz dos autovalores $[\lambda]$, conforme a Figura 51:

Figura 51 - Matriz dos autovalores $[\lambda]$.

68,334	0	0	0	0	0
0	115,079	0	0	0	0
0	0	47776,79	0	0	0
0	0	0	47781,49	0	0
0	0	0	0	47769,95	0
0	0	0	0	0	47769,95

Fonte: Autoria própria.

Matriz dos autovetores $[\phi]$, conforme a Figura 52:

Figura 52 - Matriz dos autovetores $[\phi]$.

-0,92246	0,55561	-7,494e-4	4,992e-4	-1,44e-16	-7,17e-17
-0,34332	-0,78655	-2,789e-4	-7,067e-4	-3,80e-16	-1,00e-16
-0,02459	0,18682	0,13927	-0,69325	-1,90e-13	-0,68599
-0,02459	0,18682	0,13927	-0,69325	-2,05e-13	0,68599
-0,12242	-0,03753	0,69325	0,13927	-0,70710	-0,17149
-0,12242	-0,03753	0,69325	0,13927	0,70710	0,17149

Fonte: Autoria própria.

Matriz das frequências naturais [Hz], conforme a Figura 53:

Figura 53 - Matriz das frequências naturais [Hz].

$$fn = \begin{bmatrix} 1,3156 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,7073 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 34,7879 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 34,7879 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 34,7854 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 34,7854 \end{bmatrix}$$

Fonte: Autoria própria.

Matriz das frequências naturais [rad/s], conforme a Figura 54:

Figura 54 - Matriz das frequências naturais [rad/s].

$$wn = \begin{bmatrix} 8,2664 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10,7275 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 218,5790 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 218,5897 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 218,5633 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 218,5633 \end{bmatrix}$$

Fonte: Autoria própria.

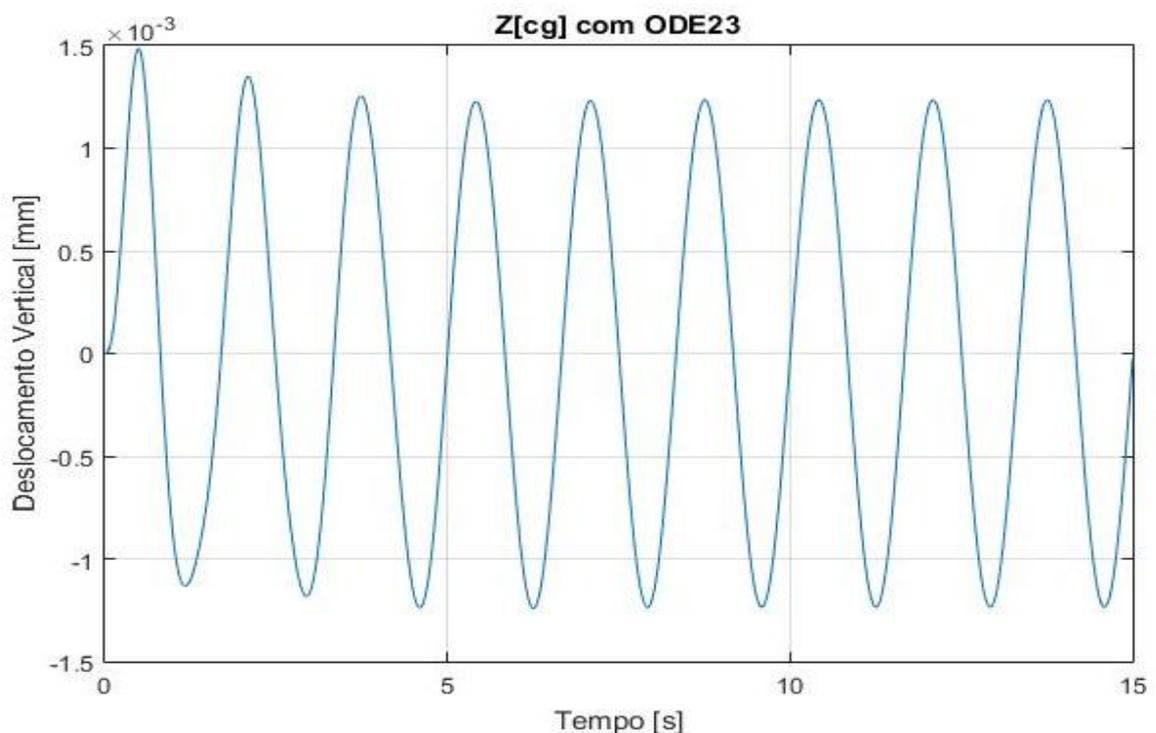
Analisando as matrizes de autovalores e autovetores acima discriminadas, pode-se ratificar:

- i. Na frequência de 1,3156 [Hz] o modo de vibrar predominante é o de *Bounce* (deslocamento vertical de corpo rígido da carroceria) com um fator de acoplamento com o modo de vibrar de *Pitch*.

- ii. Na frequência de 1,7073 [Hz] o modo de vibrar predominante é o de *Pitch* (ângulo da carroceria revolucionado em torno do eixo das ordenadas) com um fator de acoplamento com o modo de vibrar de *Bounce*.
- iii. Na frequência de 34,7879 [Hz] o modo de vibrar predominante coincide com o primeiro modo de deslocamento vertical (eixo dianteiro) do conjunto de suspensão.
- iv. Na frequência de 34,7854 [Hz] o modo de vibrar predominante coincide com o segundo modo de deslocamento vertical (eixo traseiro) do conjunto de suspensão.

Na Figura 55, o modo de vibrar predominante é o de *Bounce* do modelo *off road*, através da análise do gráfico é possível observar que a amplitude máxima (positiva) do movimento é de aproximadamente $1,485e-03$ [mm] no tempo de 0,4903 [s]. Em contrapartida, a amplitude máxima (negativa) do movimento é de aproximadamente $1,133e-03$ [mm] no tempo de 1,173 [s].

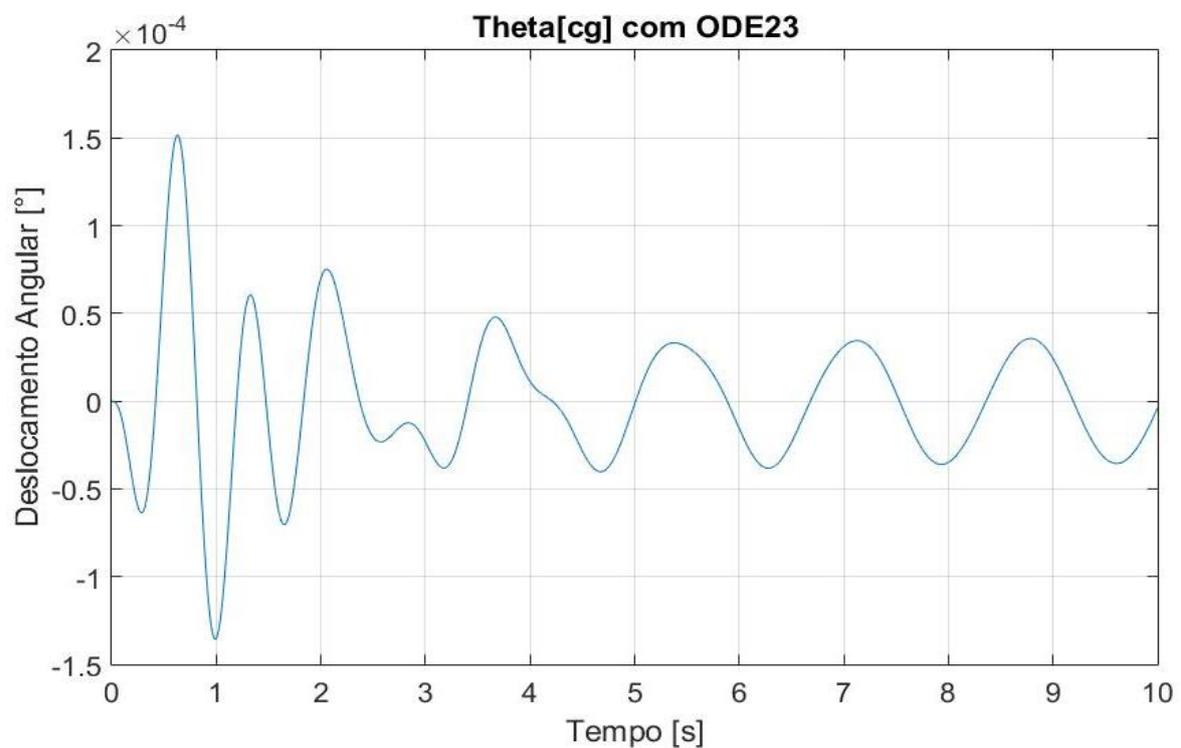
Figura 55 - Modo de vibrar de Bounce (deslocamento vertical de corpo rígido da carroceria) no modelo off road.



Fonte: Autoria própria.

Na Figura 56, o modo de vibrar predominante é o de *Pitch* do modelo *off road*, através da análise do gráfico é possível observar que a amplitude máxima (positiva) do movimento é de aproximadamente $1,516 \times 10^{-4}$ [°] no tempo de 0,6294 [s]. Em contrapartida, a amplitude máxima (negativa) do movimento é de aproximadamente $1,357 \times 10^{-4}$ [°] no tempo de 0,9908 [s].

Figura 56 - Modo de vibrar de Pitch (ângulo da carroceria revolucionado em torno do eixo das ordenadas) no modelo *off road*.



Fonte: Autoria própria.

Nas Figuras 57 e 58, o modo de vibrar predominante é o de *Bounce* do eixo dianteiro do conjunto de suspensão do modelo *off road*, através da análise do gráfico é possível observar que a amplitude máxima (positiva) do movimento é de aproximadamente $1,037 \times 10^{-3}$ [mm] no tempo de 0,4218 [s]. Em contrapartida, a amplitude máxima (negativa) do movimento é de aproximadamente $1,017 \times 10^{-3}$ [mm] no tempo de 1,251 [s].

Figura 57 - Modo de vibrar do primeiro deslocamento vertical (eixo dianteiro) do conjunto de suspensão no modelo off road.



Fonte: Autoria própria.

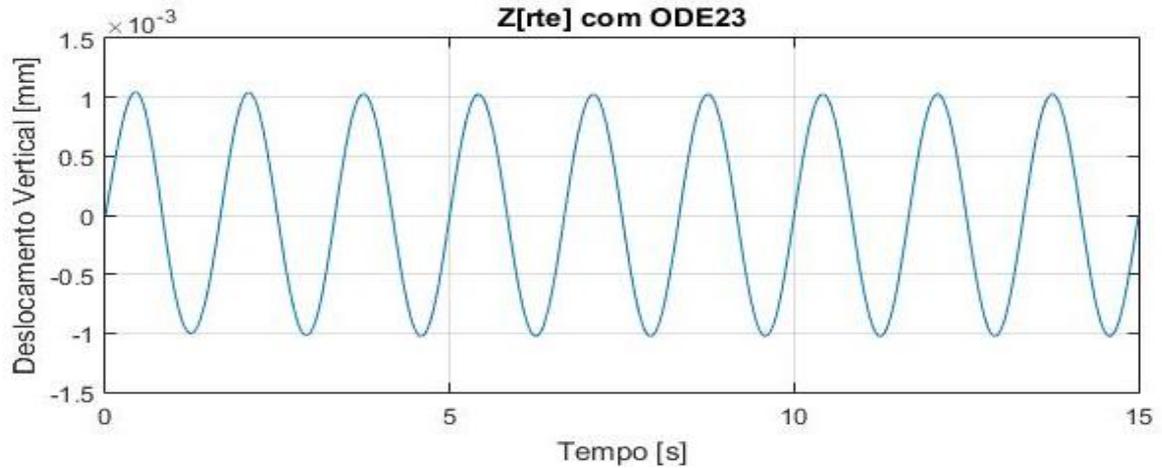
Figura 58 - Modo de vibrar do primeiro deslocamento vertical (eixo dianteiro) do conjunto de suspensão no modelo off road.



Fonte: Autoria própria.

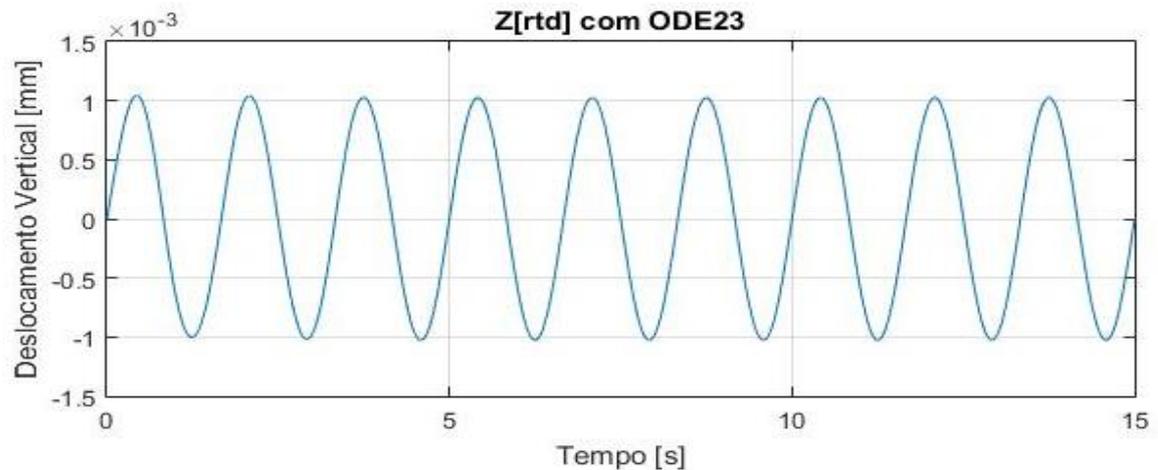
Nas Figuras 59 e 60, o modo de vibrar predominante é o de *Bounce* do eixo traseiro do conjunto de suspensão do modelo *off road*, através da análise do gráfico é possível observar que a amplitude máxima (positiva) do movimento é de aproximadamente $1,044e-03$ [mm] no tempo de $0,4398$ [s]. Em contrapartida, a amplitude máxima (negativa) do movimento é de aproximadamente $1,003e-03$ [mm] no tempo de $1,242$ [s].

Figura 59 - Modo de vibrar do segundo deslocamento vertical (eixo traseiro) do conjunto de suspensão no modelo off road.



Fonte: Autoria própria.

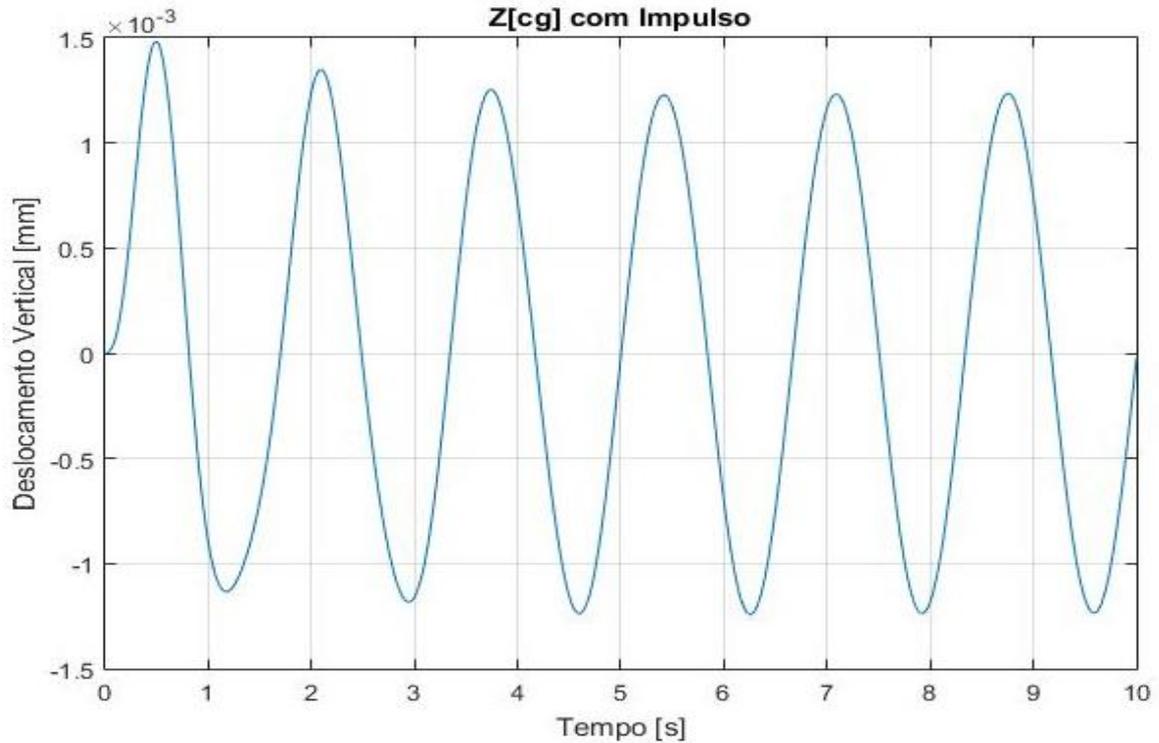
Figura 60 - Modo de vibrar do segundo deslocamento vertical (eixo traseiro) do conjunto de suspensão no modelo off road.



Fonte: Autoria própria.

Na Figura 61, o modo de vibrar predominante é o de *Bounce* com impulso do modelo *off road*, através da análise do gráfico é possível observar que a amplitude máxima (positiva) do movimento é de aproximadamente $1,483e-03$ [mm] no tempo de 0,494 [s]. Em contrapartida, a amplitude máxima (negativa) do movimento é de aproximadamente $1,134e-03$ [mm] no tempo de 1,176 [s].

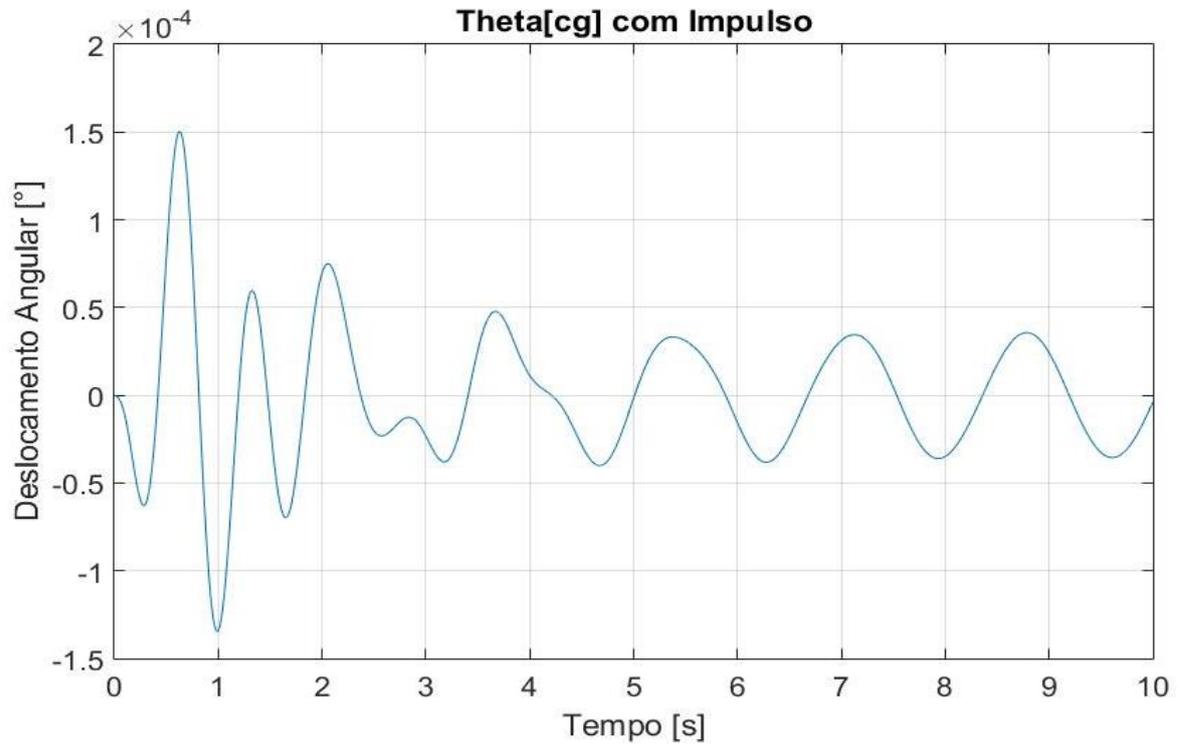
Figura 61 - Modo de vibrar de Bounce com impulso no modelo off road.



Fonte: Autoria própria.

Na Figura 62, o modo de vibrar predominante é o de *Pitch* com impulso do modelo *off road*, através da análise do gráfico é possível observar que a amplitude máxima (positiva) do movimento é de aproximadamente $1,504 \times 10^{-4}$ [°] no tempo de 0,6288 [s]. Em contrapartida, a amplitude máxima (negativa) do movimento é de aproximadamente $1,345 \times 10^{-4}$ [°] no tempo de 0,9912 [s].

Figura 62 - Modo de vibrar de Pitch com impulso no modelo off road.



Fonte: Autoria própria.

Nas Figuras 63 e 64, o modo de vibrar predominante é o de *Bounce* com impulso do eixo dianteiro do conjunto de suspensão do modelo *off road*, através da análise do gráfico é possível observar que a amplitude máxima (positiva) do movimento é de aproximadamente $1,037e-03$ [mm] no tempo de 0,4203 [s]. Em contrapartida, a amplitude máxima (negativa) do movimento é de aproximadamente $1,017e-03$ [mm] no tempo de 1,250 [s].

Figura 63 - Modo de vibrar do primeiro deslocamento vertical (eixo dianteiro) com impulso no modelo off road.



Fonte: Autoria própria.

Figura 64 - Modo de vibrar do primeiro deslocamento vertical (eixo dianteiro) com impulso no modelo off road.



Fonte: Autoria própria.

Nas Figuras 65 e 66, o modo de vibrar predominante é o de *Bounce* com impulso do eixo traseiro do conjunto de suspensão do modelo *off road*, através da análise do gráfico é possível observar que a amplitude máxima (positiva) do movimento é de aproximadamente $1,044 \times 10^{-3}$ [mm] no tempo de 0,4375 [s]. Em contrapartida, a amplitude máxima (negativa) do movimento é de aproximadamente $1,003 \times 10^{-3}$ [mm] no tempo de 1,242 [s].

Figura 65 - Modo de vibrar do segundo deslocamento vertical (eixo traseiro) com impulso no modelo off road.



Fonte: Autoria própria.

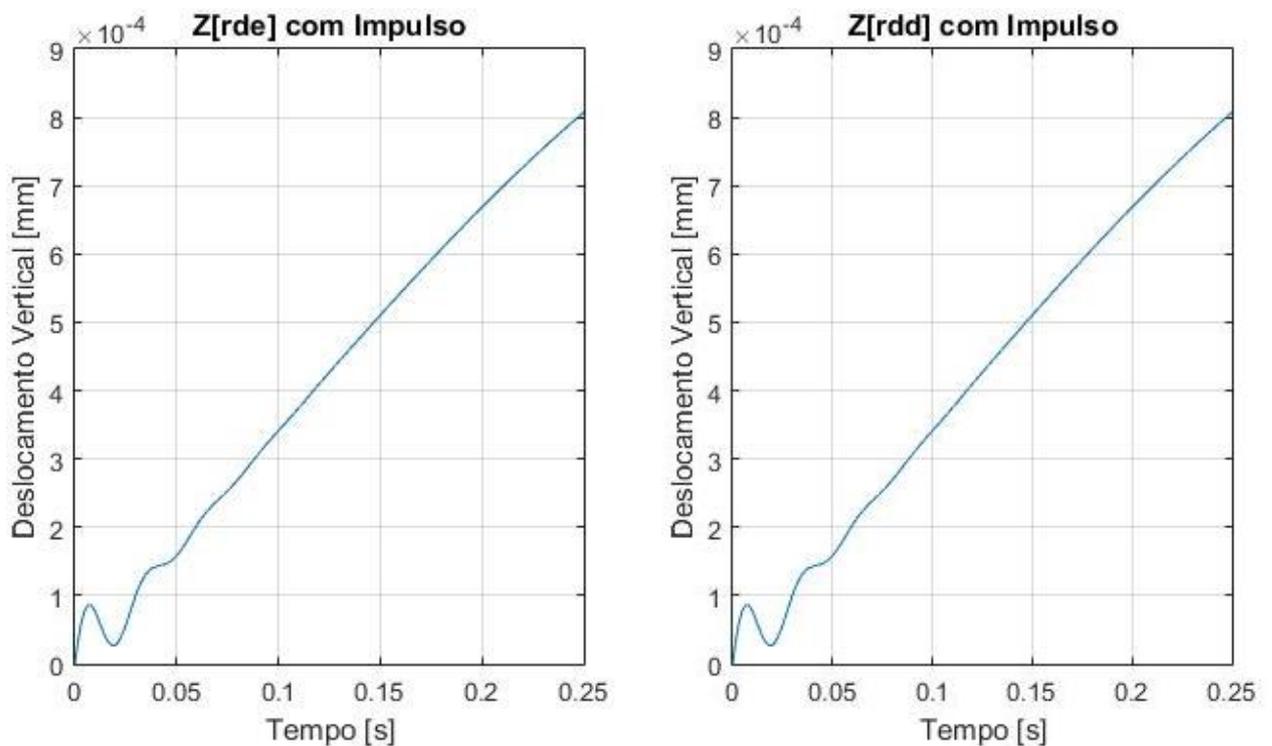
Figura 66 - Modo de vibrar do segundo deslocamento vertical (eixo traseiro) com impulso no modelo off road.



Fonte: Autoria própria.

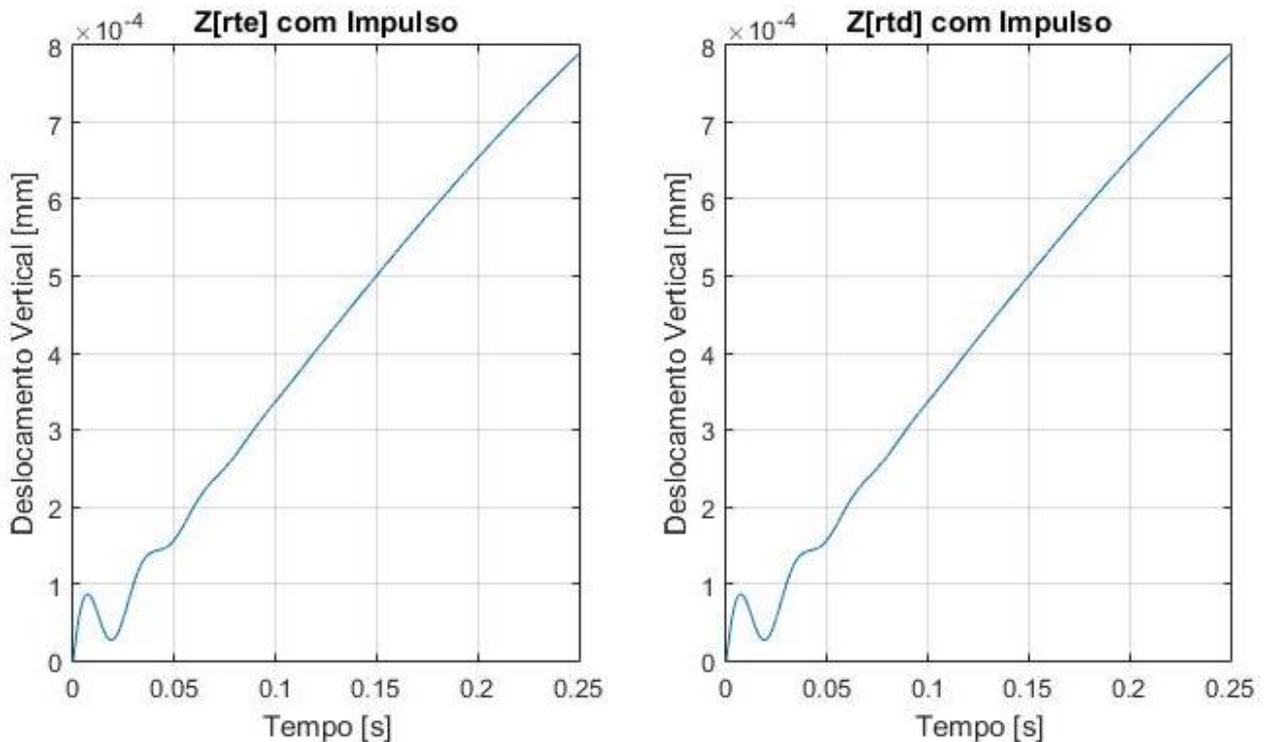
Nas Figuras 67 e 68 também são observadas oscilações características no primeiro harmônico dos respectivos gráficos, em comparação com as Figuras 47, 48, 49 e 50 do modelo passeio, destaca-se a diferença significativa no comportamento do modo de vibrar dos eixos do conjunto de suspensão do modelo *off road*, o que caracteriza a grande capacidade deste sistema em dissipar a energia proveniente do impulso inicial.

Figura 67 - Modo de vibrar do primeiro deslocamento vertical (eixo dianteiro) com impulso no modelo off road.



Fonte: Autoria própria.

Figura 68 - Modo de vibrar do segundo deslocamento vertical (eixo traseiro) com impulso no modelo off road.



Fonte: Autoria própria.

5 CONCLUSÕES

Consoante sob a ideia inicial do presente trabalho, fundamentada no desenvolvimento de um modelo veicular automotor tridimensional com 6 (seis) graus de liberdade e na implementação numérica intrínseca a este modelo, é possível encerrar:

- A configuração e estrutura do modelo levado à prática permitem a avaliação das funções de uma gama de propriedades geométricas, estruturais e de pré-projeto veiculares sob a ótica do fenômeno de interesse. Logo, sob a perspectiva do fenômeno de *ride*, o comportamento dinâmico do modelo pode ser caracterizado de forma coesa e lógica;
- Os graus de liberdade fundamentais empregados para descrever as principais características dinâmicas do modelo e, por sua vez, as hipóteses adotadas no desenvolvimento matemático deste contemplam uma ferramenta de pré-projeto

para estudos futuros no escopo do respectivo trabalho, além de proporcionar um sentimento físico acerca do comportamento dinâmico do objeto em estudo;

- A ferramenta computacional engendrada para a implementação numérica das equações de equilíbrio dinâmico mostrou-se hábil o bastante para descrever e prever a resposta dinâmica do modelo, logo, faz-se possível, em caráter qualitativo e quantitativo, abordar pontos de interesse no âmbito das especificações técnicas do veículo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ABBASI, N. M. 2012. *Using Matlab ode45 to solve differential equations*, 9p.
- [2] BOUAZARA, M., RICHARD, Marc J. 2001. *An optimization method designed to improve 3-D vehicle comfort and road holding capability through the use of active and semi-active suspensions*. European Journal of Mechanics-A/Solids, v.20, n.3.
- [3] BUTKUNAS, A. A. 1966. *Power Spectral Density and Ride Evaluation*. Society of Automotive Engineers, Warrendalle.
- [4] DIXON, J. C. 1996. *Tires, Suspension and Handling*. 2^a ed. Society of Automotive Engineers, Warrendalle, ISBN 1-56091-831-4, 621p.
- [5] GILLESPIE, T. D. 1992. *Fundamentals of Vehicle Dynamics*. Society of Automotive Engineers, Warrendalle, 495p.
- [6] HATCH, M. R. 2001. *Vibration Simulation Using MATLAB AND ANSYS*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton London, New York, Washington, D.C.
- [7] JR., L. M. P. F. 2006. Estudo da dinâmica vertical de uma suspensão veicular do tipo MacPherson. 139 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, São Paulo.
- [8] MARGOLIS, D., SHIM, T. 2001. *A bond graph model incorporating sensors, actuators, and vehicle dynamics for developing controllers for vehicle safety*. Journal of the Franklin Institute, n.338, pág 21–34.
- [9] MÁXIMO, L. F. B. 2002. Estudo do comportamento dinâmico de um veículo de passageiros em manobras de *handling*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Pró Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação, PUC Minas, Belo Horizonte, Minas Gerais.

- [10] MILLIKEN, W. F., MILLIKEN D. L. 1995. *Race Car Vehicle Dynamics*. Society of Automotive Engineers, Warrendale, 890p.
- [11] NETO, A. C. 2005. Dinâmica veicular. Universidade de São Paulo, São Carlos, São Paulo.
- [12] PATRICIO, L. F. S. 2005. Desenvolvimento matemático e implementação numérica de um modelo tridimensional para a determinação das respostas dinâmicas de um veículo automotor. 185 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Pró Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação, PUC Minas, Belo Horizonte, Minas Gerais.
- [13] PAZOOKI, A., RAKHEJA, S., CAO, D. 2011. *Modeling and validation of Off-Road Vehicle Ride Dynamics*. CONCAVE Research Centre, Concordia University, Montreal, Canada. Department of Engineering, Lancaster University, Lancaster, UK, 29p.
- [14] RAO, S. S. 2009. *Vibrações Mecânicas*. Pearson Education, 4ed.
- [15] ROCHA, F. K. 2004. Desenvolvimento de uma metodologia para análise de estrutura veicular. 161 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina.
- [16] SATURNINO, L. J. M. 2004. Desenvolvimento de ferramentas para definição, análise e avaliação de desempenho de veículos automotivos. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Pró Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação, PUC Minas, Belo Horizonte, Minas Gerais.
- [17] SHAMPINE, L. F., REICHEL, M. W. 1997. *The MATLAB ODE Suite*, SIAM Journal on Scientific Computing, v.18.

APÊNDICE A - IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

MODELO VEICULAR TRIDIMENSIONAL CATEGORIA PASSEIO

```
clc
clear all
close all

%% Dados de entrada

C_sde = 200;
C_sdd = 200;
C_ste = 200;
C_std = 200;

K_sde = 15e+03;
K_sdd = 15e+03;
K_ste = 15e+03;
K_std = 15e+03;

K_pde = 150e+03;
K_pdd = 150e+03;
K_pte = 150e+03;
K_ptd = 150e+03;

Ia = 1221.8e-03;
Ib = 1288.6e-03;
Ic = 500e-03;
Id = 500e-03;
Ie = 500e-03;
If = 500e-03;

% Declarando as variáveis Massa [m], Amortecimento [C] e Rigidez [K]

m11 = 1513;
m12 = 0;
m13 = 0;
m14 = 0;
```

```
m15 = 0;  
m16 = 0;
```

```
m21 = 0;  
m22 = 2443.3;  
m23 = 0;  
m24 = 0;  
m25 = 0;  
m26 = 0;
```

```
m31 = 0;  
m32 = 0;  
m33 = 50;  
m34 = 0;  
m35 = 0;  
m36 = 0;
```

```
m41 = 0;  
m42 = 0;  
m43 = 0;  
m44 = 50;  
m45 = 0;  
m46 = 0;
```

```
m51 = 0;  
m52 = 0;  
m53 = 0;  
m54 = 0;  
m55 = 50;  
m56 = 0;
```

```
m61 = 0;  
m62 = 0;  
m63 = 0;  
m64 = 0;  
m65 = 0;  
m66 = 50;
```

```
C11 = C_sde + C_sdd + C_ste + C_std;  
C12 = (-Ia*C_sde)+(-Ia*C_sdd)+(Ib*C_ste)+(Ib*C_std);
```

C13 = -C_sde;

C14 = -C_sdd;

C15 = -C_ste;

C16 = -C_std;

C21 = (-Ia*C_sde)+(-Ia*C_sdd)+(Ib*C_ste)+(Ib*C_std);

C22 = (Ia^2*C_sde)+(Ia^2*C_sdd)+(Ib^2*C_ste)+(Ib^2*C_std);

C23 = Ia*C_sde;

C24 = Ia*C_sde;

C25 = -Ib*C_sde;

C26 = -Ib*C_sde;

C31 = -C_sde;

C32 = Ia*C_sde;

C33 = C_sde;

C34 = 0;

C35 = 0;

C36 = 0;

C41 = -C_sdd;

C42 = Ia*C_sdd;

C43 = 0;

C44 = C_sdd;

C45 = 0;

C46 = 0;

C51 = -C_ste;

C52 = -Ib*C_ste;

C53 = 0;

C54 = 0;

C55 = C_ste;

C56 = 0;

C61 = -C_std;

C62 = -Ib*C_std;

C63 = 0;

C64 = 0;

C65 = 0;

C66 = C_std;

```

K11 = K_sde + K_sdd + K_ste + K_std;
K12 = (-Ia*K_sde)+(-Ia*K_sdd)+(Ib*K_ste)+(Ib*K_std);
K13 = -K_sde;
K14 = -K_sdd;
K15 = -K_ste;
K16 = -K_std;

K21 = (-Ia*K_sde)+(-Ia*K_sdd)+(Ib*K_ste)+(Ib*K_std);
K22 = (Ia^2*K_sde)+(Ia^2*K_sdd)+(Ib^2*K_ste)+(Ib^2*K_std);
K23 = Ia*K_sde;
K24 = Ia*K_sdd;
K25 = -Ib*K_ste;
K26 = -Ib*K_std;

K31 = -K_sde;
K32 = Ia*K_sde;
K33 = K_sde + K_pde;
K34 = 0;
K35 = 0;
K36 = 0;

K41 = -K_sdd;
K42 = Ia*K_sdd;
K43 = 0;
K44 = K_sdd + K_pdd;
K45 = 0;
K46 = 0;

K51 = -K_ste;
K52 = -Ib*K_ste;
K53 = 0;
K54 = 0;
K55 = K_ste + K_pte;
K56 = 0;

K61 = -K_std;
K62 = -Ib*K_std;
K63 = 0;
K64 = 0;
K65 = 0;

```

```
K66 = K_std + K_ptd;
```

```
% Matriz MASSA [M]
```

```
Matriz_M = [m11 m12 m13 m14 m15 m16;m21 m22 m23 m24 m25 m26;m31 m32 m33 m34
m35 m36; ...
            m41 m42 m43 m44 m45 m46;m51 m52 m53 m54 m55 m56;m61 m62 m63 m64
m65 m66]
```

```
% Matriz AMORTECIMENTO [C]
```

```
Matriz_C = [C11 C12 C13 C14 C15 C16;C21 C22 C23 C24 C25 C26;C31 C32 C33 C34
C35 C36; ...
            C41 C42 C43 C44 C45 C46;C51 C52 C53 C54 C55 C56;C61 C62 C63 C64
C65 C66]
```

```
% Matriz RIGIDEZ [K]
```

```
Matriz_K = [K11 K12 K13 K14 K15 K16;K21 K22 K23 K24 K25 K26;K31 K32 K33 K34
K35 K36; ...
            K41 K42 K43 K44 K45 K46;K51 K52 K53 K54 K55 K56;K61 K62 K63 K64
K65 K66]
```

```
% Calculando os Autovalores e Autovetores para a Matriz [B]
```

```
% Desprezando a Matriz AMORTECIMENTO [C]
```

```
Matriz_B = inv(Matriz_M)*Matriz_K
```

```
[Autovet_B,Autoval_B] = eig(Matriz_B)
```

```
Wn_B = sqrt(Autoval_B) % Frequência Natural em [rad/s]
```

```
Fn_B = Wn_B/(2*pi) % Frequência Natural em [Hz]
```

```
W1 = Wn_B(1,1) % Primeira Frequência Natural em [rad/s]
```

```
W2 = Wn_B(2,2) % Segunda Frequência Natural em [rad/s]
```

```
W3 = Wn_B(3,3) % Terceira Frequência Natural em [rad/s]
```

```

W4 = Wn_B(4,4)           % Quarta Frequência Natural em [rad/s]
W5 = Wn_B(5,5)           % Quinta Frequência Natural em [rad/s]
W6 = Wn_B(6,6)           % Sexta Frequência Natural em [rad/s]

% Calculando os Autovalores e Autovetores para a Matriz-Estado [A]
% Considerando a Matriz AMORTECIMENTO [C]

Matriz_A = [zeros(6) eye(6); -inv(Matriz_M)*Matriz_K -
inv(Matriz_M)*Matriz_C]

e = eig(Matriz_A)

Fn_A = imag(e)/(2*pi)    % Frequência Natural em [Hz]

Wn_A = diag(imag(e))     % Frequência Natural em [rad/s]

W7 = Wn_A(1,1)           % Primeira Frequência Natural em [rad/s]
W8 = Wn_A(3,3)           % Segunda Frequência Natural em [rad/s]
W9 = Wn_A(5,5)           % Terceira Frequência Natural em [rad/s]
W10 = Wn_A(7,7)          % Quarta Frequência Natural em [rad/s]
W11 = Wn_A(9,9)          % Quinta Frequência Natural em [rad/s]
W12 = Wn_A(11,11)        % Sexta Frequência Natural em [rad/s]

```

RESPOSTA DINÂMICA DO MODELO VEICULAR AUTOMOTOR

```

function f = ode23function(t,y)

M = [1513 0 0 0 0 0 0;0 2443.30 0 0 0 0 0;0 0 50 0 0 0 0;0 0 0 50 0 0 0;0 0 0 0 50
0;0 0 0 0 0 50];

C = [800 26.70 -200 -200 -200 -200;26.70 1261.30 244.40 244.40 -257.70 -
257.70;-200 244.40 200 0 0 0; ...
-200 244.40 0 200 0 0;-200 -257.70 0 0 200 0;-200 -257.70 0 0 0
200];

K = [60000 2000 -15000 -15000 -15000 -15000;2000 94600 18300 18300 -19300 -
19300;-15000 18300 165000 0 0 0; ...
-15000 18300 0 165000 0 0;-15000 -19300 0 0 165000 0;-15000 -
19300 0 0 0 165000];

K_pneu = 150e+03; % Rigidez dos pneus [N/m]
A = 1e-03; % Amplitude de excitação da pista [m]
w = 2*pi*0.6; % Frequência de excitação da velocidade de marcha
[rad/s]

f = zeros(12,1);

f(1) = y(2);
f(2) = (- C(1,1)*y(2) - C(1,2)*y(4) - C(1,3)*y(6) - C(1,4)*y(8) -
C(1,5)*y(10) - C(1,6)*y(12) - K(1,1)*y(1) - K(1,2)*y(3) - K(1,3)*y(5) -
K(1,4)*y(7) - K(1,5)*y(9) - K(1,6)*y(11))/M(1,1);

f(3) = y(4);
f(4) = (- C(2,1)*y(2) - C(2,2)*y(4) - C(2,3)*y(6) - C(2,4)*y(8) -
C(2,5)*y(10) - C(2,6)*y(12) - K(2,1)*y(1) - K(2,2)*y(3) - K(2,3)*y(5) -
K(2,4)*y(7) - K(2,5)*y(9) - K(2,6)*y(11))/M(2,2);

f(5) = y(6);
f(6) = (K_pneu*A*sin(w*t) - C(3,1)*y(2) - C(3,2)*y(4) - C(3,3)*y(6) -
C(3,4)*y(8) - C(3,5)*y(10) - C(3,6)*y(12) - K(3,1)*y(1) - K(3,2)*y(3) -
K(3,3)*y(5) - K(3,4)*y(7) - K(3,5)*y(9) - K(3,6)*y(11))/M(3,3);

```

```

f(7) = y(8);
f(8) = (K_pneu*A*sin(w*t) - C(4,1)*y(2) - C(4,2)*y(4) - C(4,3)*y(6) -
C(4,4)*y(8) - C(4,5)*y(10) - C(4,6)*y(12) - K(4,1)*y(1) - K(4,2)*y(3) -
K(4,3)*y(5) - K(4,4)*y(7) - K(4,5)*y(9) - K(4,6)*y(11))/M(4,4);

f(9) = y(10);
f(10) = (K_pneu*A*sin(w*t) - C(5,1)*y(2) - C(5,2)*y(4) - C(5,3)*y(6) -
C(5,4)*y(8) - C(5,5)*y(10) - C(5,6)*y(12) - K(5,1)*y(1) - K(5,2)*y(3) -
K(5,3)*y(5) - K(5,4)*y(7) - K(5,5)*y(9) - K(5,6)*y(11))/M(5,5);

f(11) = y(12);
f(12) = (K_pneu*A*sin(w*t) - C(6,1)*y(2) - C(6,2)*y(4) - C(6,3)*y(6) -
C(6,4)*y(8) - C(6,5)*y(10) - C(6,6)*y(12) - K(6,1)*y(1) - K(6,2)*y(3) -
K(6,3)*y(5) - K(6,4)*y(7) - K(6,5)*y(9) - K(6,6)*y(11))/M(6,6);

end

clc
clear all
close all

%% FUNÇÃO ODE23

M = [1513 0 0 0 0 0;0 2443.30 0 0 0 0;0 0 50 0 0 0;0 0 0 50 0 0;0 0 0 0 50
0;0 0 0 0 0 50];

C = [800 26.70 -200 -200 -200 -200;26.70 1261.30 244.40 244.40 -257.70 -
257.70;-200 244.40 200 0 0 0; ...
-200 244.40 0 200 0 0;-200 -257.70 0 0 200 0;-200 -257.70 0 0 0 200];

K = [60000 2000 -15000 -15000 -15000 -15000;2000 94600 18300 18300 -19300 -
19300;-15000 18300 165000 0 0 0; ...
-15000 18300 0 165000 0 0;-15000 -19300 0 0 165000 0;-15000 -19300 0 0
0 165000];

K_pneu = 150e+03; % Rigidez dos pneus [N/m]
A = 1e-03; % Amplitude de excitação da pista
[m]

```

```

w = 2*pi*0.6; % Frequência de excitação da
velocidade de marcha [rad/s]

tspan = [0:0.001:30]; % Intervalo de integração para [t]
y0 = [0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0]; % Condição inicial

[t,y] = ode23('ode23function', tspan, y0);

figure(611)
plot(t,y(:,1));
title('Z[cg] com ODE23');
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('Deslocamento Vertical [mm]');

figure(612)
plot(t,y(:,3));
title('Theta[cg] com ODE23');
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('Deslocamento Vertical [mm]');

figure(613)
plot(t,y(:,5));
title('Z[rde] com ODE23');
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('Deslocamento Vertical [mm]');

figure(614)
plot(t,y(:,7));
title('Z[rdd] com ODE23');
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('Deslocamento Vertical [mm]');

figure(615)
plot(t,y(:,9));
title('Z[rte] com ODE23');
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('Deslocamento Vertical [mm]');

figure(616)

```

```
plot(t,y(:,11));  
title('Z[rtcd] com ODE23');  
xlabel('Tempo [s]');  
ylabel('Deslocamento Vertical [mm]');
```

RESPOSTA DINÂMICA DO MODELO VEICULAR AUTOMOTOR - IMPULSO

```

function f = ode23function_impulso_novak(t,y)

M = [1513 0 0 0 0 0 0;0 2443.30 0 0 0 0 0;0 0 50 0 0 0 0;0 0 0 50 0 0 0;0 0 0 0 50 0 0 50
0;0 0 0 0 0 50];

C = [800 26.70 -200 -200 -200 -200;26.70 1261.30 244.40 244.40 -257.70 -
257.70;-200 244.40 200 0 0 0; ...
-200 244.40 0 200 0 0;-200 -257.70 0 0 200 0;-200 -257.70 0 0 0
200];

K = [60000 2000 -15000 -15000 -15000 -15000;2000 94600 18300 18300 -19300 -
19300;-15000 18300 165000 0 0 0; ...
-15000 18300 0 165000 0 0;-15000 -19300 0 0 165000 0;-15000 -
19300 0 0 0 165000];

K_pneu = 150e+03; % Rigidez dos pneus [N/m]
A = 1e-03; % Amplitude de excitação da pista [m]
w = 2*pi*0.6; % Frequência de excitação da velocidade de marcha
[rad/s]

f = zeros(12,1);

f(1) = y(2);
f(2) = (- C(1,1)*y(2) - C(1,2)*y(4) - C(1,3)*y(6) - C(1,4)*y(8) -
C(1,5)*y(10) - C(1,6)*y(12) - K(1,1)*y(1) - K(1,2)*y(3) - K(1,3)*y(5) -
K(1,4)*y(7) - K(1,5)*y(9) - K(1,6)*y(11))/M(1,1);

f(3) = y(4);
f(4) = (- C(2,1)*y(2) - C(2,2)*y(4) - C(2,3)*y(6) - C(2,4)*y(8) -
C(2,5)*y(10) - C(2,6)*y(12) - K(2,1)*y(1) - K(2,2)*y(3) - K(2,3)*y(5) -
K(2,4)*y(7) - K(2,5)*y(9) - K(2,6)*y(11))/M(2,2);

f(5) = y(6);
f(6) = (K_pneu*A*sin(w*t) - C(3,1)*y(2) - C(3,2)*y(4) - C(3,3)*y(6) -
C(3,4)*y(8) - C(3,5)*y(10) - C(3,6)*y(12) - K(3,1)*y(1) - K(3,2)*y(3) -
K(3,3)*y(5) - K(3,4)*y(7) - K(3,5)*y(9) - K(3,6)*y(11))/M(3,3);

```

```

f(7) = y(8);
f(8) = (K_pneu*A*sin(w*t) - C(4,1)*y(2) - C(4,2)*y(4) - C(4,3)*y(6) -
C(4,4)*y(8) - C(4,5)*y(10) - C(4,6)*y(12) - K(4,1)*y(1) - K(4,2)*y(3) -
K(4,3)*y(5) - K(4,4)*y(7) - K(4,5)*y(9) - K(4,6)*y(11))/M(4,4);

f(9) = y(10);
f(10) = (K_pneu*A*sin(w*t) - C(5,1)*y(2) - C(5,2)*y(4) - C(5,3)*y(6) -
C(5,4)*y(8) - C(5,5)*y(10) - C(5,6)*y(12) - K(5,1)*y(1) - K(5,2)*y(3) -
K(5,3)*y(5) - K(5,4)*y(7) - K(5,5)*y(9) - K(5,6)*y(11))/M(5,5);

f(11) = y(12);
f(12) = (K_pneu*A*sin(w*t) - C(6,1)*y(2) - C(6,2)*y(4) - C(6,3)*y(6) -
C(6,4)*y(8) - C(6,5)*y(10) - C(6,6)*y(12) - K(6,1)*y(1) - K(6,2)*y(3) -
K(6,3)*y(5) - K(6,4)*y(7) - K(6,5)*y(9) - K(6,6)*y(11))/M(6,6);

end

clc
clear all
close all

%% FUNÇÃO ODE23

M = [1513 0 0 0 0 0;0 2443.30 0 0 0 0;0 0 50 0 0 0;0 0 0 50 0 0;0 0 0 0 50
0;0 0 0 0 0 50];

C = [800 26.70 -200 -200 -200 -200;26.70 1261.30 244.40 244.40 -257.70 -
257.70;-200 244.40 200 0 0 0; ...
-200 244.40 0 200 0 0;-200 -257.70 0 0 200 0;-200 -257.70 0 0 0 200];

K = [60000 2000 -15000 -15000 -15000 -15000;2000 94600 18300 18300 -19300 -
19300;-15000 18300 165000 0 0 0; ...
-15000 18300 0 165000 0 0;-15000 -19300 0 0 165000 0;-15000 -19300 0 0
0 165000];

K_pneu = 150e+03; % Rigidez dos pneus [N/m]
A = 1e-03; % Amplitude de excitação da pista [m]
w = 2*pi*0.6; % Frequência de excitação da velocidade de marcha
[rad/s]

```

```

tspan = [0:0.0025:20]; % Intervalo
de integração para [t]
y0 = [0;0;0;0;0;0;1/M(3,3);0;1/M(4,4);0;1/M(5,5);0;1/M(6,6)]; % Condição
inicial

[t,y] = ode23('ode23function_impulso_novak', tspan, y0);

figure(611)
plot(t,y(:,1));
title('Z[cg] com Impulso');
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('Deslocamento Vertical [mm]');

figure(612)
plot(t,y(:,3));
title('Theta[cg] com Impulso');
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('Deslocamento Vertical [mm]');

figure(613)
plot(t,y(:,5));
title('Z[rde] com Impulso');
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('Deslocamento Vertical [mm]');

figure(614)
plot(t,y(:,7));
title('Z[rdd] com Impulso');
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('Deslocamento Vertical [mm]');

figure(615)
plot(t,y(:,9));
title('Z[rte] com Impulso');
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('Deslocamento Vertical [mm]');

figure(616)

```

```
plot(t,y(:,11));  
title('Z[rtd] com Impulso');  
xlabel('Tempo [s]');  
ylabel('Deslocamento Vertical [mm]');
```

MODELO VEICULAR TRIDIMENSIONAL CATEGORIA *OFF ROAD*

```
clc
clear all
close all

%% Dados de entrada

C_sde = 4000;
C_sdd = 4000;
C_ste = 4000;
C_std = 4000;

K_sde = 185e+03;
K_sdd = 185e+03;
K_ste = 185e+03;
K_std = 185e+03;

K_pde = 1850e+03;
K_pdd = 1850e+03;
K_pte = 1850e+03;
K_ptd = 1850e+03;

Ia = 1900e-03;
Ib = 1230e-03;
Ic = 1250e-03;
Id = 1250e-03;
Ie = 1250e-03;
If = 1250e-03;

% Declarando as variáveis Massa [m], Amortecimento [C] e Rigidez [K]

m11 = 8616;
m12 = 0;
m13 = 0;
m14 = 0;
m15 = 0;
m16 = 0;
```

```
m21 = 0;  
m22 = 16353;  
m23 = 0;  
m24 = 0;  
m25 = 0;  
m26 = 0;
```

```
m31 = 0;  
m32 = 0;  
m33 = 42.6;  
m34 = 0;  
m35 = 0;  
m36 = 0;
```

```
m41 = 0;  
m42 = 0;  
m43 = 0;  
m44 = 42.6;  
m45 = 0;  
m46 = 0;
```

```
m51 = 0;  
m52 = 0;  
m53 = 0;  
m54 = 0;  
m55 = 42.6;  
m56 = 0;
```

```
m61 = 0;  
m62 = 0;  
m63 = 0;  
m64 = 0;  
m65 = 0;  
m66 = 42.6;
```

```
C11 = C_sde + C_sdd + C_ste + C_std;  
C12 = (-Ia*C_sde)+(-Ia*C_sdd)+(Ib*C_ste)+(Ib*C_std);  
C13 = -C_sde;  
C14 = -C_sdd;  
C15 = -C_ste;
```

$$C16 = -C_std;$$

$$C21 = (-Ia*C_sde) + (-Ia*C_sdd) + (Ib*C_ste) + (Ib*C_std);$$

$$C22 = (Ia^2*C_sde) + (Ia^2*C_sdd) + (Ib^2*C_ste) + (Ib^2*C_std);$$

$$C23 = Ia*C_sde;$$

$$C24 = Ia*C_sde;$$

$$C25 = -Ib*C_sde;$$

$$C26 = -Ib*C_sde;$$

$$C31 = -C_sde;$$

$$C32 = Ia*C_sde;$$

$$C33 = C_sde;$$

$$C34 = 0;$$

$$C35 = 0;$$

$$C36 = 0;$$

$$C41 = -C_sdd;$$

$$C42 = Ia*C_sdd;$$

$$C43 = 0;$$

$$C44 = C_sdd;$$

$$C45 = 0;$$

$$C46 = 0;$$

$$C51 = -C_ste;$$

$$C52 = -Ib*C_ste;$$

$$C53 = 0;$$

$$C54 = 0;$$

$$C55 = C_ste;$$

$$C56 = 0;$$

$$C61 = -C_std;$$

$$C62 = -Ib*C_std;$$

$$C63 = 0;$$

$$C64 = 0;$$

$$C65 = 0;$$

$$C66 = C_std;$$

$$K11 = K_sde + K_sdd + K_ste + K_std;$$

$$K12 = (-Ia*K_sde) + (-Ia*K_sdd) + (Ib*K_ste) + (Ib*K_std);$$

$$K13 = -K_sde;$$

K14 = -K_sdd;

K15 = -K_ste;

K16 = -K_std;

K21 = (-Ia*K_sde)+(-Ia*K_sdd)+(Ib*K_ste)+(Ib*K_std);

K22 = (Ia^2*K_sde)+(Ia^2*K_sdd)+(Ib^2*K_ste)+(Ib^2*K_std);

K23 = Ia*K_sde;

K24 = Ia*K_sdd;

K25 = -Ib*K_ste;

K26 = -Ib*K_std;

K31 = -K_sde;

K32 = Ia*K_sde;

K33 = K_sde + K_pde;

K34 = 0;

K35 = 0;

K36 = 0;

K41 = -K_sdd;

K42 = Ia*K_sdd;

K43 = 0;

K44 = K_sdd + K_pdd;

K45 = 0;

K46 = 0;

K51 = -K_ste;

K52 = -Ib*K_ste;

K53 = 0;

K54 = 0;

K55 = K_ste + K_pte;

K56 = 0;

K61 = -K_std;

K62 = -Ib*K_std;

K63 = 0;

K64 = 0;

K65 = 0;

K66 = K_std + K_ptd;

% Matriz MASSA [M]

```

Matriz_M = [m11 m12 m13 m14 m15 m16;m21 m22 m23 m24 m25 m26;m31 m32 m33 m34
m35 m36; ...
           m41 m42 m43 m44 m45 m46;m51 m52 m53 m54 m55 m56;m61 m62 m63 m64
m65 m66]

```

```

% Matriz AMORTECIMENTO [C]

```

```

Matriz_C = [C11 C12 C13 C14 C15 C16;C21 C22 C23 C24 C25 C26;C31 C32 C33 C34
C35 C36; ...
           C41 C42 C43 C44 C45 C46;C51 C52 C53 C54 C55 C56;C61 C62 C63 C64
C65 C66]

```

```

% Matriz RIGIDEZ [K]

```

```

Matriz_K = [K11 K12 K13 K14 K15 K16;K21 K22 K23 K24 K25 K26;K31 K32 K33 K34
K35 K36; ...
           K41 K42 K43 K44 K45 K46;K51 K52 K53 K54 K55 K56;K61 K62 K63 K64
K65 K66]

```

```

% Calculando os Autovalores e Autovetores para a Matriz [B]

```

```

% Desprezando a Matriz AMORTECIMENTO [C]

```

```

Matriz_B = inv(Matriz_M)*Matriz_K

```

```

[Autovet_B,Autoval_B] = eig(Matriz_B)

```

```

Wn_B = sqrt(Autoval_B) % Frequência Natural em [rad/s]

```

```

Fn_B = Wn_B/(2*pi) % Frequência Natural em [Hz]

```

```

W1 = Wn_B(1,1) % Primeira Frequência Natural em [rad/s]

```

```

W2 = Wn_B(2,2) % Segunda Frequência Natural em [rad/s]

```

```

W3 = Wn_B(3,3) % Terceira Frequência Natural em [rad/s]

```

```

W4 = Wn_B(4,4) % Quarta Frequência Natural em [rad/s]

```

```

W5 = Wn_B(5,5) % Quinta Frequência Natural em [rad/s]

```

```

W6 = Wn_B(6,6) % Sexta Frequência Natural em [rad/s]

```

```
% Calculando os Autovalores e Autovetores para a Matriz-Estado [A]
% Considerando a Matriz AMORTECIMENTO [C]

Matriz_A = [zeros(6) eye(6); -inv(Matriz_M)*Matriz_K -
inv(Matriz_M)*Matriz_C]

e = eig(Matriz_A)

Fn_A = imag(e)/(2*pi) % Frequência Natural em [Hz]

Wn_A = diag(imag(e)) % Frequência Natural em [rad/s]

W7 = Wn_A(1,1) % Primeira Frequência Natural em [rad/s]
W8 = Wn_A(3,3) % Segunda Frequência Natural em [rad/s]
W9 = Wn_A(5,5) % Terceira Frequência Natural em [rad/s]
W10 = Wn_A(7,7) % Quarta Frequência Natural em [rad/s]
W11 = Wn_A(9,9) % Quinta Frequência Natural em [rad/s]
W12 = Wn_A(11,11) % Sexta Frequência Natural em [rad/s]
```

RESPOSTA DINÂMICA DO MODELO VEICULAR AUTOMOTOR

```

function f = ode23function_OFF(t,y)

M = [8616 0 0 0 0 0;0 16353 0 0 0 0;0 0 42.60000000000000 0 0 0; ...
      0 0 0 42.60000000000000 0 0;0 0 0 0 42.60000000000000 0;0 0 0 0 0
      42.60000000000000];

C = [16000 -5360 -4000 -4000 -4000 -4000;-5360 40983.20000000000 7600 7600 -
      4920 -4920;-4000 7600 4000 0 0 0; ...
      -4000 7600 0 4000 0 0;-4000 -4920 0 0 4000 0;-4000 -4920 0 0 0 4000];

K = [740000 -247900 -185000 -185000 -185000 -185000;-247900 1895473 351500
      351500 -227550 -227550; ...
      -185000 351500 2035000 0 0 0;-185000 351500 0 2035000 0 0; ...
      -185000 -227550 0 0 2035000 0;-185000 -227550 0 0 0 2035000];

K_pneu = 1850e+03;      % Rigidez dos pneus [N/m]
A = 1e-03;              % Amplitude de excitação da pista [m]
w = 2*pi*0.6;          % Frequência de excitação da velocidade de marcha
                        [rad/s]

f = zeros(12,1);

f(1) = y(2);
f(2) = (- C(1,1)*y(2) - C(1,2)*y(4) - C(1,3)*y(6) - C(1,4)*y(8) -
C(1,5)*y(10) - C(1,6)*y(12) - K(1,1)*y(1) - K(1,2)*y(3) - K(1,3)*y(5) -
K(1,4)*y(7) - K(1,5)*y(9) - K(1,6)*y(11))/M(1,1);

f(3) = y(4);
f(4) = (- C(2,1)*y(2) - C(2,2)*y(4) - C(2,3)*y(6) - C(2,4)*y(8) -
C(2,5)*y(10) - C(2,6)*y(12) - K(2,1)*y(1) - K(2,2)*y(3) - K(2,3)*y(5) -
K(2,4)*y(7) - K(2,5)*y(9) - K(2,6)*y(11))/M(2,2);

f(5) = y(6);
f(6) = (K_pneu*A*sin(w*t) - C(3,1)*y(2) - C(3,2)*y(4) - C(3,3)*y(6) -
C(3,4)*y(8) - C(3,5)*y(10) - C(3,6)*y(12) - K(3,1)*y(1) - K(3,2)*y(3) -
K(3,3)*y(5) - K(3,4)*y(7) - K(3,5)*y(9) - K(3,6)*y(11))/M(3,3);

```

```

f(7) = y(8);
f(8) = (K_pneu*A*sin(w*t) - C(4,1)*y(2) - C(4,2)*y(4) - C(4,3)*y(6) -
C(4,4)*y(8) - C(4,5)*y(10) - C(4,6)*y(12) - K(4,1)*y(1) - K(4,2)*y(3) -
K(4,3)*y(5) - K(4,4)*y(7) - K(4,5)*y(9) - K(4,6)*y(11))/M(4,4);

f(9) = y(10);
f(10) = (K_pneu*A*sin(w*t) - C(5,1)*y(2) - C(5,2)*y(4) - C(5,3)*y(6) -
C(5,4)*y(8) - C(5,5)*y(10) - C(5,6)*y(12) - K(5,1)*y(1) - K(5,2)*y(3) -
K(5,3)*y(5) - K(5,4)*y(7) - K(5,5)*y(9) - K(5,6)*y(11))/M(5,5);

f(11) = y(12);
f(12) = (K_pneu*A*sin(w*t) - C(6,1)*y(2) - C(6,2)*y(4) - C(6,3)*y(6) -
C(6,4)*y(8) - C(6,5)*y(10) - C(6,6)*y(12) - K(6,1)*y(1) - K(6,2)*y(3) -
K(6,3)*y(5) - K(6,4)*y(7) - K(6,5)*y(9) - K(6,6)*y(11))/M(6,6);

end

clc
clear all
close all

%% FUNÇÃO ODE23

M = [8616 0 0 0 0 0;0 16353 0 0 0 0;0 0 42.60000000000000 0 0 0; ...
      0 0 0 42.60000000000000 0 0;0 0 0 0 42.60000000000000 0;0 0 0 0 0
42.60000000000000];

C = [16000 -5360 -4000 -4000 -4000 -4000;-5360 40983.20000000000 7600 7600 -
4920 -4920;-4000 7600 4000 0 0 0; ...
      -4000 7600 0 4000 0 0;-4000 -4920 0 0 4000 0;-4000 -4920 0 0 0 4000];

K = [740000 -247900 -185000 -185000 -185000 -185000;-247900 1895473 351500
351500 -227550 -227550; ...
      -185000 351500 2035000 0 0 0;-185000 351500 0 2035000 0 0; ...
      -185000 -227550 0 0 2035000 0;-185000 -227550 0 0 0 2035000];

K_pneu = 1850e+03; % Rigidez dos pneus [N/m]
A = 1e-03; % Amplitude de excitação da pista
[m]

```

```

w = 2*pi*0.6; % Frequência de excitação da
velocidade de marcha [rad/s]

tspan = [0:0.0001:15]; % Intervalo de integração para [t]
y0 = [0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0]; % Condição inicial

[t,y] = ode23('ode23function_OFF', tspan, y0);

figure(611)
plot(t,y(:,1));
title('Z[cg] com ODE23');
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('Deslocamento Vertical [mm]');

figure(612)
plot(t,y(:,3));
title('Theta[cg] com ODE23');
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('Deslocamento Vertical [mm]');

figure(613)
plot(t,y(:,5));
title('Z[rde] com ODE23');
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('Deslocamento Vertical [mm]');

figure(614)
plot(t,y(:,7));
title('Z[rdd] com ODE23');
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('Deslocamento Vertical [mm]');

figure(615)
plot(t,y(:,9));
title('Z[rte] com ODE23');
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('Deslocamento Vertical [mm]');

figure(616)

```

```
plot(t,y(:,11));  
title('Z[rtcd] com ODE23');  
xlabel('Tempo [s]');  
ylabel('Deslocamento Vertical [mm]');
```

RESPOSTA DINÂMICA DO MODELO VEICULAR AUTOMOTOR - IMPULSO

```

function f = ode23function_impulso_novak_OFF(t,y)

M = [8616 0 0 0 0 0;0 16353 0 0 0 0;0 0 42.60000000000000 0 0 0; ...
      0 0 0 42.60000000000000 0 0;0 0 0 0 42.60000000000000 0;0 0 0 0 0
      42.60000000000000];

C = [16000 -5360 -4000 -4000 -4000 -4000;-5360 40983.2000000000 7600 7600 -
      4920 -4920;-4000 7600 4000 0 0 0; ...
      -4000 7600 0 4000 0 0;-4000 -4920 0 0 4000 0;-4000 -4920 0 0 0 4000];

K = [740000 -247900 -185000 -185000 -185000 -185000;-247900 1895473 351500
      351500 -227550 -227550; ...
      -185000 351500 2035000 0 0 0;-185000 351500 0 2035000 0 0; ...
      -185000 -227550 0 0 2035000 0;-185000 -227550 0 0 0 2035000];

K_pneu = 1850e+03;      % Rigidez dos pneus [N/m]
A = 1e-03;             % Amplitude de excitação da pista [m]
w = 2*pi*0.6;         % Frequência de excitação da velocidade de marcha
                        [rad/s]

f = zeros(12,1);

f(1) = y(2);
f(2) = (- C(1,1)*y(2) - C(1,2)*y(4) - C(1,3)*y(6) - C(1,4)*y(8) -
C(1,5)*y(10) - C(1,6)*y(12) - K(1,1)*y(1) - K(1,2)*y(3) - K(1,3)*y(5) -
K(1,4)*y(7) - K(1,5)*y(9) - K(1,6)*y(11))/M(1,1);

f(3) = y(4);
f(4) = (- C(2,1)*y(2) - C(2,2)*y(4) - C(2,3)*y(6) - C(2,4)*y(8) -
C(2,5)*y(10) - C(2,6)*y(12) - K(2,1)*y(1) - K(2,2)*y(3) - K(2,3)*y(5) -
K(2,4)*y(7) - K(2,5)*y(9) - K(2,6)*y(11))/M(2,2);

f(5) = y(6);
f(6) = (K_pneu*A*sin(w*t) - C(3,1)*y(2) - C(3,2)*y(4) - C(3,3)*y(6) -
C(3,4)*y(8) - C(3,5)*y(10) - C(3,6)*y(12) - K(3,1)*y(1) - K(3,2)*y(3) -
K(3,3)*y(5) - K(3,4)*y(7) - K(3,5)*y(9) - K(3,6)*y(11))/M(3,3);

```

```

f(7) = y(8);
f(8) = (K_pneu*A*sin(w*t) - C(4,1)*y(2) - C(4,2)*y(4) - C(4,3)*y(6) -
C(4,4)*y(8) - C(4,5)*y(10) - C(4,6)*y(12) - K(4,1)*y(1) - K(4,2)*y(3) -
K(4,3)*y(5) - K(4,4)*y(7) - K(4,5)*y(9) - K(4,6)*y(11))/M(4,4);

f(9) = y(10);
f(10) = (K_pneu*A*sin(w*t) - C(5,1)*y(2) - C(5,2)*y(4) - C(5,3)*y(6) -
C(5,4)*y(8) - C(5,5)*y(10) - C(5,6)*y(12) - K(5,1)*y(1) - K(5,2)*y(3) -
K(5,3)*y(5) - K(5,4)*y(7) - K(5,5)*y(9) - K(5,6)*y(11))/M(5,5);

f(11) = y(12);
f(12) = (K_pneu*A*sin(w*t) - C(6,1)*y(2) - C(6,2)*y(4) - C(6,3)*y(6) -
C(6,4)*y(8) - C(6,5)*y(10) - C(6,6)*y(12) - K(6,1)*y(1) - K(6,2)*y(3) -
K(6,3)*y(5) - K(6,4)*y(7) - K(6,5)*y(9) - K(6,6)*y(11))/M(6,6);

end

clc
clear all
close all

%% FUNÇÃO ODE23

M = [8616 0 0 0 0 0;0 16353 0 0 0 0;0 0 42.6000000000000 0 0 0; ...
      0 0 0 42.6000000000000 0 0;0 0 0 0 42.6000000000000 0;0 0 0 0 0
42.6000000000000];

C = [16000 -5360 -4000 -4000 -4000 -4000;-5360 40983.2000000000 7600 7600 -
4920 -4920;-4000 7600 4000 0 0 0; ...
      -4000 7600 0 4000 0 0;-4000 -4920 0 0 4000 0;-4000 -4920 0 0 0 4000];

K = [740000 -247900 -185000 -185000 -185000 -185000;-247900 1895473 351500
351500 -227550 -227550; ...
      -185000 351500 2035000 0 0 0;-185000 351500 0 2035000 0 0; ...
      -185000 -227550 0 0 2035000 0;-185000 -227550 0 0 0 2035000];

K_pneu = 1850e+03;      % Rigidez dos pneus [N/m]
A = 1e-03;             % Amplitude de excitação da pista [m]

```

```

w = 2*pi*0.6;           % Frequência de excitação da velocidade de marcha
[rad/s]

tspan = [0:0.00001:0.25];           % Intervalo
de integração para [t]
y0 = [0;0;0;0;0;0;1/M(3,3);0;1/M(4,4);0;1/M(5,5);0;1/M(6,6)]; % Condição
inicial

[t,y] = ode23('ode23function_impulso_novak_OFF', tspan, y0);

figure(611)
plot(t,y(:,1));
title('Z[cg] com Impulso');
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('Deslocamento Vertical [mm]');

figure(612)
plot(t,y(:,3));
title('Theta[cg] com Impulso');
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('Deslocamento Vertical [mm]');

figure(613)
plot(t,y(:,5));
title('Z[rde] com Impulso');
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('Deslocamento Vertical [mm]');

figure(614)
plot(t,y(:,7));
title('Z[rdd] com Impulso');
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('Deslocamento Vertical [mm]');

figure(615)
plot(t,y(:,9));
title('Z[rte] com Impulso');
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('Deslocamento Vertical [mm]');

```

```
figure(616)
plot(t,y(:,11));
title('Z[rtd] com Impulso');
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('Deslocamento Vertical [mm]');
```