

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE ENGENHARIA MECÂNICA
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

NAYANE LAIS SCHRAN GARBIN

**ESTUDO DE TÉCNICAS PARA A DETERMINAÇÃO DA
MATRIZ DE AMORTECIMENTO EM SISTEMAS ESTRUTURAIS**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

PATO BRANCO

2015

NAYANE LAIS SCHRAN GARBIN

ESTUDO DE TÉCNICAS PARA A DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE AMORTECIMENTO EM SISTEMAS ESTRUTURAIS

Trabalho de Conclusão do Curso de graduação, apresentado à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 1-2, curso de Engenharia Mecânica da Coordenação de Engenharia Mecânica - COEME - Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, Câmpus Pato Branco, como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Rogerio Novak

PATO BRANCO

2015

RESUMO

GARBIN, NAYANE L. S. Estudo de técnicas para a determinação da matriz de amortecimento em sistemas estruturais. 2015. 61 f. Monografia (Bacharelado em Engenharia Mecânica – Departamento Acadêmico de Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco – Paraná – 2015.

O presente trabalho visa à aplicação de métodos para a determinação da matriz de amortecimento em estruturas, com base nos trabalhos desenvolvidos teoricamente, por Adhikari (2000) e Pilkey (1998).

O amortecimento é utilizado no monitoramento de estruturas, auxilia no controle de vibração de sistemas mecânicos, controle de propagação de trincas nos materiais, influencia no ajuste de modos de vibração e na redução da taxa de dissipação de energia em estruturas. Além disso, é de extrema importância na redução de ruídos e níveis de vibração em estruturas metálicas diversas. Por esses, dentre outros motivos, é de extrema importância o estudo do amortecimento em sistemas mecânicos.

A metodologia para estimar a matriz de amortecimento trabalha com uma análise semi-empírica, baseada em resultados de simulação numérica via método de elementos finitos e análise modal experimental. As matrizes de massa e rigidez utilizadas na metodologia, são determinadas pelo método de elementos finitos, e os autovalores e autovetores são advindos de uma análise modal experimental.

A maior dificuldade da metodologia é trabalhar com a ordem de modelo experimental divergente, uma vez que o método de elementos finitos possui uma ordem matricial muito maior que as técnicas utilizadas experimentalmente. Desta forma, um método de redução de modelos foi utilizado para a solução de problemas.

A fim de possibilitar a aplicação dos métodos, foi utilizado como estudo de caso um sistema composto por uma viga engastada em uma de suas extremidades presa por uma morsa e a outra livre, onde no sistema foram aplicadas excitações externas. São determinados os parâmetros físicos e geométricos do sistema e aplicadas técnicas preparatórias para a determinação do amortecimento presente na estrutura a partir da aplicação de métodos de determinação do amortecimento posteriormente discutidos.

Portanto, são obtidos os resultados de massa e rigidez do sistema, bem como o amortecimento do material, ambos expressos em forma matricial. Com estes é possível determinar a equação geral do movimento do sistema, que são os objetivos finais do trabalho.

Palavras-chave: Matriz de amortecimento; Análise modal; Método de redução de matriz; Autovalores e autovetores.

ABSTRACT

GARBIN, NAYANE L. S. Study techniques for determining the damping matrix in structural systems . 2015. 61 f. Monografia (Bacharelado em Engenharia Mecânica - Departamento Acadêmico de Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco - Paraná - 2015.

This work aims at applying methods to determine the damping matrix structures, building on the work theoretically developed by Adhikari (2000) and Pilkey (1998).

The buffer is used in monitoring structures aids in controlling vibration of mechanical systems, crack propagation control in the materials influences the tuning modes of vibration and reducing energy dissipation rate structures. Moreover, it is extremely important in reducing noise and vibration levels on various metal structures. For these, among other reasons, it is extremely important to study the damping in mechanical systems.

The methodology to estimate the damping matrix works with a semi-empirical analysis based on the results of numerical simulation via finite element method and experimental modal analysis. The mass and stiffness matrices used in the methodology are determined by finite element method, and the eigenvalues and eigenvectors are coming from an experimental modal analysis.

The main difficulty of this methodology is working with differing order experimental model since the finite element method matrix has a much higher order than the techniques used experimentally. Thus a model reduction method was used for troubleshooting.

In order to enable the application of methods had been used as a case study a system composed of a cantilever beam at one end attached by a walrus and other free where an external excitation in the system has been applied. Are determined the physical and geometrical parameters of the system and preparatory techniques applied for the determination of damping in this structure from the application of methods for determining the damping discussed later.

Therefore, there are obtained the results mass and rigidity of the system, as well as the intrinsic damping material, both expressed in matrix form. With these it can determine the general equation of motion of the system, which are the ultimate goals of the work.

Keywords: Damping matrix; Modal analysis; Reduced system method; Eigenvalue and eigenvector.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus pela vida e por todas as oportunidades de aprendizado que tenho tido ao longo da mesma. A meus pais, por todo amor, suporte e apoio, emocional principalmente, pois com toda a certeza deste mundo, sem eles eu não estaria concluindo esta etapa tão importante.

Reverencio o Professor Dr. Paulo Rogério Novak pela sua dedicação e orientação deste trabalho, e agradeço todo o tempo que vêm dedicando a mim e à comunidade acadêmica. Reporto-me à Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), principalmente ao Campus de Pato Branco, o qual foi minha casa e minha família por cinco longos anos. Agradeço o apoio incondicional recebido.

Devo meus sinceros agradecimentos ao corpo docente do Curso de Engenharia Mecânica que desde o primeiro momento na instituição tornaram-se parceiros e cúmplices de nossos sonhos, meus e de meus colegas, nos proporcionando todo conhecimento e apoio necessário em cada etapa de nossa caminhada. Em especial, agradeço aos coordenadores do curso, que desde 2011 se fizeram presente e participativos, sempre dispostos a sanar qualquer possível questionamento.

A todos os colegas, amigos e conhecidos que direta ou indiretamente fizeram-se presente no dia-a-dia acadêmico, dividindo conhecimentos e experiências, gostaria de externar minha satisfação em conviver com vocês durante este tempo.

LISTAS

Figura 1: Gráfico de deslocamento versus tempo	2213
Figura 2: Função senoidal aplicada a uma função em decaimento logarítmico	14
Figura 3: Diagrama esquemático da medicação por decaimento de vibrações.	3615

Figura 4: Gráfico de deslocamento versus tempo	4016
Figura 5: Método da banda de meia potência.....	4016
Figura 6: Fluxograma do algoritmo do método PRF implementado.....	4120
Figura 7: a) amortecimento proporcional à massa; b) amortecimento proporcional à rigidez..	4521
Figura 8: Variação dos modos de amortecimento com a frequência natural. a) amortecimento proporcional a massa e proporcional a rigidez; b) Amortecimento Rayleigh.....	4523
Figura 9: Esquema do Método direto de Identificação de Amortecimento.....	4624
Figura 10: Fixação da barra de aço 1020 na morsa.	46
Figura 11: Fluxograma Total da Metodologia.....	4636
Figura 12: Primeiro modo de vibração obtido numericamente.....	468
Figura 13: Segundo modo de vibração obtido numericamente.	468
Figura 14: Terceiro modo de vibração obtido numericamente.....	469
Figura 15: Quarto modo de vibração obtido numericamente.....	469
Figura 16: Primeiro modo de vibração experimental.....	4641
Figura 17: Segundo modo de vibração experimental.....	461
Figura 18: Terceiro modo de vibração experimental.....	462
Figura 19: Quarto modo de vibração experimental	4642
Figura 20: Gráfico da Função Resposta em Frequência para a medição de número 3: Primeiro modo de vibração.....	4643
Figura 21: Gráfico da Função Resposta em Frequência para a medição de número 3: Segundo modo de vibração.....	4643
Figura 22: Gráfico da Função Resposta em Frequência para a medição de número 3: Terceiro modo de vibração.....	4644
Figura 23: Gráfico da Função Resposta em Frequência para a medição de número 3: Quarto modo de vibração.....	4644
Figura 24: Frequência natural e fator de amortecimento dos três pontos de medição selecionados	4646
Figura 25: a) e b) Primeiro modo de vibração, numérico e experimental, respectivamente, em frequência de 159 Hz	4651
Figura 26: c) e d) Segundo modo de vibração, numérico e experimental em frequência de 986 Hz.	4651

Figura 27: e) e f) Terceiro modo de vibração numérico e experimental em frequência de 2718 Hz.....52

Figura 28: g) e h) Quarto modo de vibração numérico e experimental em frequência de Hz52

Figura 29: Função Resposta em Frequência Experimental dos Quatro Modos de Vibração. a) Primeiro modo de vibração, frequência de 156 Hz; b) Segundo modo de vibração, frequência de 890 Hz; c) Terceiro modo de vibração, frequência de 2541 Hz; d) Quarto modo de vibração, frequência de 4835 Hz4653

TABELAS

Tabela 1: Propriedades da Barra de Aço 1020	2233
Tabela 2: Frequências dos quatro primeiros modos de vibração da curva.....	40
Tabela 3: Autovalores, fator de perda e de amortecimento dos pontos de medição e seleção dos quatro pontos da redução de matriz.....	3645
Tabela 4: Valores de frequência e fator de amortecimento experimental dos pontos selecionados.....	4047
Tabela 5: Matriz de amortecimento proporcional reduzida.....	4048
Tabela 6: Fatores de amortecimento e frequência natural para o método direto.....	4148
Tabela 7: Comparação dos resultados numéricos com os experimentais quanto à frequência natural.....	4551
Tabela 8: Percentual de erro entre os dados de entrada do método proporcional com o método clássico.....	4552
Tabela 9: Percentual de erro entre os dados de entrada do método direto com o método clássico.....	4652
Tabela 10: Percentual de erro entre os dados de entrada do método proporcional com o método direto.....	4653
Tabela 11: Matrizes de Amortecimento Reduzidas.....	4653

SUMÁRIO

RESUMO		3
ABSTRACT		4
1	INTRODUÇÃO	10
2	OBJETIVOS	13
2.1	OBJETIVOS GERAIS	13
2.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	13
3REFERENCIAL	TEÓRICO	14
3.1	MÉTODOS DE DETERMINAÇÃO DO AMORTECIMENTO	14
3.1.1	Decremento Logarítmico	14
3.1.2	Método da Largura de Banda de Meia Potência.....	18
3.1.3	Método Polinomial da Razão Fracional (RFP).....	19
3.1.4	Método Clássico De Amortecimento.....	22
3.1.5	Método Direto de Amortecimento.....	26
3.1.6	Método Do Amortecimento Proporcional	29
3.1.7	Sistema Reduzido Melhorado Iterativo	32
4	METODOLOGIA	35
4.1	METODOLOGIA EXPERIMENTAL.....	35
4.1.1	Equipamentos Utilizados	35
4.1.2	Procedimento Experimental.....	35
4.2	Obtenção Dos Dados	37
5	RESULTADOS	40
5.1	Método Numérico	40
5.2	Análise Modal Experimental.....	42
5.3	Redução De Matrizes	48
5.4	Método De Amortecimento Clássico	48
5.5	Método Do Amortecimento Proporcional.....	49
5.6	Método Direto De Amortecimento	50
6DISCUSSÃO	DOS	RESULTADOS
7		51
REFERÊNCIAS		57

1 INTRODUÇÃO

Segundo afirmação de Oliveira (2006, p. 24): “vibrações resultam de uma contínua e repetitiva conversão de energia cinética em potencial, e vice-versa”. No que tange às vibrações, amortecimento é o processo responsável por retirar a energia de um sistema ou conjunto mecânico, em estado vibratório, e transmiti-la para outros sistemas e/ou mecanismos.

Vibrações e suas diversas formas estão presentes no mundo desde os primórdios do Planeta. Muitas vezes elas são imperceptíveis, mas não menos importantes. Por exemplo, a audição só é possível pela vibração ocorrida nos tímpanos; a visão depende diretamente da vibração sofrida pelas ondas de luz e, além disso, a respiração e até mesmo o ato de caminhar envolve princípios de vibração.

Rao afirma que na atualidade, muitos cientistas vêm dedicando seu tempo em estudos voltados à aplicação da vibração na área da engenharia, como em projeto de máquinas, equipamentos, fundações, estruturas, motores, turbinas e sistemas de controle. Considera como um dos grandes problemas apresentados pelos motores é a vibração causada pelo desbalanceamento de massa (RAO, 2008, p. 5).

Geralmente, a vibração dos elementos que compõem os sistemas mecânicos atualmente no mercado, como por exemplo, a vibração das pás do rotor da turbina, ainda não podem ser evitadas e conseqüentemente acabam interferindo em toda a estrutura que está diretamente relacionada com o sistema, como suportes e bancadas por exemplo. Dependendo do grau de vibração e de adequadas condições de funcionamento e manutenção do equipamento, a estrutura como um todo pode falhar por fadiga, sem considerar o desgaste causado pela vibração constante, o que acaba gerando a necessidade de manutenção periódica do sistema.

Um dos maiores causadores de falhas em estruturas mecânicas é o efeito da ressonância, que ocorre toda vez que a frequência natural de vibração de uma máquina coincidir com a frequência da excitação externa. Por esse e todos os outros motivos relacionados aos danos e benefícios causados direta ou indiretamente pela vibração é que se tornaram de extrema importância os testes de vibrações nos projetos mecânicos da maior parte dos sistemas de engenharia.

Por exemplo, a existência de trincas e micro trincas na estrutura mecânica dos materiais é um fator limitante e de risco, pois a propagação de trincas causa uma degradação das propriedades mecânicas e físicas do material, e o amortecimento está inter-relacionado com o monitoramento e controle das trincas nos materiais.

Contudo, a vibração ainda pode ser utilizada em várias aplicações industriais e de consumo, sendo favorável em equipamentos como máquinas de lavar, esteiras transportadoras, peneiras, brocas odontológicas, entre outros.

De acordo com Cossolino e Pereira (2010, p. 3), “o amortecimento determina a amplitude de vibração na ressonância e o tempo de persistência da vibração depois de cessada a excitação”.

O amortecimento de um sistema pode ser determinado a partir da resposta do mesmo a uma excitação externa transitória e em função da resposta em frequência. O primeiro é conhecido como o método do decremento logarítmico e o segundo como o método da largura de meia banda de potência.

Considerando o exposto, interessa-se a determinação experimental da matriz de amortecimento de uma estrutura qualquer, dados os parâmetros de entrada como as frequências naturais de cada elemento, propriedades do material de trabalho, a partir do método do decremento logarítmico ou de largura de banda estimam-se os fatores de amortecimento do sistema. Na sequência, é possível determinar a matriz de amortecimento total do sistema, quando em vibração não linear, por exemplo.

Serão considerados alguns métodos e caminhos diferenciados para que seja possível determinar a matriz de amortecimento do sistema. Portanto, o objetivo do presente trabalho de conclusão de curso é o estudo de diferenciados métodos e determinar a matriz de amortecimento de um sistema barra livre nas extremidades, comprovando a validação dos métodos e apresentando os resultados experimentais obtidos.

Partindo de um sistema de viga livre-engastada, sujeito a uma excitação externa e calculadas as funções Resposta de Frequência utilizando o Software MatLab e a ferramenta EasyMod para cada um dos doze pontos considerados na viga. Na sequência a partir da aplicação de uma técnica de Análise Modal FRP são determinados os autovalores e autovetores do sistema, bem como o fator de amortecimento. Dentre os doze pontos medidos serão selecionados os 3 que apresentarem resultados mais coerentes e ideais possível para a aplicação do método de redução de matrizes, o IIRS, a fim de reduzir os graus de liberdade tanto da matriz

de massa M quanto da matriz de rigidez K , gerando matrizes reduzidas em uma ordem de 3×3 , possibilitando assim a aplicação dos métodos de determinação de amortecimento.

Foram selecionados para a determinação da matriz de amortecimento três métodos diferentes: o Método Clássico de Amortecimento, o Método Direto e o Método Proporcional. O primeiro parte do princípio da obtenção da matriz de amortecimento a partir única e exclusivamente do conhecimento das propriedades do material, como a rigidez, e a massa. O segundo por sua vez carece da determinação prévia das matrizes M e K , autovalores (frequência natural) e autovetores (modos de vibração) obtidos por meio de testes modais. Já o terceiro e último método é uma variação, ou melhor, generalização do método clássico de amortecimento, apresentando uma formulação geral da série de Caughey aplicada tanto à sistemas de vibração com amortecimento viscoso quanto para não-viscoso.

Ao fim deste, espera-se obter uma revisão bibliográfica total dos métodos de determinação da matriz de amortecimento e afins, levantando prós e contras da utilização e cada um, pontos positivos e negativos. Na sequência do trabalho, mais precisamente para a parte de resultados e discussão, será elaborada uma situação problema, onde serão levantadas todas as possibilidades. Na sequência, o problema será simulado computacionalmente com o auxílio de softwares, especificamente o Matlab e os resultados advindos deste serão comparados com os resultados experimentais do problema. Esta seria a segunda etapa do Trabalho de Conclusão de Curso em questão.

2 OBJETIVOS

2.1 OBJETIVOS GERAIS

O objetivo final do presente trabalho é o estudo de técnicas de determinação do amortecimento presente no sistema ensaiado, em forma matricial, com a consequente determinação dos parâmetros prévios necessários e o equacionamento da equação de movimento que governa o sistema.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Os objetivos específicos são:

- Determinação dos autovalores e autovetores do sistema, principalmente os quatro primeiros que são suficientes para a obtenção de um resultado aproximado;
- Utilização de técnicas de análise modal e redução de matriz, que possibilitam a leitura dos dados e a posterior aplicação dos métodos de amortecimento;
- Estudo e aplicação de métodos de determinação do amortecimento;
- Comparação dos meios experimental e numérico de determinação da matriz de amortecimento, bem como a comparação de resultados entre os métodos de determinação utilizados;
- Examinar a validação dos métodos;
- Estimar a possibilidade de determinação da equação geral por dois meios distintos e complementares, além de verificar a convergência a um mesmo resultado;
- Estimativa do percentual de erro nos resultados;

3 REFERENCIAL TEÓRICO

3.1 MÉTODOS DE DETERMINAÇÃO DO AMORTECIMENTO

Os métodos de determinação são aplicados para determinar os fatores de amortecimento de um sistema. A maneira ideal de seleção do método de determinação do sistema de amortecimento utilizado é a partir da seleção da faixa de amortecimento adequada e a frequência de vibração da mesma.

Os métodos mais utilizados e conhecidos são dois: **o Método do Decremento Logarítmico e o Método de Meia Banda**. O de decremento logarítmico depende diretamente da razão entre as amplitudes do sinal, dentro de um intervalo de medição. Referindo-se à taxa de redução logarítmica, advinda da redução do movimento relativa ao impulso inicial provocado no sistema, transferindo a energia para partes remotas do sistema, ou até mesmo a energia é absorvida pelo próprio elemento.

Além destes, ainda será considerado o RFP, expresso em frações racionais resultando em um sistema de equações lineares sem estimar inicialmente os parâmetros modais, frações estas expressas em forma de polinômios ortogonais de Forsythe, de acordo com Masotti (2013, p. 99).

3.1.1 Decremento Logarítmico

Carvalho (2006, p. 49) utiliza do gráfico de deslocamentos no tempo obtido experimentalmente para obter o *fator de amortecimento* por meio da utilização dos dois valores da amplitude de início e fim de um período de oscilação denominado período i , considerando o seguinte: “*Fora considerado pelo autor a amplitude u_p para o instante t_p e u_q para o instante t_q e que $t_p - t_q$ seja igual ao período natural amortecido T_d do movimento [...]”.*

Segue o gráfico que demonstra o posicionamento dos pontos acima descritos:

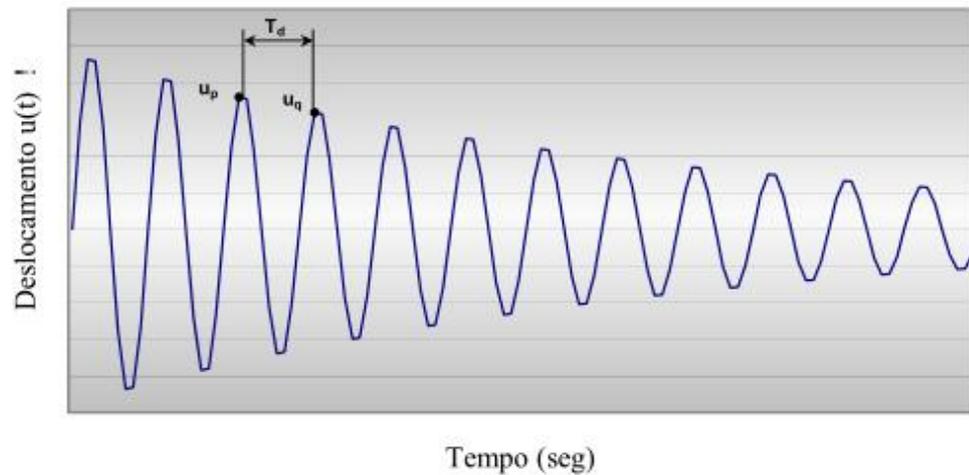


Figura 1: Gráfico de deslocamento versus tempo.
Fonte: CARVALHO, 2006 p. 50.

Conforme o estudo realizado por Musolini (2011, P. 29), o método do decremento logarítmico consiste em comparar pontos distantes de i períodos, em uma oscilação livre amortecida, em um sistema com um grau de liberdade, a fim de determinar a perda de amplitude a cada ciclo de oscilação.

Foi constatado que, como o período da oscilação é:

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (1)$$

Para valores de $\zeta < 0,2$, a equação acima pode ser simplificada. Os valores da amplitude inicial e final da oscilação podem ser determinados a partir da seguinte equação:

$$x(t) = X e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t - \alpha) \quad (2)$$

Onde U é a amplitude e α é o ângulo de fase. Com isso, determina-se que:

$$\frac{x(t)}{x(t + iT_d)} = e^{\zeta \omega_n T_d i} \quad (3)$$

Considerando o sistema com um grau de liberdade do esquema abaixo, em oscilação livre amortecida e com base nele foi desenvolvido por Musolini o cálculo do Decremento Logarítmico:

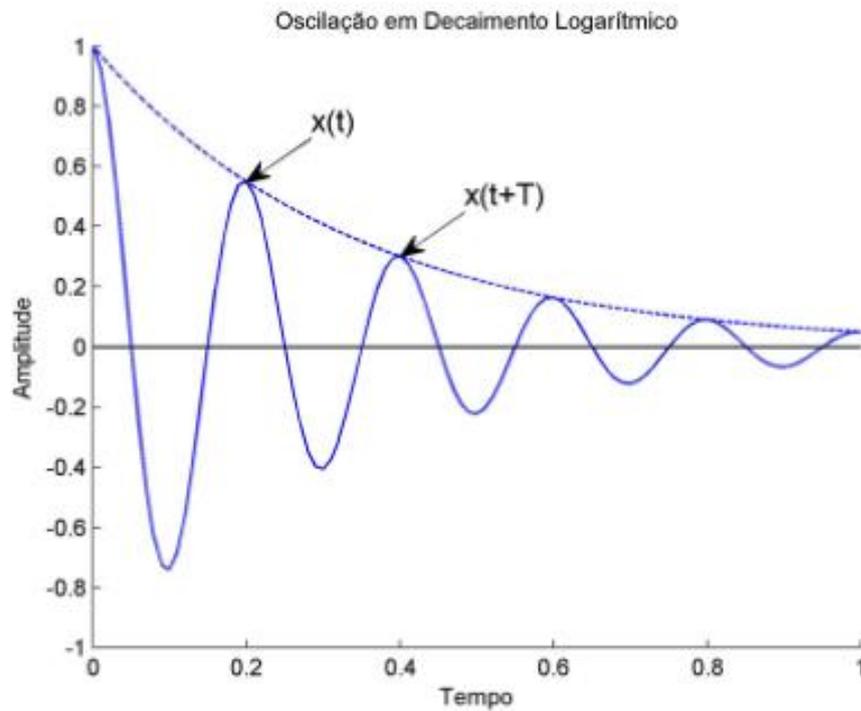


Figura 2: Função senoidal aplicada a uma função em decaimento logarítmico.
Fonte: Musolini, 2011 p. 30.

$$\lambda = \frac{1}{i} \ln \left(\frac{x(t)}{x(t + iT_d)} \right) = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (4)$$

Com base no descrito acima, o amortecimento ζ é determinado através do decremento, conforme segue:

$$\zeta = \frac{\lambda}{\sqrt{4\pi^2 + \lambda^2}} \quad (5)$$

Segundo Oliveira (2006, p.76) quanto maior o amortecimento mais rápido é o decaimento das vibrações, sendo que em um sistema linear, as amplitudes das vibrações livres decaem de maneira exponencial. Experimentalmente, a medição do decaimento de vibrações é feita da seguinte maneira:

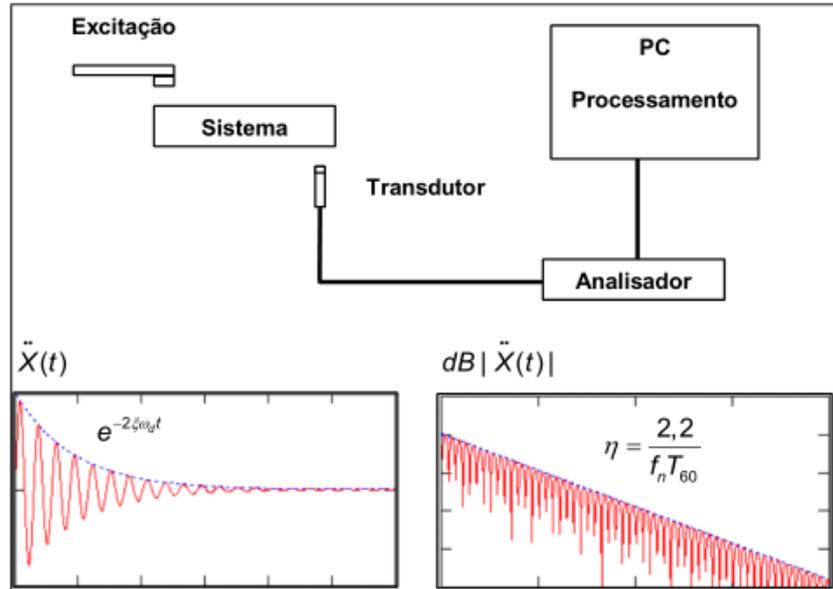


Figura 3: Diagrama esquemático da medição por decaimento de vibrações.
Fonte: Oliveira, (2006, p.77).

A partir do mesmo gráfico Carvalho (2006, p. 50), define a largura de banda a partir dos valores resultantes da equação abaixo:

$$u(t) = Ue^{-\zeta\omega_n t} \quad (6)$$

Com isso e a partir dos valores de amplitude u_p para os instantes t_p e u_q e para o instante t_q tal que u_p seja o dobro de u_q e que N seja o intervalo de tempo entre os dois pontos amortecidos citados, segundo Carvalho (2006, P. 50), sendo que N é dado por:

$$N = \frac{t}{T_d} \quad (7)$$

Depois de algumas operações matemáticas simples, obtém-se um valor de amortecimento com a seguinte relação numérica:

$$\zeta = \frac{0,11}{N} \quad (8)$$

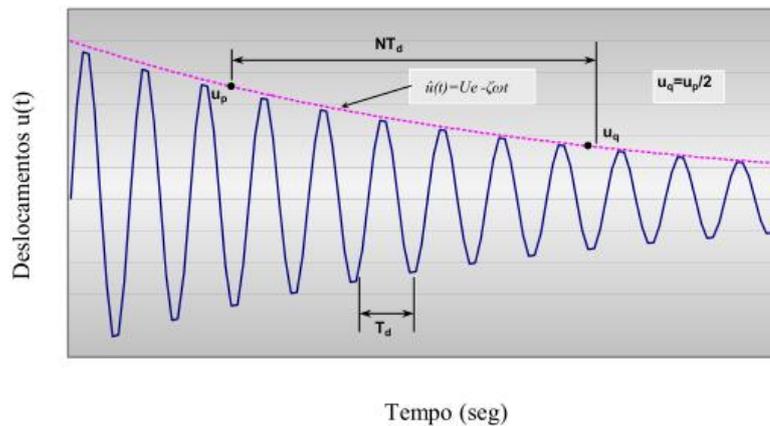


Figura 4: Gráfico de deslocamento versus tempo.
Fonte: Carvalho, 2006 p. 51.

3.1.2 Método da Largura de Banda de Meia Potência

Já o método da largura de banda, ou da Meia –Amplitude, depende da resposta da frequência e a largura da banda nada mais é do que a largura da curva da resposta da frequência em um determinado intervalo de medição. Segundo Martinez (2008, p. 11), a determinação do fator de perda neste método consiste na medição da largura de banda a três dB (decibéis) abaixo do pico de cada ressonância, sendo então calculado por:

$$\eta = \frac{2(f_2 - f_1)}{f_n} \quad (9)$$

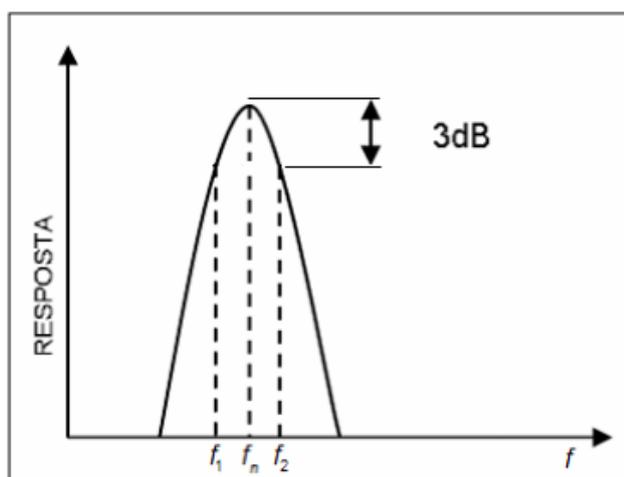


Figura 5: Método da banda de meia potência.
Fonte: Oliveira, (2006, p. 78).

Segundo recomendações do autor, a largura de banda de meia potência da ressonância em análise deve possuir pelo menos cinco pontos em frequência, porém, quando a estrutura for pouco amortecida, as ressonâncias serão extremamente agudas, o que dificultaria a medição. Quando o sistema está submetido a um amortecimento constante, a largura da banda deve aumentar à medida que a frequência de ressonância aumenta.

Martinez (2008, p. 12) afirma que este método limita-se a determinar o amortecimento de simples modos de vibração, quando estes estiverem bem definidos.

3.1.3 Método Polinomial da Razão Fracional (RFP)

Expresso em frações racionais resultado em um sistema de equações lineares sem estimar inicialmente os parâmetros modais, frações estas expressas em forma de polinômios ortogonais de Forsythe, de acordo com Masotti (2013, p. 99).

As Funções para um sistema linear com amortecimento viscoso de N graus de liberdade podem ser expressas como:

$$\alpha(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{A_r + i\omega B_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + i2\xi_r \omega_r \omega} \quad (10)$$

$$\alpha(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{2N-1} a_k (i\omega)^k}{\sum_{k=0}^{2N} b_k (i\omega)^k} \quad (11)$$

Onde A_r e B_r são constantes. A última fórmula acima escrita é a de fração racional da receptância e a função erro entre a RFP analítica $\alpha(\omega)$ e os valores experimentais adquiridos para cada frequência é definida da seguinte maneira:

$$e_j = \frac{\sum_{k=0}^{2N-1} a_k (i\omega_j)^k}{\sum_{k=0}^{2N} b_k (i\omega_j)^k} - \tilde{\alpha}(\omega_j) \quad (12)$$

Fazendo $b_{2N} = 1$, a função de erro modificada torna-se:

$$e'_j = e_j \sum_{k=0}^{2N-1} a_k (i\omega_j)^k - \tilde{\alpha}(\omega_j) \left[\sum_{k=0}^{2N-1} b_k (i\omega_j)^k + (i\omega_j)^{2N} \right] \quad (13)$$

A partir de todas as frequência medidas na barra é possível definir um vetor erro e a equação acima modifica-se em:

$$\{E_{(Lx1)}\} = [P_{(Lx2N)}]\{a_{(2Nx1)}\} - [T_{(Lx2N)}]\{b_{(2Nx1)}\} - \{W_{(Lx1)}\} \quad (14)$$

Os coeficientes polinomiais, de acordo com Masoti (2013, p. 101) é utilizado um procedimento de mínimos quadrados, minimizando a função erro J e utilizando de algumas manipulações matemáticas, tomando suas derivadas em relação a e b iguais à zero, tem-se na forma matricial J conforme segue:

$$\begin{bmatrix} [Y] & [X] \\ [X]^T & [Z] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{G\} \\ \{F\} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

Onde,

$$[Y] = Re([P^*]^T [P]) \quad (16)$$

$$[X] = -Re([P^*]^T [T]) \quad (17)$$

$$[Z] = Re([T^*]^T [T]) \quad (18)$$

$$[G] = Re([P^*]^T [W]) \quad (19)$$

$$[F] = -Re([T^*]^T [W]) \quad (20)$$

Onde P, W e T são representados pelas seguintes matrizes ortonormais:

$$[P] = \begin{bmatrix} \varphi_{1,0} & \varphi_{1,1} & \cdots & \varphi_{1,2N-1} \\ \varphi_{2,0} & \varphi_{2,1} & \cdots & \varphi_{2,2N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{L,0} & \varphi_{L,1} & \cdots & \varphi_{L,2N-1} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Onde $\varphi_{i,j}$ é o polinômio de ordem i solucionado na frequência ω_j .

$$[T] = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}(\omega_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\alpha}(\omega_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & \tilde{\alpha}(\omega_L) \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\{W\} = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}(\omega_1)\theta_{1,2N} \\ \tilde{\alpha}(\omega_2)\theta_{2,2N} \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}(\omega_L)\theta_{L,2N} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Sendo assim, é necessário encontrar as funções complexas $\theta\omega$ tal que os produtos $Re([P^*]^T[P])$ e $Re([T^*]^T[T])$ sejam matrizes unitárias, caso os polinômios sejam complexos e ortonormais. Reescrevendo a RFR:

$$\alpha(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{2N-1} c_k \omega_k}{\sum_{k=0}^{2N} d \theta_k} \quad (24)$$

O autor deixa claro que cada polinômio pode ser visto como uma combinação linear de polinômios reais e imaginários, sendo funções pares e ímpares respectivamente. A partir de várias manipulações matemáticas, os termos da expressão final são:

$$\{a_{(2Nx1)}\} = [T a c_{(2Nx2N)}] \{c_{(2Nx1)}\} \quad (25)$$

$$\{b_{(2Nx1)}\} = [T d b_{(2Nx2N)}] \{d_{(2Nx1)}\} + \{R_{(2Nx1)}\} \quad (26)$$

Masoti (2013, p. 110) afirma que as raízes dos polinômios complexos podem ser calculadas e estão relacionadas diretamente com a ressonância e fatores de amortecimento.

Quanto à implementação do método em algoritmos, Filho (2013, p.48) apresenta como entrada de dados o vetor magnitude complexa, o vetor frequência, o número de graus de liberdade e as frequências máximas e mínimas e como saída tem o vetor magnitude das frequências naturais em relação à FRF reconstruída, as frequências naturais, os coeficientes de amortecimento dos modos naturais, as constantes modais e a fase modal.

O algoritmo faz a conversão de unidades do vetor frequência de hertz para radianos por segundo e gera dois novos vetores com os cortes de frequência máxima e mínima, além de normalizar o vetor frequência em relação à frequência máxima, fórmula esta utilizada pelo autor para a redução dos erros numéricos (FILHO, 2013 p.48). O processo de implementação do algoritmo segue o seguinte fluxograma:

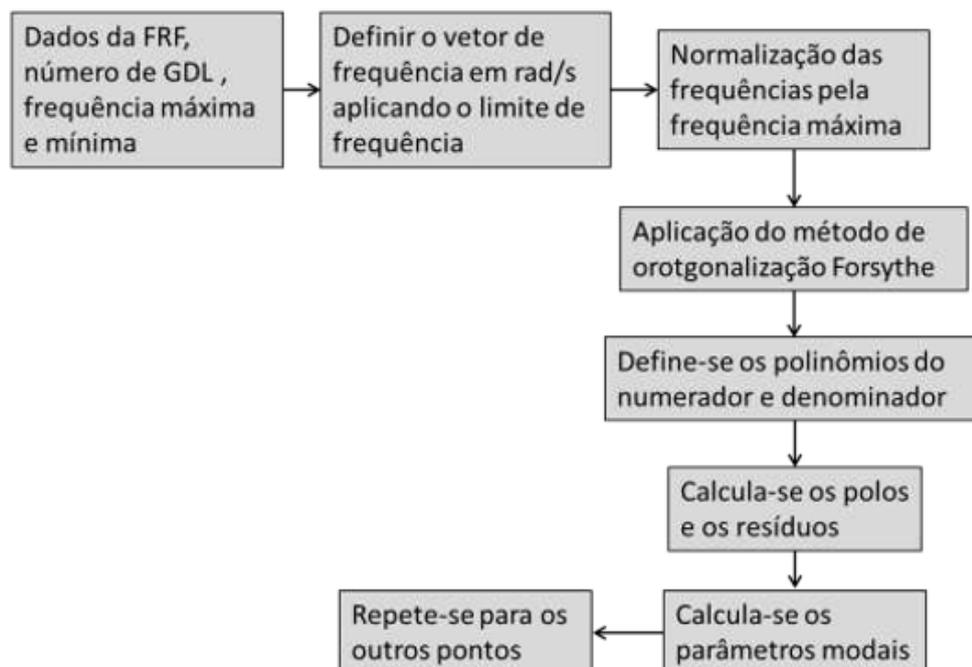


Figura 61: Fluxograma do algoritmo do método PRF implementado.
Fonte: FILHO, 2013, p.49.

3.1.4 Método Clássico De Amortecimento

Matrizes de amortecimento são definidas em situações onde a análise clássica modal de amortecimento não é aplicada, como por exemplo, na análise de sistemas não lineares mesmo que o amortecimento seja dado da forma clássica.

A matriz de amortecimento clássica não é determinada de maneira convencional, como a partir das dimensões da estrutura, dos membros ou até mesmo do coeficiente de amortecimento do material. Contudo, torna-se impraticável a determinação da matriz a partir do conhecimento de todos os coeficientes de amortecimento dos elementos individuais da estrutura, bem como a matriz de rigidez da mesma. Portanto, a matriz é determinada a partir dos coeficientes modais de amortecimento, considerando todos os mecanismos de dissipação de energia existentes, conforme consta em Chopra (2012, p. 455).

Idealiza-se que mecanismos similares de amortecimento são distribuídos por toda a estrutura, e a partir dos coeficientes modais de amortecimento pode-se construir a matriz clássica de amortecimento, de acordo com os procedimentos do Chopra (2012, p. 455).

3.1.4.1 Amortecimento de Rayleigh

Considerando as influências da massa e da rigidez do corpo, no desenvolvimento do termo de amortecimento, tem-se que:

$$c = a_0 m \quad (27)$$

$$c = a_1 k \quad (28)$$

Onde as constantes a_0 e a_1 são de unidades segundo⁻¹ e segundo, respectivamente. A matriz de rigidez proporcional pode ser interpretada como o modelo de dissipação de energias decorrente de deformações históricas ocorridas na estrutura, enquanto que a matriz de massa é de difícil justificação física, uma vez que o amortecimento de ar pode ser interpretado como sendo desprezível para a maioria das estruturas. Para um sistema com amortecimento proporcional de massa, o amortecimento para o modo n^{th} de amortecimento é:

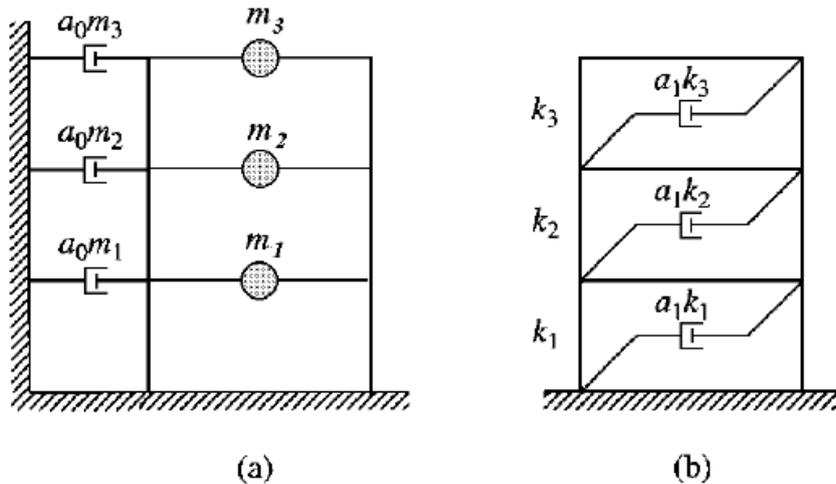


Figura 72: a) amortecimento proporcional à massa; b) amortecimento proporcional à rigidez.

Fonte: Chopra, p. 417.

$$C_n = a_0 M_n \quad (29)$$

Com isso, o coeficiente modal de amortecimento é definido a partir de:

$$\zeta_n = \frac{a_0}{2 * w_n} \quad (30)$$

Onde a_0 é dado por:

$$a_0 = 2\zeta_i w_i \quad (30a)$$

Nota-se que o coeficiente é inversamente proporcional à frequência natural da estrutura. Quanto ao coeficiente a_0 , este pode ser obtido para qualquer modo de vibração i . Uma vez que estes coeficientes já podem ser determinados, determina-se então a matriz de amortecimento C para qualquer modo. De maneira semelhante para o amortecimento proporcional à rigidez da estrutura, relacionado com o coeficiente a_1 , tem-se que:

$$C_n = a_1 M_n w_n^2 \quad (31)$$

$$\zeta_n = \frac{a_0}{2} * w_n \quad (32)$$

$$a_1 = \frac{2\zeta_j}{w_j} \quad (33)$$

Neste caso em particular, com os coeficientes acima equacionados devidamente determinados, a matriz de amortecimento C é conhecida. Depois da matriz clássica de amortecimento ser construída, como a maioria dos modos de vibração podem ter seus módulos determinados experimentalmente, para essa faixa de amortecimento o modo de Rayleigh, segundo Chopra (2012, p. 456), é utilizado como:

$$c = a_0 m + a_1 k \quad (34)$$

Para isso, os coeficientes de amortecimento anteriormente definidos, considerando os efeitos da massa e rigidez juntos agindo em um mesmo sistema, o coeficiente nada mais é que a soma algébrica dos ζ_n anteriores, considerando os modos i e j de cada situação citada. Colocando as equações acima em forma matricial, tem-se:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{w_i} & w_i \\ \frac{1}{w_j} & w_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \zeta_i \\ \zeta_j \end{Bmatrix} \quad (35)$$

A partir deste sistema, Chopra (2012, p. 457) define os coeficientes a_0 e a_1 como proporcionais às frequências de vibração de cada modo de amortecimento, i e j .

$$a_0 = \zeta \frac{2w_i w_j}{w_i + w_j} \quad (36)$$

$$a_1 = \zeta \frac{2}{w_i + w_j} \quad (37)$$

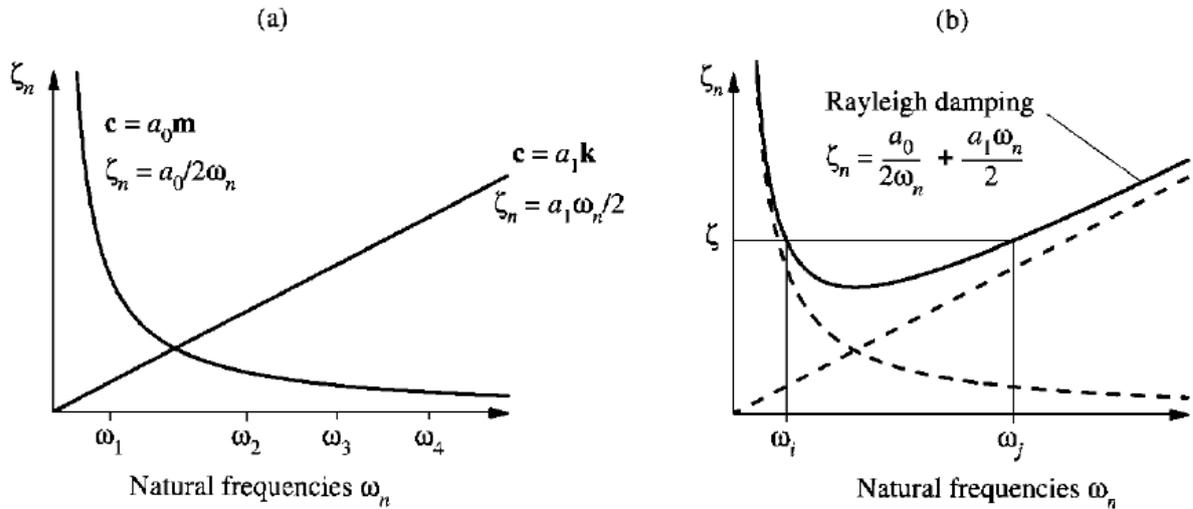


Figura 8- Variação dos modos de amortecimento com a frequência natural. a) amortecimento proporcional à massa e proporcional a rigidez; b) Amortecimento Rayleigh.

Fonte: Chopra, p. 419.

3.1.4.2 Amortecimento de Caughey

Em situações onde deseja-se especificar os coeficientes de amortecimento em mais de dois modos de vibração, como é a limitação do método de Rayleigh. Considerando então a forma clássica da matriz de amortecimento, conhecida como amortecimento Caughey:

$$c = m \sum_{l=0}^{N-1} a_l [m^{-1}k]^l \quad (38)$$

Onde N é o número de graus de liberdade do sistema e a_l constante. Comparando com o método anterior, a única diferença se encontra nos primeiros três termos da série, segundo Chopra (2012, p. 458), a sequência assemelha-se ao amortecimento Rayleigh. Os três primeiros termos são:

$$a_0 m (m^{-1}k)^0 = a_0 m \quad (39)$$

$$a_1 m (m^{-1} k)^1 = a_1 k \quad (40)$$

$$a_2 m (m^{-1} k)^2 = a_2 k m^{-1} k \quad (41)$$

Determinando quaisquer J modos de vibração inclusos nos N modos, então:

$$c = m \sum_{l=0}^{J-1} a_l [m^{-1} k]^l \quad (42)$$

O coeficiente de amortecimento é dado por:

$$\zeta_n = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{J-1} a_l \omega_n^{2l-1} \quad (43)$$

3.1.5 Método Direto de Amortecimento

No que tange aos métodos de identificação de amortecimento, existe um em especial que requer o conhecimento da matriz massa e de rigidez, das propriedades do material e dados geométricos, bem como os autovalores e autovetores, os quais são obtidos experimentalmente por meio de testes modais e as matrizes M e K a partir dos valores geométricos e propriedades do sistema. O fluxograma a seguir resume o método:

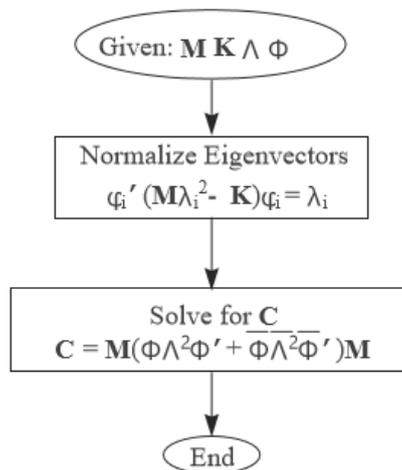


Figura 9- Esquema do Método direto de Identificação de Amortecimento.

Fonte: Pilkey, 1998, p. 23.

A ideia do método desenvolvido por Pilkey (1998, p. 18) consiste basicamente em encontrar uma matriz de amortecimento partindo de valores normalizados. Porém, a

normalização requerida para a obtenção das matrizes de massa e rigidez é difícil de ser obtida na prática.

De acordo com a autora, Lancaster define o problema da inversão da matriz polinomial geral simplificando então a notação e utilizando o $l=2$, resultando na quadrática a seguir (PILKEY, 1998, p. 19):

$$D^{(2)}(\lambda) = (M\lambda^2 + C\lambda + K) \quad (44)$$

O que leva aos dois teoremas por trás do método direto:

- **Teorema 1:**

Sendo M e K matrizes reais e simétricas $n \times n$, M é não singular,

$$(M\lambda + K)q = 0 \quad (45)$$

$$(M^T\lambda + K^T)r = 0 \quad (46)$$

Que quando normalizadas,

$$R^T M Q = I \quad (47)$$

$$R^T K Q = -\Lambda \quad (48)$$

Que resulta em:

$$(M\lambda + K)^{-1} = Q(\Lambda - \Lambda)^{-1}R^T \quad (49)$$

- **Teorema 2:**

Sendo M não singular e $D^{(2)}(\lambda)$ é praticamente igual ao multiplicador λ_i , para $i = 1, 2, \dots, 2n$, então os autovetores pode ser normalizada da seguinte maneira:

$$\lambda^{0,1} [D^{(2)}(\lambda)]^{-1} = Q\Lambda^{0,1}(\Lambda - \Lambda)^{-1}R^T \quad (50)$$

E,

$$\lambda^2 [D^{(2)}(\lambda)]^{-1} = Q\Lambda^2(\Lambda - \Lambda)^{-1}R^T + M^{-1} \quad (51)$$

Sendo Q e R matrizes com os autovetores de direita e esquerda da equação quadrática descrita anteriormente e os índices 0,1 e 2 são exponenciais dos autovetores. (PILKEY, 1998, p.20).

Partindo dos valores analíticos ou experimentais de massa e autovalores e vetores, o primeiro passo descrito pela autora é a obtenção de uma matriz de amortecimento inicial para o sistema de enésima ordem, matriz de dimensão n tal como a matriz identidade ou um modelo de matriz de amortecimento. Na sequência do método, os autovetores podem ser normalizados a partir de:

$$\phi_i^T (2M\lambda_i + C_0)\phi_i = 1 \quad (52)$$

Como solução da matriz C , Pilkey (1998, p. 13), de acordo com a formulação de Lancaster onde é possível obter as matrizes M , K e de amortecimento a partir dos dados de autovalores e autovetores, a matriz de amortecimento pode ser solucionada a partir de:

$$C = -M (\Phi\Lambda^2\Phi^T + \bar{\Phi}\bar{\Lambda}^2\Phi^*)M \quad (53)$$

Onde a barra superior indica um complexo conjugado e o $*$ um complexo conjugado transposto, Λ é a matriz de autovalores e Φ de autovetores, (PILKEY, 1998, p. 14).

É necessária uma iteração para encontrar o novo valor de C , então os autovetores são normalizados utilizando a matriz de massa inicial e a matriz C atualizada:

$$\phi_i^T (2M\lambda_i + C_1)\phi_i = 1 \quad (54)$$

Calcula-se a matriz C novamente a partir do método acima explícito e seguindo o mesmo processo continuamente até que a normalização dos autovetores e o erro entre as matrizes de amortecimento fique pequeno demais e possa ser considerado o sistema como convergente. De acordo com a autora, o método é indicado em situações onde o sistema é subamortecido, ou seja, os autovalores e vetores são pares complexos conjugados. (PILKEY, 1998, p. 21).

O método iterativo foi citado a fim de exemplificar as deduções do equacionamento também utilizado no método direto. Sendo assim, dadas às informações, a matriz C pode ser computada diretamente, evitando todo o processo iterativo descrito anteriormente. A equação de normalização dos autovetores é a que segue:

$$\phi_i^T (2M\lambda_i + C)\phi_i = 1 \quad (55)$$

Solucionando a matriz de amortecimento no domínio do tempo, utilizando de dados conhecidos das matrizes simétricas M e K , bem como os auto dados, o problema de autovalor pode ser resolvido a partir do que segue:

$$\phi_i^T C \phi_i = -\phi_i^T \left(K \left(\frac{1}{\lambda_i} \right) + M\lambda_i \right) \phi_i \quad (56)$$

A equação acima gera uma nova condição de normalização. Para um sistema não-amortecido a normalização é a que segue:

$$\phi_i^T (M \lambda_i^2 - K) \phi_i = \lambda_i \quad (57)$$

Sendo assim, a matriz simétrica de amortecimento é a que segue:

$$C = -M (\Phi \Lambda^2 \Phi^T + \overline{\Phi \Lambda^2 \Phi^*}) M \quad (58)$$

Onde a barra representa o complexo conjugado, o (*) o complexo conjugado transposto, Φ é a matriz de autovetores e Λ é a matriz diagonal de autovalores.

3.1.6 Método Do Amortecimento Proporcional

Análise modal é o método mais popular e utilizado na solução de problemas dinâmicos de engenharia, sendo inicialmente introduzido por Rayleigh em 1877 e originalmente formulado para os sistemas dinâmicos não amortecidos e lineares. Adhikari (2000, p. 25) afirma que os problemas reais de engenharia mesmo sendo não amortecidos, possuem um sistema de dissipação de energia. Portanto, na aplicação da análise modal de sistemas não amortecidos para amortecidos é comum utilizar o amortecimento proporcional.

A motivação inicial do autor foi a de relacionar o amortecimento de um sistema não viscoso a partir das noções de amortecimento clássico já conhecido. A equação de movimento de um sistema viscosamente amortecido, em vibração livre, por três matrizes reais e simétricas, o que requer uma matriz não nula de números reais par simultaneamente transformar as matrizes M, K e C em diagonais. (ADHIKARI, 2000, p. 26).

Para confirmar a existências de modos clássicos normais em um sistema linearmente amortecido, é adotado o seguinte teorema descrito por Adhikari:

“Teorema 2.1: se M, C e K são matrizes definidas positivas e existir uma matriz não singular $X \in \mathbb{R}^{N \times N}$ tal que $X^T M X$, $X^T C X$ e $X^T K X$ são todas matrizes reais diagonais então o que segue é equivalente: (a) $K M^{-1} C = C M^{-1} K$; (b) $M K^{-1} C = C K^{-1} M$ e (c) $M C^{-1} K = K C^{-1} M$ ”.

(ADHIKARI, 2000, P. 26).

3.1.6.1 Generalização do Amortecimento Proporcional

Assumindo que as matrizes M e K são conhecidas, geralmente objetiva-se encontrar a matriz C a partir de M e K tal que o sistema possua modos clássicos de vibração. Para sistemas definidos positivos, a matriz C sempre será expressa satisfazendo as três condições dadas pelo Teorema 2.1. Em contrapartida existe uma maneira de confirmar a existência de modos normais a partir da seguinte condição citada pelo autor: “ se $M^{-1} K$ pode ser expressa numa série envolvendo $M^{-1} K$ ” (ADHIKARI, 2000, p. 27), o que resultou na formulação clássica de amortecimento, conhecida como representação em série do amortecimento de Caughey:

$$C = M \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j [M^{-1} K]^j \quad (59)$$

A partir da utilização de algumas ferramentas matemáticas para a manipulação das três condições anteriormente citadas, o autor expressou a matriz de amortecimento C da seguinte maneira, denominada forma funcional da direita:

$$C = M f_1(M^{-1} K, K^{-1} M) + K f_2(M^{-1} K, K^{-1} M) \quad (60)$$

De tal maneira que o sistema possua modos clássicos. Multiplicando a condição (a) do Teorema 2.1 por M^{-1} e a (b) por K^{-1} é gerado, a partir de manipulações matemáticas, uma formulação similar a que segue forma funcional de esquerda:

$$C = f_3(K M^{-1}, M K^{-1}) M + f_4(K M^{-1}, M K^{-1}) K \quad (61)$$

As funções f_i : $i=1, 2, 3$ e 4 podem consistir em um número arbitrário de multiplicações, divisões, somas, subtrações ou potências de outras funções ou até mesmo podem ser composições funcionais, segundo Adhikari (2000, p. 29-30). Ainda afirma que as equações que acima constam são advindas de uma nova interpretação do método de amortecimento de Rayleigh, ou seja, do amortecimento proporcional, onde as matrizes identidade associadas do lado direito e esquerdo das matrizes M e K são substituídas por matrizes de funções arbitrárias f_i com argumentos apropriados.

3.1.6.2 Sistemas Não-Viscosamente Amortecidos

De maneira análoga ao modelo anterior, é necessário encontrar condições de existência de uma matriz não nula, real com equacionamento diagonal dado por transformações de congruência, onde o sistema dinâmico é caracterizado por duas matrizes simétricas constantes e uma contendo funções reais. Levando em consideração que o amortecimento da equação que governa a vibração livre em um sistema linear é dado por:

$$Mq(\ddot{t}) + \int_{-\infty}^t G(t, \tau)\dot{q}(\tau)d\tau + Kq(t) = 0 \quad (62)$$

Onde $G(t, \tau)$ é uma matriz real, a condição de existência de modos normais clássicos considerados por Adhikari é de:

“**Teorema 2.2:** sendo M, K e $G(t, \tau), \forall t, \tau$ são matrizes definidas positivas e exista uma matriz não nula de números reais, tal que $X^T M, X^T K X$ e $X^T G(t, \tau) X, \forall t, \tau$ sejam matrizes reais e diagonais então o que segue é equivalente: (a) $K M^{-1} G(t, \tau) = G(t, \tau) M^{-1} K$; (b) $M K^{-1} G(t, \tau) = G(t, \tau) K^{-1} M$ e (c) $M G^{-1}(t, \tau) K = K G^{-1}(t, \tau) M, \forall t, \tau$ ” (ADHIKARI, 2000, p. 33).

Para este caso, dadas as condições apresentadas no Teorema 2.2, juntamente com algumas operações matemáticas pertinentes, contidas em (ADHIKARI, 2000, p.34), segue a representação do amortecimento na forma funcional de direita:

$$G(t, \tau) = M F_1(M^{-1}K, K^{-1}M, t, \tau) - K F_2(M^{-1}K, K^{-1}M, t, \tau) \quad (63)$$

Onde $F_i = (z_1, z_2, t, \tau), i=1,2$, são funções reais e analíticas. Por outro lado, a representação da forma funcional de esquerda é:

$$G(t, \tau) = F_3(K M^{-1}, M K^{-1}, t, \tau) M + F_4(K M^{-1}, M K^{-1}, t, \tau) K \quad (64)$$

Estas são as formas mais gerais em que é possível determinar o amortecimento considerando os modos clássicos normais de vibração.

3.1.7 Sistema Reduzido Melhorado Iterativo

Considerando um sistema mecânico não amortecido conforme o que segue:

$$M\ddot{x} + Kx = f \quad (65)$$

Onde f é a força externa aplicada no sistema, M é a matriz de massa e K a de rigidez. Um modelo de elementos finitos é desenvolvido com o auxílio do software de simulação de estruturas, o *Ansys*, e são geradas as matrizes de massa e rigidez da estrutura, com base nos dados geométricos e nas propriedades do material descritas anteriormente. Por meio de testes de laboratório são obtidas as frequências naturais e os modos de vibração de um dado sistema.

A comparação entre o modelo analítico de elementos finitos com as informações experimentais obtidas é auxiliada com a utilização de um método de redução de ordem da matriz, *Iterated Improved Reduced System (IIRS)*. De acordo com Pilkey (1998, p. 27), o modelo analítico de elementos finitos tem mais graus de liberdade que as informações experimentais, e para que seja feita a comparação é necessário o uso de um método de redução ou expansão dos graus de liberdade.

Pilkey (1998, p. 28-30) considera também a redução e expansão estática, de onde são deduzidos os termos básicos para a formulação da redução dinâmica inclusive, considerando também o termo da inércia na equação de movimento. Dadas as expressões que seguem:

$$K_{sm}x_m + K_{ss}x_s = 0 \quad (66)$$

$$\begin{Bmatrix} x_m \\ x_s \end{Bmatrix} = T_s \{x_m\} \quad (67)$$

$$T_s = \begin{bmatrix} I \\ -K_{ss}^{-1}K_{sm} \end{bmatrix} \quad (68)$$

Onde o índice m refere-se aos graus de liberdade medidos e o s aos não medidos, e $n = m+s$ e T_s é a redução ou expansão estática para a transformação de matriz definida acima. (PILKEY, 1998, p. 29).

Esta transformação estática pode ser utilizada para expandir os vetores de forma de m para n graus de liberdade e também para criar a matriz massa reduzida M_r e a matriz de rigidez reduzida K_r , sendo estas descritas da seguinte maneira:

$$M_r = T_s^t M T_s \quad (69)$$

$$K_r = T_s^t K T_s \quad (70)$$

Quando trata-se da redução dinâmica, uma frequência de interesse pode ser utilizada para criar uma matriz de transformação aproximada, sendo possível também a criação de uma matriz de transformação para cada frequência natural medida. Sendo assim, o termo de transformação dinâmica é conforme segue:

$$T_d = \left[\begin{array}{c} I \\ -(K_{SS} - W_i^2 M_{SS})^{-1} (K_{Sm} - W_i^2 M_{Sm}) \end{array} \right] \quad (71)$$

Portanto, o modelo utilizado é o modelo de expansão ou redução dinâmica promove uma maior aproximação dos modelos por relacionar as forças de inércia e a transformação básica empregada é a de redução, onde é comprovado que as frequências naturais do modelo reduzido convergem para aquelas do modelo geral, apresentando assim resultados mais coerentes com os dados analíticos. (PILKEY, 1998, p. 30-31).

A transformação é dada a partir da equação:

$$T_{IRS} = T_s + S M T_s M_r^{-1} K_r \quad (72)$$

Onde a matriz S é dada por:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{SS}^{-1} \end{bmatrix} \quad (73)$$

Quanto ao modo iterativo, a matriz transformação para a i-ésima iteração acrescida em 1 é:

$$T_{i+1} = \begin{bmatrix} I \\ t_{i+1} \end{bmatrix} \quad (74)$$

Onde,

$$t_{i+1} = t_s + K_{SS}^{-1} [M_{Sm} \quad M_{SS}] T_i M_{RI}^{-1} K_{RI} \quad (75)$$

Com,

$$t_0 = t_s = -K_{SS}^{-1} K_{Sm} \quad (76)$$

As matrizes reduzidas de massa e rigidez, as quais são o objetivo da utilização deste método, são dadas:

$$M_{RI} = T_i^T M T_i \quad (77)$$

(78)

$$K_{Ri} = T_i^T K T_i$$

Contudo, além da adição do termo de inércia na equação, ainda pode ser considerado o efeito do amortecimento estrutural, o qual é descrito como:

$$m\ddot{x} + \left(\frac{\gamma k}{\omega}\right)\dot{x} + kx = fe^{i\omega x} \quad (79)$$

Ou,

$$M\ddot{x} + (K + iC)x = fe^{i\omega x} \quad (80)$$

Onde $\dot{x} = i\omega x$ e γ é o fator de perda de amortecimento. Então, a equação da redução estática fica:

$$\begin{Bmatrix} x_m \\ x_s \end{Bmatrix} = T_s \{x_m\} \quad (81)$$

Onde a nova fórmula para a transformação/ redução estática é:

$$T_s = \begin{bmatrix} I \\ -(K_{ss} + iC_{ss})^{-1}(K_{sm}iC_{sm}) \end{bmatrix} \quad (82)$$

E de maneira similar, a transformação dinâmica:

$$T_d = \begin{bmatrix} I \\ -(M_{ss}\lambda^2 + C_{ss}\lambda + K_{ss})^{-1}(M_{sm}\lambda^2 + C_{sm}\lambda + K_{sm}) \end{bmatrix} \quad (83)$$

4 METODOLOGIA

4.1 METODOLOGIA EXPERIMENTAL

4.1.1 Equipamentos Utilizados

Os equipamentos utilizados no experimento foram:

- Barra de aço 1020;
- Martelo de impacto modelo Hammer 2302-10, S/N 3895;
- Acelerômetro de piezoelétrico;
- Cabos de conexão USB;
- Adaptador – condicionador de sinais;
- Analisador de sinais;
- Morsa para fixação da barra;

A barra de aço 1020 testada possui secção transversal retangular uniforme e as propriedades físicas e geométricas constam a seguir:

Comprimento	0,221 m
Altura	0,0093 m
Largura	0,035 m
Módulo de Elasticidade	207×10^9 Pa
Módulo de Cisalhamento	80×10^9 Pa
Densidade	7800 Kg/m ³

Fonte: Autora.

4.1.2 Procedimento Experimental

O sistema a ser utilizado para as análises e coleta de dados experimentais foi um sistema de viga livre - engastada, com uma extremidade livre e outra fixada, conforme ilustrado a seguir:

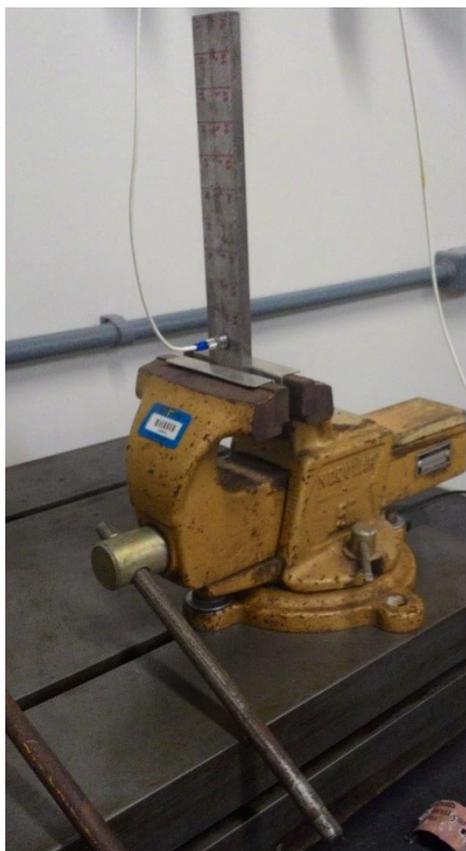


Figura 30: Fixação da barra de aço 1020 na morsa.
Fonte: Autora.

A barra de aço foi dividida em onze (11) pontos equidistante. O décimo primeiro foi selecionado para a excitação da barra, por localizar-se na extremidade livre da viga em balanço e ser o ponto mais distante do engaste. Quando a excitação ocorre em um único ponto da barra a vibração na mesma tende a responder a um mesmo padrão. Considerando uma média de cinco (5) medições por cada ponto da barra, com coerência mínima de 90% para cada Função Resposta de Frequência (FRF).

O acelerômetro foi fixado em cada um dos pontos resultantes das divisórias da barra e na sequência, com a utilização do martelo de excitação externa uma força será aplicada no último ponto, localizado na extremidade livre da barra, gerando os sinais a serem analisados. Conforme as medições são feitas e aprovadas pelo laboratorista, o acelerômetro é reposicionado em outro ponto, dando sequência ao ensaio.

O acelerômetro utilizado mede apenas acelerações unidimensionais de acordo com o sentido de seu posicionamento na peça, sendo que foi colocado na posição perpendicular à barra, em cada nó a ser medido, desconsiderando então as medições transversais à barra. Serão considerados apenas os dados medidos na direção Y positiva, referenciado no sistema de

coordenadas cartesianas, uma vez que a aplicação da força externa será na direção horizontal (eixo X) com sentido positivo para cima, justificando o posicionamento do acelerômetro.

O martelo de impacto, utilizado para aplicar a força externa no sistema, segundo dados do fabricante ENDEVCO, proporciona uma precisão de medição por ser equipado com um transdutor de força piezoelétrico, sendo então uma fonte ideal de excitação para o experimento. Conta com uma ponteira de plástico utilizada para garantir um espectro razoável na frequência medida, com um diâmetro de ponteira de 19 mm e massa de 100 g..

Iniciado o experimento, o software recebe o sinal transmitido pelo martelo de impacto e gera as curvas de cada modo de vibração relacionado obtendo então as Funções Resposta de Frequência para cada ponto medido, de acordo com a resposta transmitida pelo martelo de impacto. Conforme consta no referencial teórico, as funções resposta em frequência são os dados de entrada para os métodos de determinação do amortecimento.

Vale ressaltar que as medições são cabíveis à aprovação e, caso a medição apresente erro de execução, medição ou indicativo de ruído na curva gerada, esta pode ser descartada, não sendo então utilizada. Ao final das cinco medições selecionadas, o acelerômetro é posicionado em outro ponto e recomeça o processo.

4.2 OBTENÇÃO DOS DADOS

Primeiramente o sistema é montado: a barra é acoplada na morsa, o acelerômetro juntamente com a cera de fixação é preparado para fixar na barra e o martelo de impacto é conectado ao computador a fim de que os sinais sejam recebidos por este e a medição ocorra. Então os sinais são convertidos e medidos em unidades de distância, aceleração e/ou velocidade.

O processo é dividido por etapas, as quais constam no diagrama a seguir:

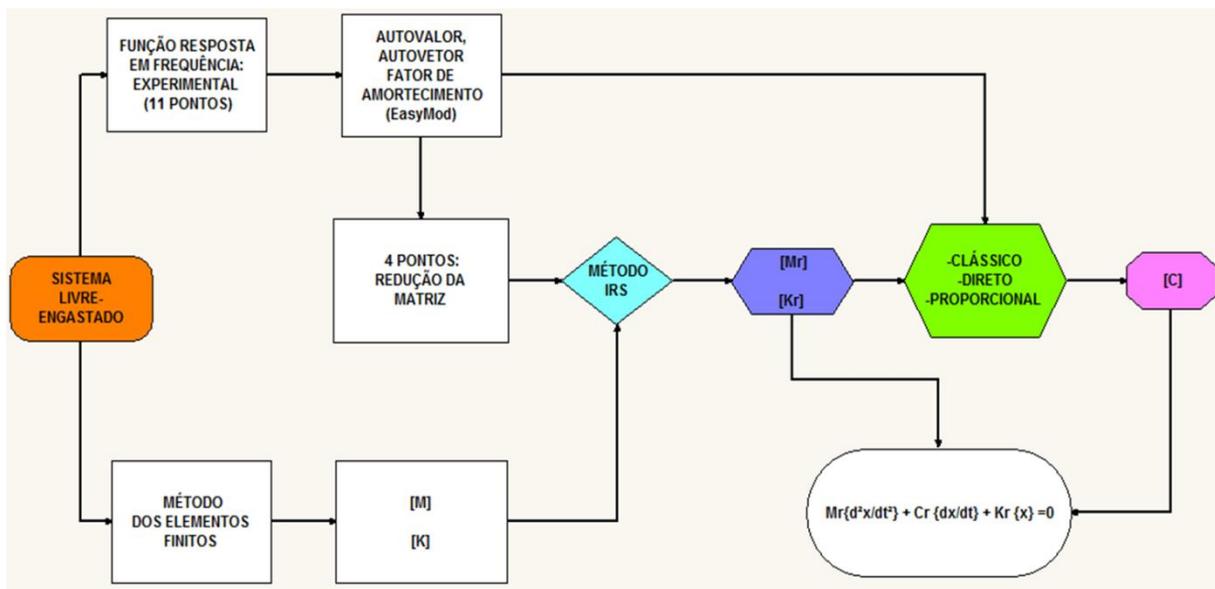


Figura 41: Fluxograma Total da Metodologia.

Fonte: Autora.

A metodologia apresentada acima mostra dois caminhos distintos que se somam para atingir um objetivo: determinar a matriz de amortecimento do sistema. Uma vez realizadas as medições é aplicada uma técnica de análise modal denominada Método Fracional da Razão Polinomial (FRP) a fim de determinar os autovalores, autovetores e fator de amortecimento do sistema, (RICHARDSON, 1982; IGLESIAS, 2000).

Para a conversão dos sinais e leitura dos gráficos de resposta da excitação externa é necessário o uso de uma ferramenta computacional do software MatLab denominada EasyMod. De acordo com Kouroussis, os termos de uso do software proporciona a modificação e alteração das sub-rotinas existentes para que atenda às necessidades de cada proposta (KOUROUSSIS, 2012). O EasyMod é uma ferramenta do software MatLab para ensinar análise modal que gera uma série de funções que estabilizam a identificação dos parâmetros modais e a sua validação. Algumas das operações possíveis são de geração da Função Resposta e Frequência de matrizes de massa, amortecimento e rigidez, entre outras.

Com a obtenção dos autovalores, autovetores e fator de amortecimento advindo da análise modal numérica, por intermédio da aplicação do método de elementos finitos, são obtidas as matrizes gerais de massa e rigidez gerais do sistema, onde os parâmetros modais medidos são funções complexas devido à presença do efeito do amortecimento.

Na sequência são selecionados três (3) pontos experimentais para que seja feita a redução da matriz M e K, uma vez que a ordem das matrizes geradas pelo método FEM é de 66 x 66. Os três (3) pontos são escolhidos a partir dos resultados apresentados pelo EasyMod,

sendo que as 3 medições que apresentaram resultados mais claros e concisos foram selecionadas. Os pontos selecionados resultarão em dados de modo de vibração, frequência natural e fator de amortecimento, bem como fator de perda.

Para que a aplicação dos métodos seja possível e gere resultados satisfatórios para a conclusão deste trabalho, faz-se necessária a utilização das matrizes de Massa e Rigidez reduzidas, obtidas a partir da aplicação do Método Iterativo de Redução (IIRS. Este, por sua vez, a partir de matrizes de transformação dinâmica utilizando dos dados iniciais do problema, como propriedades do material e massa, possibilita a redução das matrizes M e K em matrizes reduzidas na ordem de 3 x 3, mantendo os mesmos modos de vibração principais do sistema.

Com as matrizes de massa e rigidez agora em menor ordem, para a determinação da matriz de amortecimento aplicam-se os três métodos: o método clássico de amortecimento, o método do amortecimento proporcional de Adhikari (2000) e o método direto de amortecimento.

5 RESULTADOS

5.1 MÉTODO NUMÉRICO

A partir da aplicação do método de elementos finitos nas condições experimentais descritas acima, utilizando as propriedades da barra ensaiada que constam na secção 10.1, obteve-se os quatro primeiros modos de vibração da estrutura, conforme seguem:

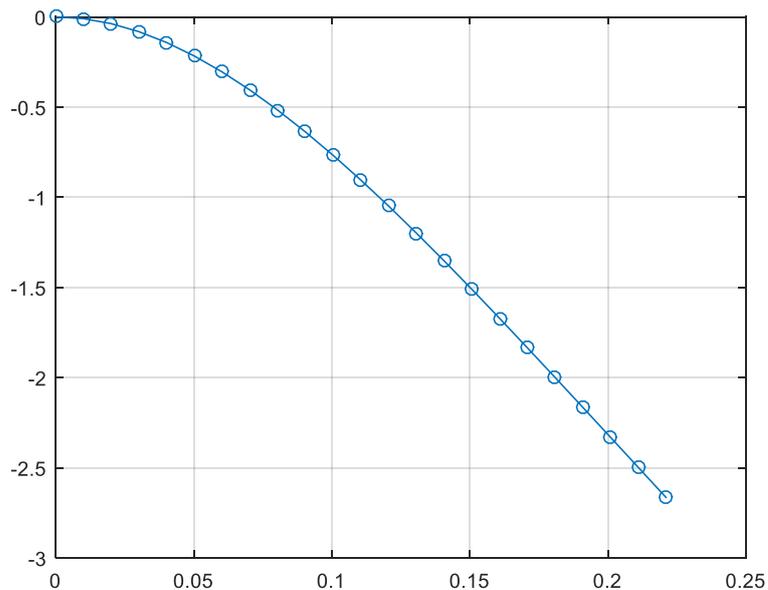


Figura 52: Primeiro modo de vibração obtido numericamente.
Fonte: MatLab.

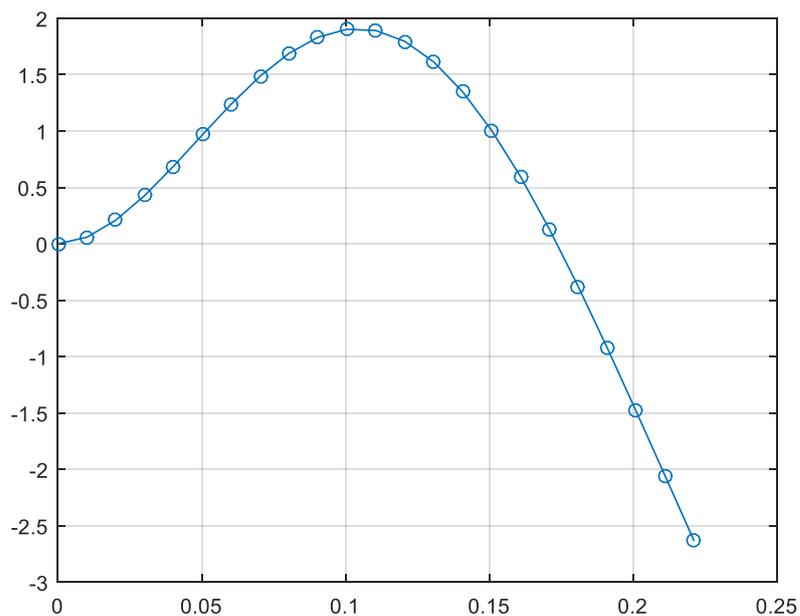


Figura 63: Segundo modo de vibração obtido numericamente.
Fonte: MatLab.

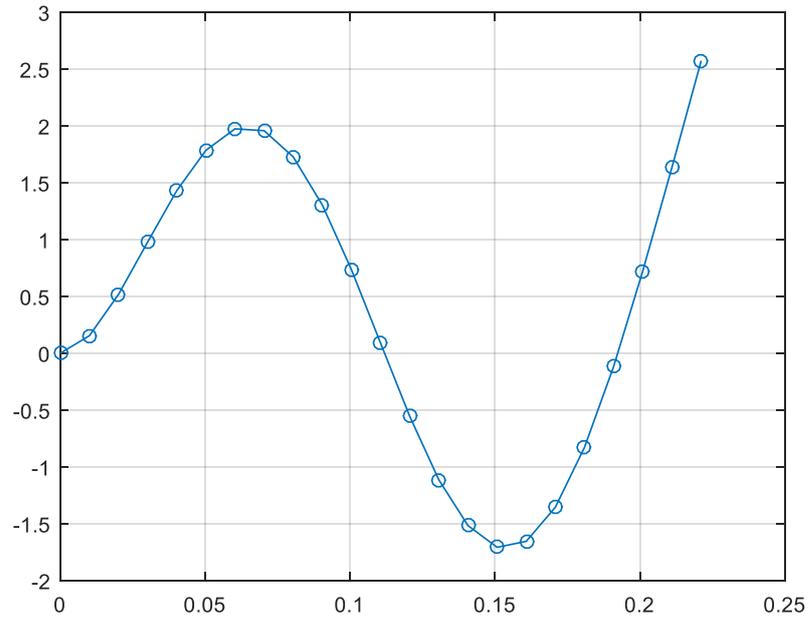


Figura 147: Terceiro modo de vibração obtido numericamente.
Fonte: MatLab.

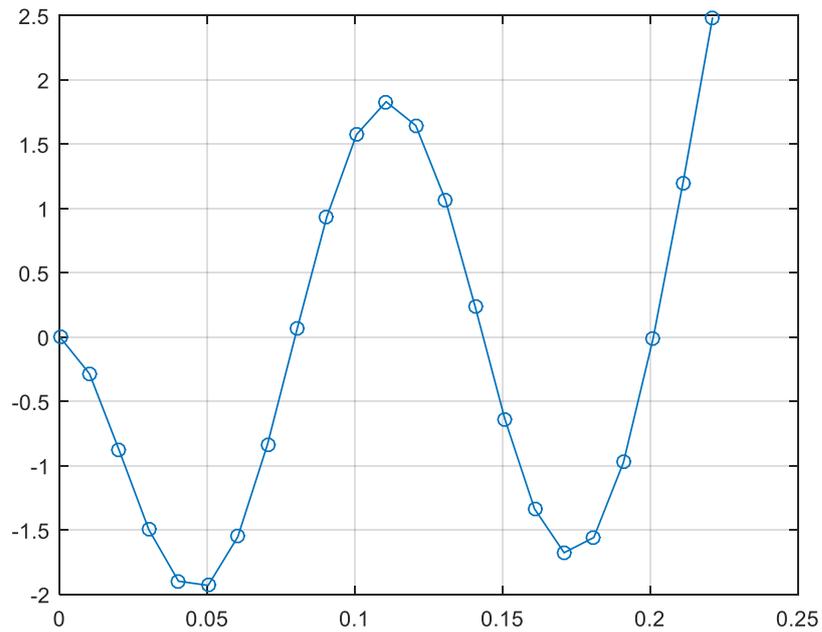


Figura 15: Quarto modo de vibração obtido experimentalmente.
Fonte: MatLab.

O método é utilizado para determinar a matriz de massa e rigidez. Com isso, os primeiros quatro autovalores referentes aos quatro primeiros modos de vibração apresentados anteriormente, são:

Tabela 2: Frequências dos quatro primeiros modos de vibração da curva.

	Resultados Numéricos
Frequência do Primeiro Modo de Vibração [Hz]	159,209
Frequência do Segundo Modo de Vibração [Hz]	986,536
Frequência do Terceiro Modo de Vibração [Hz]	2.718,255
Frequência do Quarto Modo de Vibração [Hz]	5.212,392

Fonte: Autora.

Como as matrizes de massa e rigidez, M e K respectivamente, geradas pelo método são de ordem 66 x 66, o resultado apresentado será apenas o das matrizes reduzidas após a aplicação do método de redução. Portanto, os valores de frequência e os modos de vibração representados anteriormente são referentes aos quatro primeiros termos das matrizes e serão mantidos após o processo de redução, uma vez que este não altera as características do sistema, somente facilita o equacionamento. Os dados são suficientes para a conclusão deste trabalho.

5.2 ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL

As Funções de Resposta em Frequência para cada ponto de medição foram obtidas por meio do analisador de vibração. Para cada ponto medido, foi aplicado o método RFP para determinar os autovalores, autovetores e o fator de amortecimento. Foi selecionado 3 pontos de medições (3, 4 e 5) para a redução das matrizes.

Os modos de vibração experimentais obtidos são:

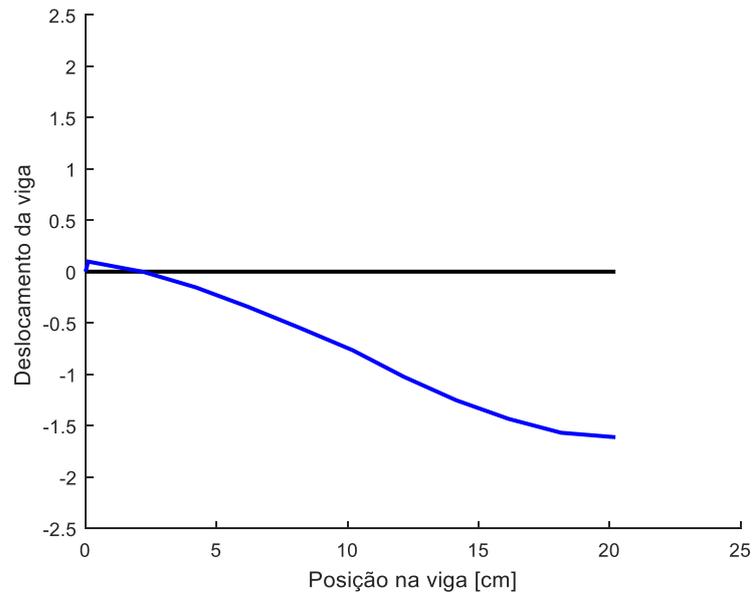


Figura 16: Primeiro modo de vibração experimental.
Fonte: Matlab/EasyMod.

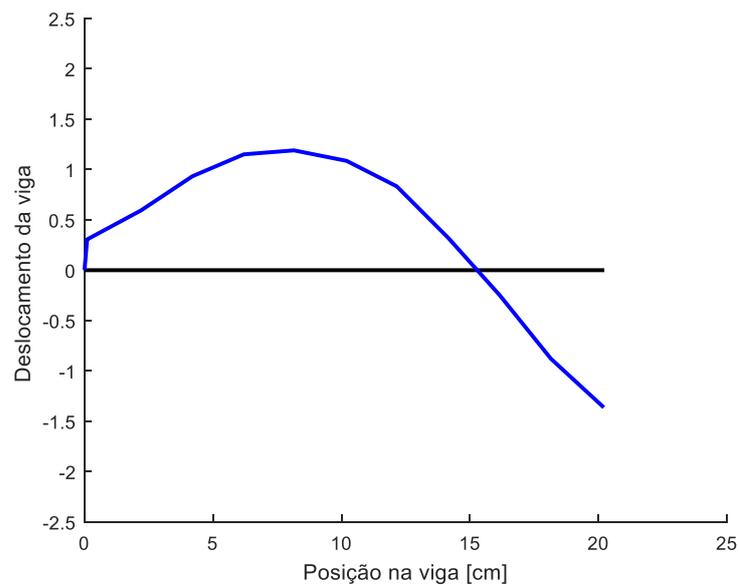


Figura 17: Segundo modo de vibração experimental.
Fonte: Matlab/EasyMod.

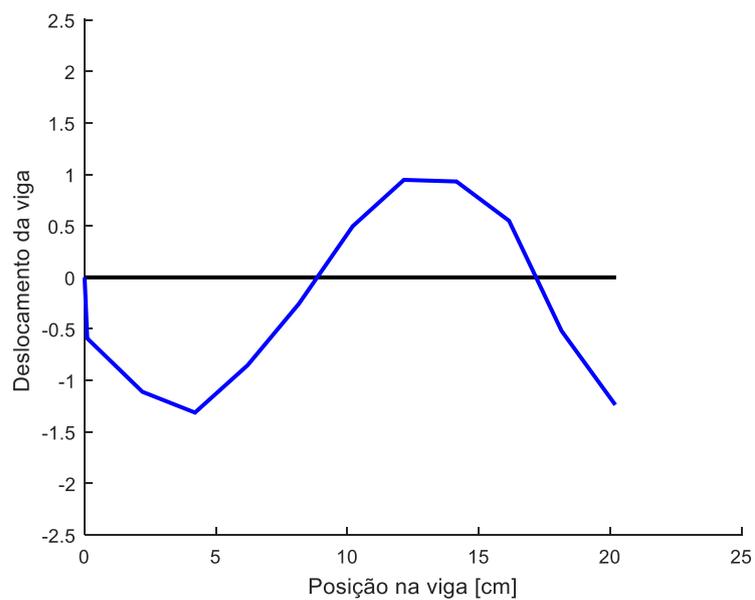


Figura 18: Terceiro modo de vibração experimental.
Fonte: Matlab/EasyMod.

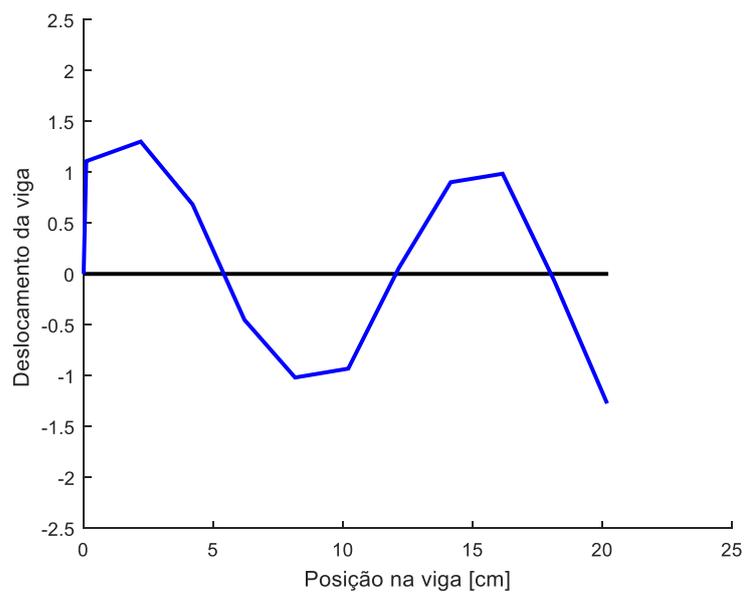
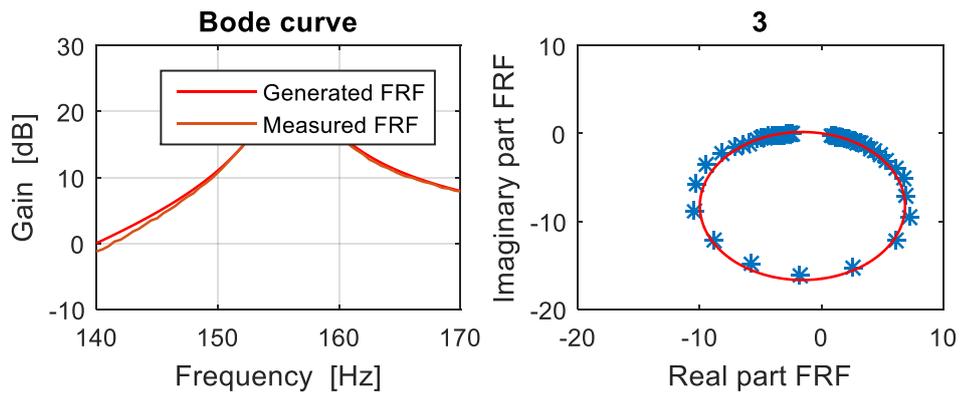


Figura 19: Quarto modo de vibração experimental.
Fonte: Matlab/EasyMod.

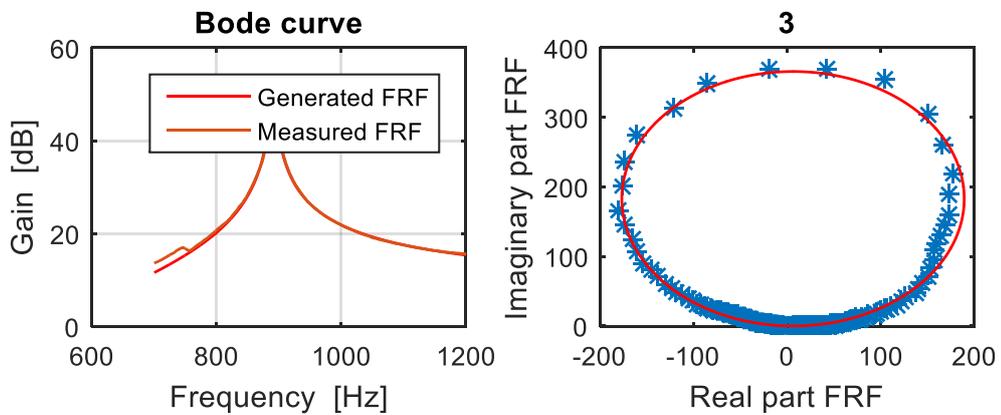
As melhores medições apresentaram boa concordância com os valores ajustados numericamente, como pode ser observado nas Figuras 20, 21, 22 e 23:



Natural frequency [Hz]:	156.099
Damping constant [%]:	0.995304
Modal Const MAG:	0.153257
Modal Const phase [°]:	-173.647

Figura 80: Gráfico da Função Resposta em Frequência para a medição de número 3: Primeiro modo de vibração.

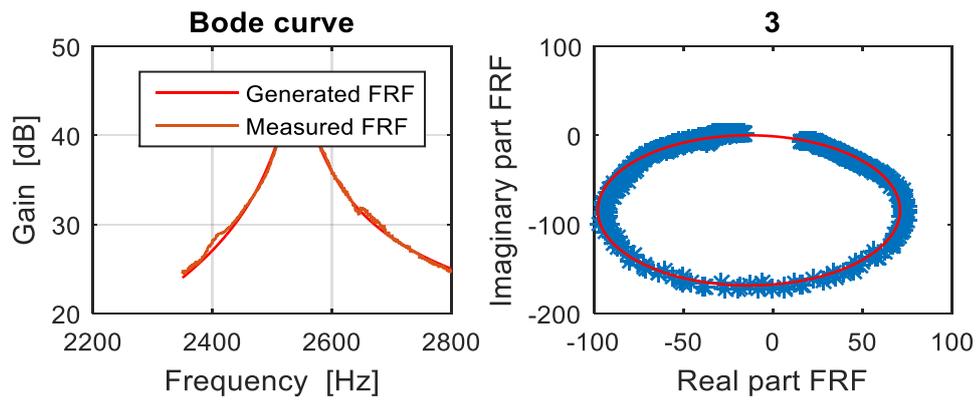
Fonte: Matlab/EasyMod.



Natural frequency [Hz]:	890.272
Damping constant [%]:	0.343853
Modal Const MAG:	0.933063
Modal Const phase [°]:	1.05844

Figura 91: Gráfico da Função Resposta em Frequência para a medição de número 3: Segundo modo de vibração.

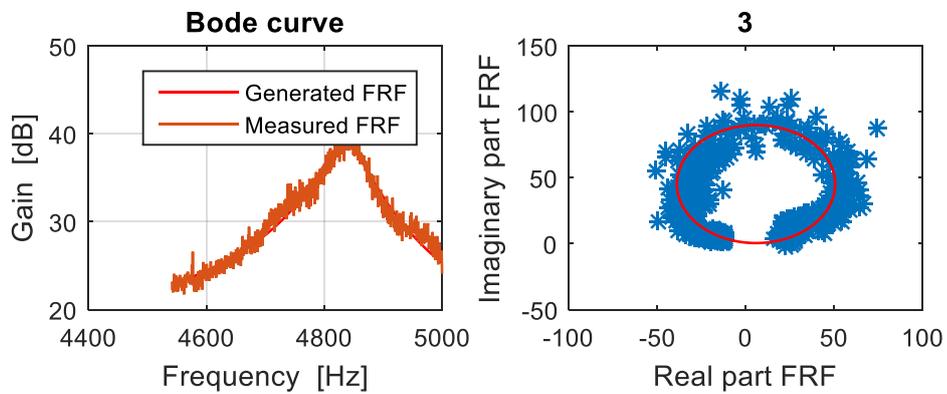
Fonte: Matlab/EasyMod.



Natural frequency [Hz]:	2541.27
Damping constant [%]:	0.863113
Modal Const MAG:	1.32171
Modal Const phase [°]:	-173.317

Figura 102: Gráfico da Função Resposta em Frequência para a medição de número 3: Terceiro modo de vibração.

Fonte: Matlab/EasyMod.



Natural frequency [Hz]:	4835.81
Damping constant [%]:	0.822324
Modal Const MAG:	0.695581
Modal Const phase [°]:	10.5927

Figura 2311: Gráfico da Função Resposta em Frequência para a medição de número 3: Quarto modo de vibração.

Fonte: Matlab/EasyMod.

A tabela a seguir contém os valores experimentais, obtidos a partir da sub-rotina do EasyMod, a RFP, referente a medição de todos os pontos considerados. Os pontos foram selecionados como melhores medições a partir de uma análise visual dos resultados. Os pontos que apresentaram melhores medições foram o 3, 4 e 5.

Tabela 3: Autovalores, fator de perda e de amortecimento dos pontos de medição e seleção dos quatro pontos da redução de matriz.

Medições						Pontos selecionados*
1	Autovalor [Hz]	155,661	893,981	2564,96	4813,14	
	Fator de Perda	0,8408	0,3642	0,42486	0,85617	
	Fator de Amortecimento	0,0042	0,0018	0,0021	0,0043	
2	Autovalor [Hz]	155,668	892,486	2556,26	4806,05	
	Fator de Perda	0,6081	0,3467	0,5562	0,8878	
	Fator de Amortecimento	0,0030	0,0017	0,0028	0,0044	
3	Autovalor [Hz]	156,099	890,272	2541,27	4835,81	1
	Fator de Perda	0,9953	0,3438	0,8631	0,8223	
	Fator de Amortecimento	0,0050	0,0017	0,0043	0,0041	
4	Autovalor [Hz]	156,084	887,948	2558,96	4844,37	2
	Fator de Perda	1,043	0,30702	0,5064	0,6384	
	Fator de Amortecimento	0,0052	0,0015	0,0025	0,0032	
5	Autovalor [Hz]	156,079	887,363	2572,77	4819,57	3
	Fator de Perda	1,0818	0,29165	0,73063	0,6098	
	Fator de Amortecimento	0,0054	0,0015	0,0037	0,0030	
6	Autovalor [Hz]	155,73	888,424	2566,31	4834,34	4
	Fator de Perda	1,0032	0,2752	0,6069	0,6434	
	Fator de Amortecimento	0,0050	0,0014	0,0030	0,0032	
7	Autovalor [Hz]	155,691	891,402	2556,77	4864,47	
	Fator de Perda	1,1096	0,29925	0,45998	0,62055	
	Fator de Amortecimento	0,0055	0,0015	0,0023	0,0031	
8	Autovalor [Hz]	155,133	893,908	2553,46	4823,38	
	Fator de Perda	1,0152	0,36627	0,3942	1,11218	
	Fator de Amortecimento	0,0051	0,0018	0,0020	0,0056	
9	Autovalor [Hz]	154,566	893,952	2566,22	4829,16	
	Fator de Perda	1,028	0,4468	0,40766	0,7227	
	Fator de Amortecimento	0,0051	0,0022	0,0020	0,0036	
10	Autovalor [Hz]	153,722	890,495	2567,09	4856,08	
	Fator de Perda	1,4144	0,29244	0,4311	0,513	
	Fator de Amortecimento	0,0071	0,0015	0,0022	0,0026	
11	Autovalor [Hz]	153,411	882,726	2543,83	4790,24	
	Fator de Perda	1,0732	0,4041	0,3981	0,7027	
	Fator de Amortecimento	0,0054	0,0020	0,0020	0,0035	

* Os pontos foram selecionados visualmente.

Fonte: Autora.

5.3 REDUÇÃO DE MATRIZES

Com a determinação das matrizes gerais, pelo método numérico de Elementos Finitos e a seleção visual de três pontos de medição experimentais, com valores de frequência natural, modo de vibração e fator de amortecimento, podem ser obtidas as matrizes reduzidas, pelo Método IIRS de redução:

$$M_r = 10^5 * \begin{bmatrix} 0,286552 & -0,455842 & 0,23191 \\ -0,455842 & 0,725748 & -0,369022 \\ 0,23191 & -0,369022 & 0,188006 \end{bmatrix}$$

$$K_r = 10^{12} * \begin{bmatrix} 0,313422 & 0,4885006 & 0,2167375 \\ -0,4885006 & 0,76712375 & -0,3425236 \\ 0,2167375 & -0,3425236 & 0,1540682 \end{bmatrix}$$

5.4 MÉTODO DE AMORTECIMENTO CLÁSSICO

Depois de feita a análise modal, foram selecionados três pontos de medição com os melhores resultados obtidos, conforme consta no gráfico:

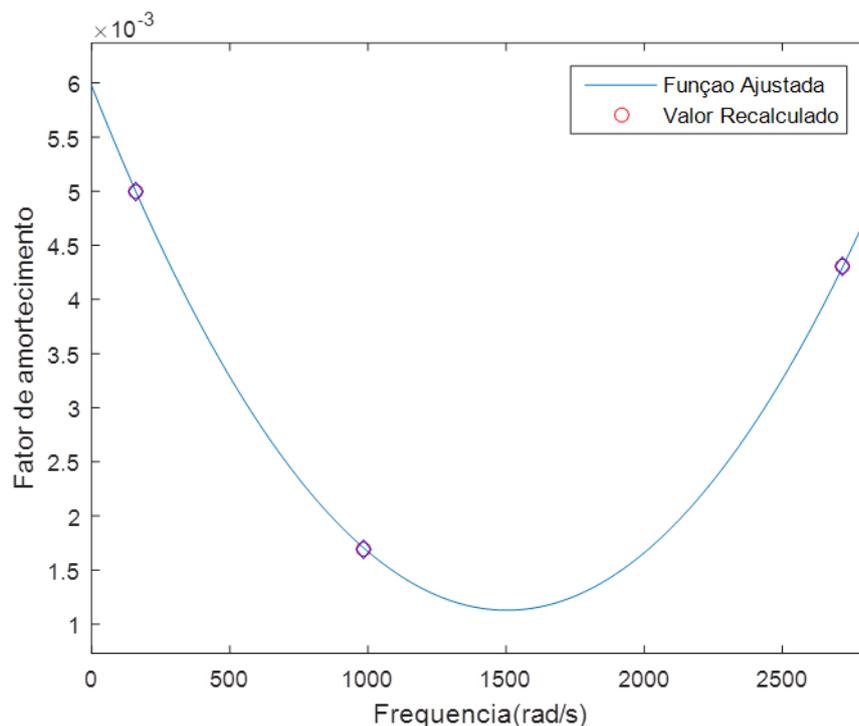


Figura 24: Frequência natural e fator de amortecimento dos três pontos de medição selecionados.

Fonte: Autora.

Os pontos destacados no gráfico foram recalculados a partir de uma equação de ajuste de curva, determinado a partir do seguinte polinômio quadrático:

$$a = 0.01564896 + -1.66833202 \cdot 10^{-5} * x + 4.2226235 \cdot 10^{-9} * x^2$$

Estes apresentam os seguintes módulos de frequência e fator de amortecimento:

Tabela 4: Valores de frequência e fator de amortecimento experimental dos pontos selecionados.

Pontos Selecionados	1	2	3
Frequência [Hz]	156,099	890,272	2541,270
Fator de Amortecimento	0,005	0,002	0,004

Fonte: Autora.

A partir das matrizes de massa e rigidez reduzidas advindas do método IIRS de redução de modelos, juntamente com os autovalores (frequências naturais), autovetores (modos de vibração) e os fatores de amortecimento, obtém-se a matriz de amortecimento reduzida do sistema:

$$C_r = 10^6 x \begin{bmatrix} 0,394480 & -0,620214 & 0,302429 \\ -0,620214 & 0,978144 & -0,478111 \\ 0,302429 & -0,478111 & 0,255458 \end{bmatrix}$$

5.5 MÉTODO DO AMORTECIMENTO PROPORCIONAL

Utilizando os fatores de amortecimento obtidos do resultado de matriz de amortecimento reduzida pelo método clássico de amortecimento e as matrizes reduzidas M e K, foram obtidos os seguintes autovalores e fatores de amortecimento:

Tabela 5: Matriz de amortecimento proporcional reduzida

Método do Amortecimento Proporcional		
Primeiro Modo de Vibração	Frequência [Hz]	159,207
	Fator de amortecimento	0,005
Segundo Modo de Vibração	Frequência [Hz]	986,535
	Fator de amortecimento	0,002
Terceiro Modo de Vibração	Frequência [Hz]	2718,229
	Fator de amortecimento	0,004

Fonte: Autora.

A matriz reduzida resultante do método proporcional de amortecimento é a seguinte:

$$C_r = 10^6 x \begin{bmatrix} -0,394465 & 0,620190 & -0,302417 \\ 0,620190 & -0,978107 & 0,478092 \\ -0,302417 & 0,478092 & -0,235449 \end{bmatrix}$$

5.6 MÉTODO DIRETO DE AMORTECIMENTO

Utilizando os fatores de amortecimento obtidos do resultado de matriz de amortecimento reduzida pelo método clássico de amortecimento e as matrizes reduzidas M e K, foram obtidos os seguintes autovalores e fatores de amortecimento:

Tabela 6: Fatores de amortecimento e frequência natural para o método direto.

Método Direto de Amortecimento		
Primeiro Modo de Vibração	Frequência [Hz]	159,207
	Fator de amortecimento	0,005
Segundo Modo de Vibração	Frequência [Hz]	986,535
	Fator de amortecimento	0,002
Terceiro Modo de Vibração	Frequência [Hz]	2718,229
	Fator de amortecimento	0,004

Fonte: Autora.

A matriz reduzida resultante do método direto de amortecimento é a seguinte:

$$C_r = 10^6 x \begin{bmatrix} 0,394452 & -0,620171 & 0,302407 \\ -0,620171 & 0,978076 & -0,478075 \\ 0,302407 & -0,478075 & 0,235441 \end{bmatrix}$$

6 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

A tabela a seguir mostra uma comparação entre os modos de vibração do sistema obtidos numericamente através do método de Elementos Finitos, na primeira coluna e obtidos experimentalmente, a partir da sub-rotina de análise modal, RFP, do EasyMod na segunda coluna:

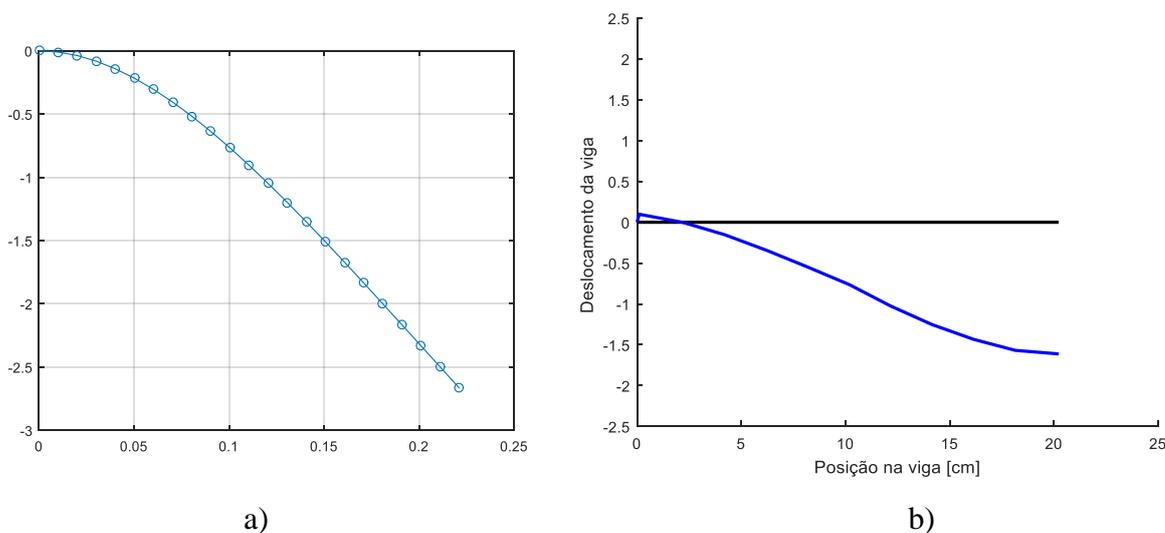


Figura 25: a) e b) Primeiro modo de vibração, numérico e experimental, respectivamente, em frequência de 159 Hz
Fonte: Autora.

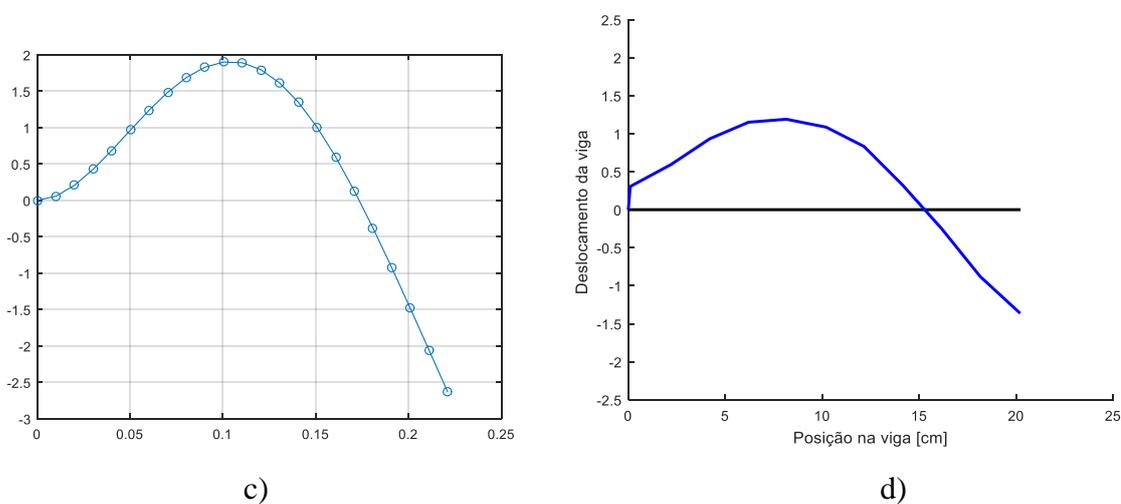
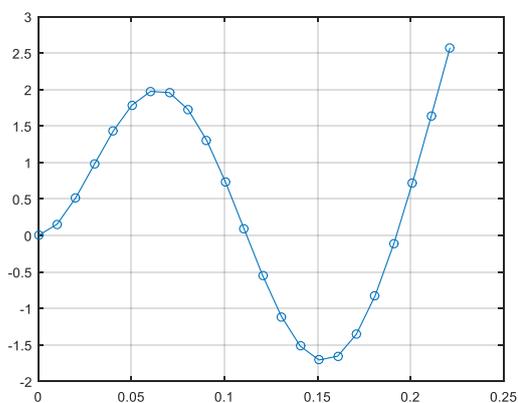
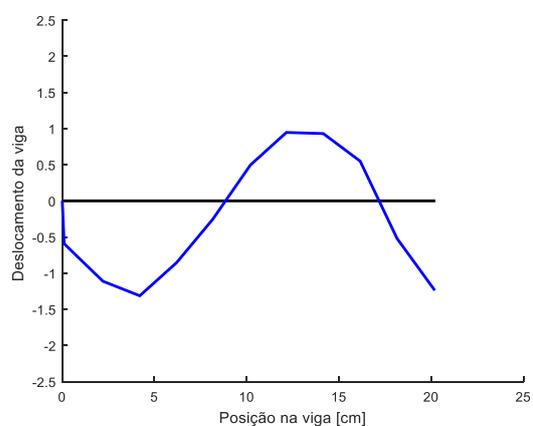


Figura 26: c) e d) Segundo modo de vibração, numérico e experimental em frequência de 986 Hz.
Fonte: Autora.



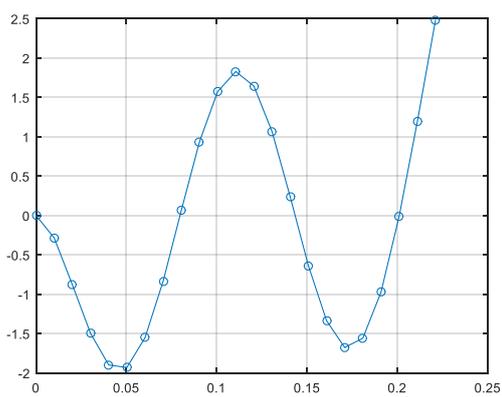
e)



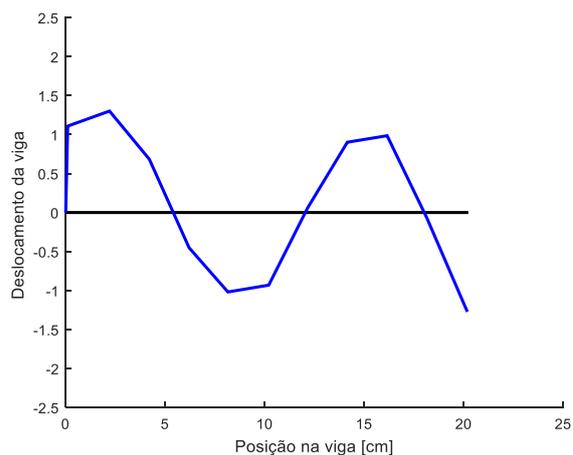
f)

Figura 2712: e) e f) Terceiro modo de vibração numérico e experimental em frequência de 2718 Hz.

Fonte: Autora.



g)



h)

Figura 28: g) e h) Quarto modo de vibração numérico e experimental em frequência de 5212 Hz .

Fonte: Autora.

Quanto aos modos de vibração tanto o numérico quanto o experimental estão coerentes e apresentaram um bom resultado e, quando comparados, nota-se que os modos de vibração experimentais se aproximam muito aos numéricos.

Os dados considerados da medição serão os resultantes da terceira medição, conforme consta na figura abaixo:

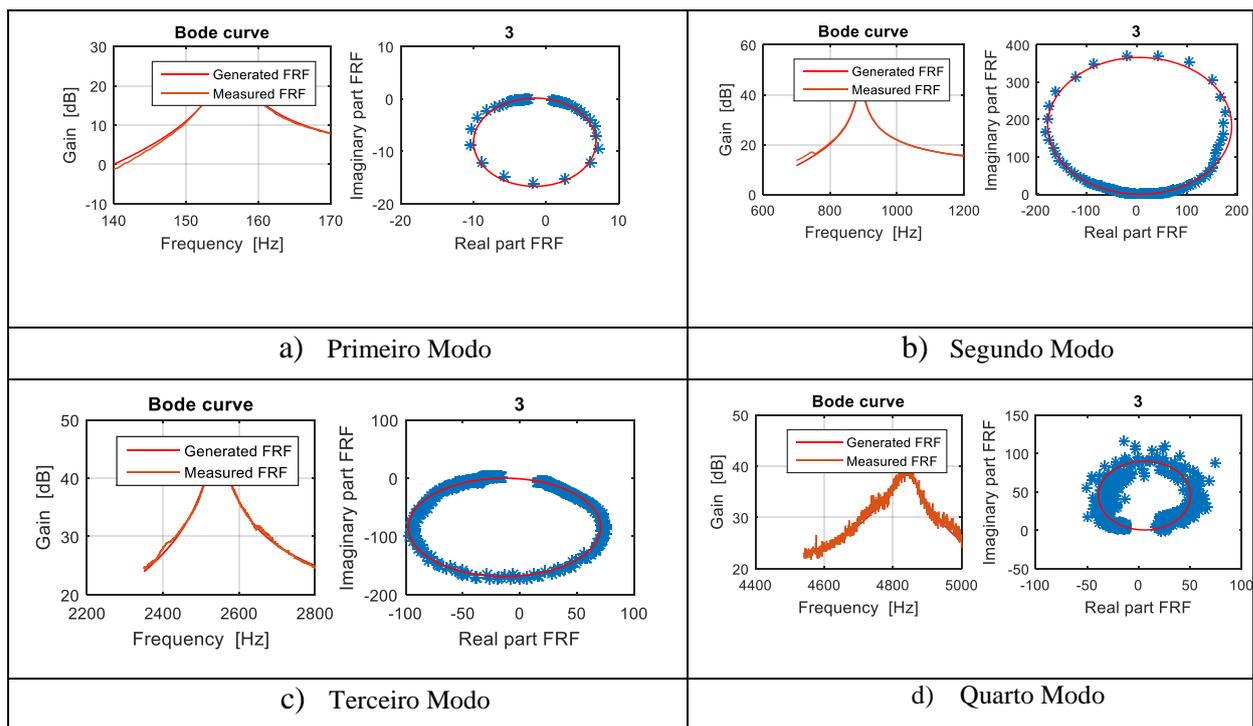


Figura 29: Função Resposta em Frequência Experimental dos Quatro Modos de Vibração. a) Primeiro modo de vibração, frequência de 156 Hz; b) Segundo modo de vibração, frequência de 890 Hz; c) Terceiro modo de vibração, frequência de 2541 Hz; d) Quarto modo de vibração, frequência de 4835 Hz .

Fonte: Autora.

A FRF do quarto modo de vibração na medição do terceiro ponto foi a que mais apresentou ruído, porém a FRF dos outros modos possui a função de ajuste da curva praticamente coerente com a função gerada, semelhantemente ao que ocorre no segundo modo.

Os resultados da secção 11.1 com os da secção 11.2, que seriam, respectivamente, os valores de frequência natural estimados numericamente com os obtidos experimentalmente, visualmente apresentam uma diferença significativa em seus módulos. Para a exata visualização da diferença entre os resultados foi calculado o percentual de erro e os resultados foram os seguintes:

Tabela 7: Comparação dos resultados numéricos com os experimentais quanto à frequência natural.

	Resultados Numéricos	Resultados Modais	Percentual de Erro
Frequência do Primeiro Modo de Vibração [Hz]	159,209	156,099	1,953%
Frequência do Segundo Modo de Vibração [Hz]	986,536	890,272	9,758%
Frequência do Terceiro Modo de Vibração [Hz]	2.718,255	2541,27	6,511%
Frequência do Quarto Modo de Vibração [Hz]	5.212,392	4835,81	7,225%

Fonte: Autora.

No que tange aos métodos de determinação de amortecimento e às matrizes de amortecimento reduzidas foram estimados os percentuais de erro relacionando os resultados de frequência natural e fator de amortecimento dos três métodos de determinação entre si e o resultado foi:

Tabela 8: Percentual de erro entre os dados de entrada do método proporcional com o método clássico.

Percentual de erro: Método Clássico com Proporcional			
Frequência Natural [Hz]			
Modos de Vibração	Proporcional	Clássico	Erro
Primeiro	159,207	156,099	1,952%
Segundo	986,535	890,272	9,758%
Terceiro	2718,229	2541,270	6,510%
Fator de Amortecimento			
Modos de Vibração	Proporcional	Clássico	Erro
Primeiro	0,005	0,005	0,000%
Segundo	0,002	0,002	0,000%
Terceiro	0,004	0,004	0,000%

Fonte: Autora.

Tabela 9: Percentual de erro entre os dados de entrada do método direto com o método clássico.

Percentual de erro: Método Clássico com Direto			
Frequência Natural [Hz]			
Modos de Vibração	Direto	Clássico	Erro
Primeiro	159,207	156,099	1,952%
Segundo	986,535	890,272	9,758%
Terceiro	2718,229	2541,270	6,510%
Fator de Amortecimento			
Modos de Vibração	Direto	Clássico	Erro
Primeiro	0,005	0,005	0,000%
Segundo	0,002	0,002	0,000%
Terceiro	0,004	0,004	0,000%

Fonte: Autora.

Tabela 10: Percentual de erro entre os dados de entrada do método proporcional com o método direto.

Percentual de erro: Método Proporcional com Direto			
Frequência Natural [Hz]			
Modos de Vibração	Proporcional	Direto	Erro
Primeiro	159,207	159,207	0,000%
Segundo	986,535	986,535	0,000%
Terceiro	2718,229	2718,229	0,000%
Fator de Amortecimento			
Modos de Vibração	Proporcional	Direto	Erro
Primeiro	0,005	0,005	0,000%
Segundo	0,002	0,002	0,000%
Terceiro	0,004	0,004	0,000%

Fonte: Autora.

Nota-se que o percentual de erro entre as medições de frequência natural do método proporcional com o método direto é praticamente nula, o que indica o êxito da aplicação dos métodos. Considerando que os dados utilizados pelo método clássico são baseados nas medições experimentais e os dados de entrada dos métodos numéricos direto e proporcional são os mesmos, justifica o percentual de erro nulo entre os resultados.

Quanto à determinação do amortecimento pelo método direto e proporcional o erro relativo entre eles foi nulo ou praticamente nulo quando comparado ao método clássico, devido à influência da alteração dos resultados do primeiro modo de vibração clássico, é um indicativo da obtenção do êxito no restante das medições e na simulação computacional.

Tabela 11: Matrizes de Amortecimento Reduzidas

Método Clássico de Amortecimento	
$C_r = 10^6 x \begin{bmatrix} 0,394480 & -0,620214 & 0,302429 \\ -0,620214 & 0,978144 & -0,478111 \\ 0,302429 & -0,478111 & 0,255458 \end{bmatrix}$	
Método do Amortecimento Proporcional	
$C_r = 10^6 x \begin{bmatrix} -0,394465 & 0,620190 & -0,302417 \\ 0,620190 & -0,978107 & 0,478092 \\ -0,302417 & 0,478092 & -0,235449 \end{bmatrix}$	
(continua)	

Método Direto de Amortecimento		
$C_r = 10^6 x$	$\begin{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}$
	$0,394452$	$-0,620171$
	$-0,620171$	$0,978076$
	$0,302407$	$-0,478075$
	$0,302407$	$0,235441$
	$\end{bmatrix}$	$\end{bmatrix}$

Fonte: Autora.

A matriz reduzida que mais se aproximou do resultado do método clássico foi obtida pelo método direto de amortecimento, o método proporcional obteve os mesmos valores em módulo, porém com sinais invertidos dos demais.

A comparação é feita com o resultado do método clássico pois esse é o mais direto e consideravelmente simples de determinação, uma vez que foi o primeiro método desenvolvido, estudado e comprovado, e todos os subsequentes como o direto e proporcional tiveram algumas variações do método clássico em sua formulação.

Portanto este é um resultado positivo do experimento: a matriz de amortecimento foi determinada e os resultados dos métodos utilizados convergem.

7 CONCLUSÃO

Primeiramente, o ensaio experimental em um sistema em vibração mecânica foi realizado e os resultados experimentais foram obtidos satisfatoriamente. Com algumas modificações nas condições de contorno do sistema e ajustes técnicos do experimento, a otimização do resultado foi obtida, bem como os percentuais de erro calculados foram reduzidos. Portanto, no âmbito geral do trabalho, os resultados foram satisfatórios e a programação foi executada com sucesso.

Tanto os resultados numéricos quanto os experimentais convergiram para a seleção de três pontos de medição no sistema e com isso, as matrizes de massa e rigidez do sistema foram obtidas. Estas necessitavam ser submetidas a um processo de redução de ordem de matriz a fim de que os métodos numéricos pudessem ser aplicados e com isso determinar o amortecimento.

Contudo, o objetivo principal do presente trabalho, o qual era a determinação numérica e experimental da matriz de amortecimento de um sistema em vibração mecânica, foi atingido. A matriz de amortecimento foi obtida por meio de três métodos distintos de determinação e os resultados foram validados.

Portanto, conclui-se que o trabalho foi realizado e todas as etapas foram executadas com êxito. É possível determinar o amortecimento de um mesmo sistema por dois caminhos distintos e obter resultados válidos e aproximados. Tanto o caminho experimental quanto o numérico utilizados são adequados para a determinação da matriz de amortecimento de qualquer sistema mecânico em vibração, partindo das considerações adequadas.

REFERÊNCIAS

ADHIKARI, Sondipon. **Damping modelling using generalized proportional damping.** 2005, 15f., Elsevier. Department of Aerospace Engineering, University of Bristol, Queens Building, University Walk, Bristol BS8 1 TR, UK.

ADHIKARI, Sondipon. **Damping Models for Structural Vibration.** 228 f. Cambridge University Engineering Department, Trinity College, Cambridge. September, 2000.

ADHIKARI, Sondipon; WOODHOUSE, J.. **Identification of Damping: Part 1, Viscous Damping.** 2000, 19 f.. Department of Engineering, University of Cambridge, Trumpington Street, Cambridge. May 2000.

ADHIKARI, Sondipon. **Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors in damped Dynamic System.** 1999, 6f.. University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom, AIAA Journal, Vol. 39, November, 1999.

ADHIKARI, Sondipon; WOODHOUSE, J.. **Identification of Damping: Part 2, Non-Viscous Damping.** 2000, 26 f.. Department of Engineering, University of Cambridge, Trumpington Street, Cambridge. Sep. 2000.

BALACHANDRAN, Balakumar; MAGRAB, Edward B.. **Vibrações Mecânicas – tradução da segunda ed. Norte-Americana.** 2011, 613 f., Editora Cengage Learning. Câmara Brasileira do Livro, São Paulo, SP.

BARUCH, M.. **Methods of Reference Basis for Identification of Linear Dynamic Structures.** AIAA Paper No. 82-0769, *23rd Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, Part 2, New Orleans, Louisiana, 1982, pp. 557-563.

BARUCH, M.. **Optimization Procedure to Correct Stiffness and Flexibility Matrices using Vibration Data.** *AIAA Journal*, Vol. 16, No. 11, 1978, pp. 1208-1210.

BARUCH, M. and Bar-Itzack, I.Y. **Optimal Weighted Orthogonalization of Measured Modes.** *AIAA Journal*, Vol. 16, No. 4, 1978, pp. 346-351.

BERMAN, A.. **Comment on ‘Optimal Weighted Orthogonalization of Measured Modes.** *AIAA Journal*, Vol. 17, No. 8, 1979, pp. 927-928.

BERMAN, A. NAGY, E.J.. **Improvement of a Large Analytical Model using Test Data.** *AIAA Journal*, Vol. 21, No. 8, 1983, pp. 1168-1173.

BORTONI, Rosanfonso. **Fator de Amortecimento: Uma Abordagem Introdutória.** IV AES Brasil. Trabalho de conclusão de Tese de Doutorado. <http://www.somaovivo.org/downloads/FatorAmort.pdf> .

CAESAR, B., **Update and Identification of Dynamic Mathematical Models,** *4th IMAC*, Los Angeles, California, 1986, pp. 394-401.

CAUGHEY, T.K., O’KELLY, M.E.J.. **Classical normal modes in damped linear dynamic systems.** *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics* 32 (1965) 583–588.

CARVALHO, Fábio W. L.. **Procedimento Experimental para Avaliação do Fator de Amortecimento em Estruturas**. 2006. 141 f. Dissertação – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Minas Gerais, MG. Set. 2006.

COSSOLINO, LC; PEREIRA, AHA. **Amortecimento: Classificação e Métodos de Determinação**. 2010. 15 f. Informativo Técnico – Científico ITC04 – Amortecimento/ATCP Engenharia Física, São Carlos – BR, 2010.

CHOPRA, Anil K.. **Dynamics of Structures – Theory and Applications to Earthquake Engineering**. 4 ed. 2012. 944 f.. Livro, Editora Prentice-Hall International Series, University of California at Berkeley, USA.

CRANDALL, S. H., **The Role of Damping in Vibration Theory**, *Journal of Sound and Vibration*, 11 (1), pp. 3-18, 1970.

EASYMOD. **MatLab –EasyMod**.. Disponível em: <<http://mecara.fpms.ac.be/EasyMod/>>. Acesso em: 08/10/2015, às 16:23h.

ENDVECO. **Manual Técnico do Martelo modelo 2302-10**. Disponível em: <<https://www.endevco.com/datasheets/2302.pdf>>. Acesso em: 15/10/2015, às 11:38h.

FILHO, Noé G. R. M.. **Análise Modal Experimental com Fonte Calibrada de Cavidade Acústica**. Dissertação de Mestrado. ENM.DM – 191A/2013. Universidade de Brasília, Brasília, DF. 2013.

FRANCESCHINI, Joel; GOMES, Herbert M.. **Avaliação do Amortecimento Estrutural Usando-se o Método do “Random Decrement”**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Departamento de Engenharia Mecânica, Engenharia Estudo e Pesquisa, 2010. Av. Sarmiento Leite, 425, sala 202. Porto Alegre, RS, Brasil.

GERADIN M., RIXEN , D.. **Mechanical Vibrations**, second ed., Wiley, New York, NY, 1997 (translation of: *The´orie des Vibrations*).

IGLESIAS, Angel M.. **Investigating Various Modal Analysis Extraction Techniques to Estimate Damping Ratio**. Master Degree in Mechanical Engineering, Blacksburg, Virginia, June, 29, 2000.

KOUROUSSIS, G., FEKIH, Bem L., CONTI, C., VERLINDEN, O. **EasyMod: A MatLab/SciLab toolbox for teaching modal analysis**, Proceedings of the 19th International Congress on Sound and Vibration, Vilnius (Lithuania), July 9-12, 2012.

MARTINEZ, Jesus A. O.. **Implementação do Fator de Perda na Modelagem de Painéis Reforçados com Alto Grau de Amortecimento**. 2008. 118 f. Dissertação – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC. Set. 2008.

MASOTTI, Diego. **Comparação de Métodos de Determinação do Amortecimento Estrutural através de Técnicas de Ajuste de Curvas de Funções Resposta em Frequência**.

Dissertação. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC. Florianópolis, SC, 2013.

MUSOLINO, Bruno de C. . **Algoritmo de Determinação do Coeficiente de Amortecimento em Materiais Refratários de Alta Alumina.** 2011. 76 f. Dissertação – Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, 2011.

MINAS C., INMAN, D.J., **Identification of a Nonproportional Damping Matrix from Incomplete Modal Information,** Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 113, pp. 219 - 224, 1991.

NOVAK, P.R., SETTI, D., TRENTIN, R.G., SANCHES, R.. **Damping Identification of a Steel Frame.** UTFPR- Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, PR – BR. Experimental Vibration Analysis for Civil Engineering Structures. October, 2013.

OLIVEIRA, André. **Adição de Amortecimento Estrutural Usando Materiais Viscoelásticos.** 2006, 165f.. Dissertação para obtenção de grau de Mestre em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC.

PIERINI, Marco. CARFAGNI, Monica. **The Loss Factor as a Measure of Mechanical Damping.** Departamento de Mecânica e Tecnologia Industrial. 5f. Firenze, Italy

PILKEY, DEBORAH F. **Computation of a Damping Matrix for Finite Element Model Updating.** Virginia Polytechnic Institute and State University. Blacksburg, Virginia. Abril, 1998. [1]

PILKEY, D. F.; INMAN, D. J..**The Direct Updating of Damping and Stiffness Matrices.** 1998, p. 6. AIAA Journal, Vol. 36, No. 3, March 1998, pp. 491-493. [2]

RAO, Singiresu S.. **Vibrações Mecânicas, 4ed.**. Pearson Prentice Hall, São Paulo, SP, 2008.

RICHARDSON, Mark H.; FORMENTI, David L..**Parameter Estimation from Frequency Response Measurements Using Rational Fraction Polynomials.** IIMAC Conference, Orlando, FL. November, 1982.

SCHRAMM, U., PILKEY, W.. **Beam Stiffness Matrix Based on the Elasticity Equations.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 40, 211 – 232, 1997.

WOODHOUSE, J., PHANI, A.S.. **Viscous damping identification in linear vibration.** Journal of Sound and Vibration 303 (2007), 475-500. Elsevier.

