

ANA KELLE MALAGUTI

**ANALISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS DE BARRAS EMPREGANDO O
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS COM FUNÇÕES DE FORMA
B-SPLINES NÃO UNIFORMES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao curso de Engenharia Civil do Campus de
Pato Branco da Universidade Tecnológica
Federal do Paraná.

Prof.^o Orientador: Dr. Rodolfo A. Kuche
Sanches.

PATO BRANCO
2013



TERMO DE APROVAÇÃO

ANALISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS DE BARRA EMPREGANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS COM FUNÇÕES DE FORMA B-SPLINES NÃO UNIFORMES

ANA KELLE MALAGUTI

Aos 13 dias do mês de agosto do ano de 2013, às 15h15min, na Sala de Treinamento da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, este trabalho de conclusão de curso foi julgado, e após agüição pelos membros da Comissão Examinadora abaixo identificados, foi aprovado como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Civil da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, conforme Ata de Defesa Pública nº 18-TCC/2013

Orientador: Prof. Dr. RODOLFO A.K. SANCHES (DACOC/UTFPR-PB)

Membro 1 da Banca: Prof. Dr. GUSTAVO LACERDA DIAS (DACOC/UTFPR-PB)

Membro 2 da Banca: Prof. Dr. PAULO ROGÉRIO NOVAK (DAMEC/UTFPR-PB)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família que diante das dificuldades me deu força e apoio para não desistir e finalizar esta etapa, da qual trabalhei com dedicação exclusiva durante cinco anos da minha vida.

Agradeço ao Edemilso Cenci Jr., pelas conversas, paciência e atenção para comigo.

Agradeço ao professor Rodolfo A. K. Sanches pelo conhecimento a mim passado, pela atenção e empenho dedicado neste trabalho juntamente comigo e por acreditar na minha capacidade.

RESUMO

O campo de engenharia de estruturas vem buscando de longa data o aprimoramento de métodos de cálculo, bem como a obtenção de análises cada vez mais precisas. Atualmente o método numérico mais empregado e difundido para a análise de estruturas é o Método dos Elementos Finitos. Recentemente Bonet et. al (2000) e, independentemente, Coda (2003), apresentaram uma formulação que baseia-se nas posições nodais, denominada formulação posicional, a qual é tem se mostrado bastante robusta e simples de ser implementada.

No presente trabalho, o método dos elementos finitos com formulação posicional é empregado para a análise de estruturas de barra, sendo que os efeitos da não linearidade geométrica e das forças de inércia são considerados. O foco principal consiste na implementação de funções B-Splines não uniformes como funções de forma para a formulação em questão.

As funções B-Splines, além de apresentar propriedades atrativas, como positividade, suavidade e controle local, são funções padrão CAD. Assim, sua utilização em um programa de análise estrutural eficiente pode facilitar a integração entre projeto e análise, diminuindo tempo e eliminando erro durante a geração de malha no ambiente em que é feita a análise.

Palavras chaves: Método dos elementos finitos, formulação posicional, não linearidade geométrica, dinâmica, B-Splines não uniformes.

ABSTRACT

For a long time, structural engineering has been searching for the improvement of numerical methods and more accurate analysis. Currently the most applied and known numerical method for structural analysis structures is the Finite Element Method. Recently, Bonet et al. (2000) and Coda (2003) presented one formulation based on the nodal positions, so called positional formulation, which is robust and simple to implement.

In this paper, the finite element method in positional formulation is used for frames structures analysis considering the effects of geometric nonlinearity and inertial forces. The main purpose is to implementation of non-uniform B-Splines as shape functions for the positional formulation.

B-Splines, beyond possessing attractive properties, such as positivity, smoothness and local control, are standard CAD functions. Therefore, its use in an efficient program for structural analysis makes easy the integration between design and analysis, reducing time and eliminating errors with mesh generation in the finite element analysis environment.

Key-words: Finite element method, positional, geometric nonlinear, dynamic, non-uniform B-Splines.

LISTA DE FIGURAS

Figura 01 – Malha de elementos finitos (2D).....	14
Figura 02 – Alguns tipos de elementos finitos para 1,2 e 3 dimensões.....	15
Figura 03 – Diferença entre a malha de elemento finito e a superfície real.....	15
Figura 04 – Mudança de Configuração	23
Figura 05 – Mapeamento posicional de elementos de barra (modificado)	29
Figura 06 – Efeito do aumento de k em uma curva B-Spline	35
Figura 07 – Esquema de Computação Triangular.....	36
Figura 08 – Comparação da representação de uma curva	37
Figura 09 – Nós e elementos de uma estrutura	39
Figura 10 – Funções de forma b-spline não uniformes cúbica.....	39
Figura 11 – Pórtico Curvo (B-Splines).....	44
Figura 12 – Vetor norma e componentes	45
Figura 13 – Componentes do vetor norma.....	47
Figura 14 – Norma do vetor normal com B-Splines e Polinômios de Lagrange	48
Figura 15 – Distribuição de tensão na face externa para $t=0, 0.02$ e 0.04	49
Figura 16 – Modelagem de uma treliça.....	50
Figura 17 – Ciclo de deslocamentos	51
Figura 18 – Trajetória do anel no tempo.....	52
Figura 19 – Trajetória do anel no tempo.....	52
Figura 20 – Modelagem de uma barra engastada.....	53
Figura 21 – Deslocamento versus tempo (nó 12).....	54
Figura 22 – Amortecimento numérico devido alteração do parâmetro de Newmark	54
Figura 23 – Deslocamento versus tempo com polinômios de Lagrange (nó 12).....	55
Figura 24 – Tensão na estrutura em 4 instantes de tempo (B-Splines).....	56
Figura 25 – Tensão na estrutura em 4 instantes de tempo (Pol. Lagrange).....	56
Figura 26 – Barra discretizada	57
Figura 27– Velocidade versus tempo (nó 08).....	57
Figura 28 – Deslocamento no passo de tempo 18 e 37	58

LISTA DE TABELAS

Tabela 01 - Incidência Nodal.....	40
Tabela 02 - Coordenadas dos nós	43
Tabela 03 - Componentes do vetor normal e norma para Polinômios de Lagrange	45
Tabela 04 - Componentes do vetor normal e norma para B-Splines.....	46

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	10
1.1	APRESENTAÇÃO DO TRABALHO	11
1.2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	12
1.2.1	Método dos Elementos Finitos.....	13
1.2.2	Dinâmica das Estruturas.....	16
1.2.3	Análise Não Linear Geométrica	17
1.2.4	Teorias Cinemáticas	19
1.2.5	Funções de forma B-Splines e o Método dos Elementos Finitos.....	19
1.3	OBJETIVOS.....	20
1.3.1	Objetivos Específicos	21
1.4	JUSTIFICATIVA.....	21
1.5	METODOLOGIA	22
2	MEF EM FORMULAÇÃO POSICIONAL NÃO LINEAR GEOMÉTRICA.....	23
2.1	MUDANÇA DE CONFIGURAÇÃO.....	23
2.2	DEFORMAÇÃO	24
2.3	TENSÕES.....	25
2.4	FUNCIONAL DE ENERGIA	27
2.5	FORMULAÇÃO POSICIONAL PARA ELEMENTOS DE BARRA.....	29
2.5.1	Solução do problema não linear	31
3	B-SPLINES.....	34
3.1	FORMA DE DISCRETIZAÇÃO PROPOSTA	38
3.1.1	Obtenção das Funções de Forma	38
3.2	O PROGRAMA	40
3.2.1	Pré-processamento	41
3.2.2	Pós- processamento.....	41
4	EXEMPLOS NUMÉRICOS E VALIDAÇÃO.....	43
4.1	PÓRTICO CURVO.....	43
4.2	TRELIÇA.....	49
4.3	IMPACTO DE UM ANEL FLEXÍVEL	51

4.4 BARRA COM FORÇA DE TRAÇÃO APLICADA REPENTINAMENTE NA EXTREMIDADE	53
4.5 IMPACTO DE UMA BARRA EM ANTEPARO RÍGIDO.....	57
5 CONCLUSÃO.....	59
REFERÊNCIAS.....	60
ANEXOS.....	67

1 INTRODUÇÃO

Há muito vem sendo feitas tentativas no campo de engenharia de estruturas para obter um método de cálculo genérico capaz de fornecer resultados de forma mais rápida, descomplicada e concisa, sem limitar-se às estruturas contínuas e de geometria comum.

Com o advento do computador e a evolução da análise matricial de estruturas, surge o Método dos Elementos Finitos, o qual se apoiou inicialmente em procedimento físico e intuitivo, tendo como ideia central a subdivisão do domínio complexo de um meio contínuo em elementos menores de geometria simples, interligados entre si por pontos nodais que formam elementos e uma malha, denominada malha de elementos finitos, ou seja, faz-se a discretização do domínio objetivando facilitar a solução (AZEVEDO, 2003; SORIANO, 2003).

Atualmente o método é base da maioria dos softwares comerciais para análise de estruturas e encontra-se amplamente difundido, sendo conhecido por sua simplicidade, eficiência e abrangência das áreas de atuação.

A escolha de um método de cálculo está diretamente relacionada a quanto consistente serão os resultados obtidos. Porém, não menos importante são as considerações feitas acerca da análise a ser realizada, devendo o profissional possuir discernimento adequado para afirmar se está deve ser estática ou dinâmica, fisicamente linear ou não linear e/ou geometricamente linear ou não linear, dentre outras premissas que variam de acordo com o problema em estudo.

Muitos problemas de engenharia podem ser simplificados ao ponto de ser possível tratá-los de forma linear e estática, porém, especialmente com o avanço da ciência dos materiais, a tendência de se construir estruturas cada vez mais esbeltas e leves, o desenvolvimento da indústria aero-espacial, a exploração de petróleo em águas mais profundas e outros fatores, é cada vez mais frequente a necessidade de se empregar análises mais criteriosas, especialmente que considerem grandes deslocamentos e efeitos dinâmicos. Para isso se fazem necessários algoritmos bastante eficientes e robustos.

Em se tratando de Método dos Elementos Finitos (MEF), um ponto importante e que afeta diretamente a precisão e a convergência é a escolha do tipo de elemento e suas funções de forma. As funções mais comumente utilizadas são os polinômios de Lagrange, que conseguem descrever formas curvas, porém mediante descontinuidades apresentam oscilações. As funções B-Splines não possuem tal inconveniente, podendo descrever uma gama maior de formas geométricas e, além disso, são utilizadas em sistemas de Desenho Auxiliado pelo Computador (CAD) (*Computer Aided Design*), Engenharia Auxiliada por Computador (CAE) (*Computer Aided Engineering*) e Fabricação Auxiliada por Computador (CAM) (*Computer Aided Manufacturing*), o que pode facilitar a troca de informações entre os sistemas. Por tais motivos neste trabalho almeja-se conhecer um pouco mais sobre essas funções que aparentam ser promissoras no que concerne a evolução no processo de integração entre projeto e análise, bem como da geração de malhas.

Assim sendo, o presente trabalho visa empregar funções de forma B-spline não uniformes para análise dinâmica não linear geométrica de estruturas de barra reticuladas. Para tanto, emprega-se a formulação baseada em posições desenvolvida por Bonet et. al (2000) e Coda (2003).

As implementações referentes a este trabalho são feitas em linguagem FORTRAN 77, dentro do módulo de análise dinâmica não linear geométrica de estruturas de pórtico bidimensional do programa fluidstruc2d desenvolvido por Sanches e Coda (2006 e 2008).

1.1 APRESENTAÇÃO DO TRABALHO

A subdivisão deste trabalho consiste em cinco capítulos complementados por anexo.

Uma breve apresentação desses capítulos é dada a seguir com o objetivo de proporcionar ao leitor uma visão geral do trabalho.

O Capítulo 1 é composto pela Introdução, Revisão Bibliográfica, Objetivos, Justificativa e Metodologia.

Na introdução faz-se uma breve descrição acerca do tema abordado no trabalho, ao passo que são delineados alguns conceitos referentes à

engenharia de estruturas. Na Revisão Bibliográfica tem-se o embasamento dos assuntos que norteiam o trabalho, os quais, posteriormente são aprofundados, tal como: Método dos Elementos Finitos, análise dinâmica não linear geométrica e funções B-Splines não uniformes. Nos Objetivos é descrito o que pretende-se com a realização deste trabalho. Enquanto que na Justificativa são definidos os motivos que levaram ao desenvolvimento do trabalho e o que o mesmo pode agregar para o meio científico. Na Metodologia, apresenta-se a forma como o trabalho é desenvolvido, bem como, os requisitos necessários a sua realização.

No Capítulo 2 a formulação posicional para elementos de pórtico é descrita desde a cinemática adotada até a obtenção e resolução do funcional de energia potencial total.

O Capítulo 3 é dedicado a dar ao leitor os conhecimentos básicos sobre as funções B-Splines não uniformes, onde é apresentada a obtenção das funções de forma empregadas neste trabalho, sendo ao final apresentado o programa, bem como os procedimentos para utilização e visualização dos resultados.

No Capítulo 4 são descritos os exemplos numéricos analisados para validação do programa e obtenção dos objetivos elencados para este trabalho. Neste os resultados obtidos são comentados.

Finalmente, no Capítulo 5 apresentam-se as conclusões obtidas acerca deste trabalho.

1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Para que este trabalho seja desenvolvido é necessário primeiramente que sejam bem compreendidos alguns aspectos do MEF, de dinâmica não linear geométrica de estruturas e também acerca das funções B-Splines. Para tanto apresenta-se uma breve revisão bibliográfica sobre esses tópicos.

1.2.1 Método dos Elementos Finitos

A resolução numérica de problemas de engenharia descritos por equações diferenciais ordinárias (EDO) e equações diferenciais parciais (EDP) pode ser feita de duas maneiras distintas: a “forma forte” onde a resolução da equação é obtida em sua forma diferencial, e a “forma fraca” onde as equações diferenciais são representadas por integrais ponderadas. Na primeira é necessário que haja continuidade nas soluções das variáveis dependentes do potencial, sendo diferenciáveis até pelo menos a ordem da equação diferencial que define o problema, apresenta difícil solução e é limitada a alguns casos, já na forma fraca, apesar da recorrência ao método numérico, obtêm-se geralmente resultados bastante satisfatórios (ZIENKEWICZ E TAYLOR, 2000; SHINGUE, 2008).

Um método que se adapta muito bem aos problemas de mecânica dos sólidos, por estes possuírem naturalmente um funcional com princípio de mínimo, é o método de Rayleigh-Ritz, o qual pode ser entendido como uma técnica para gerar funções aproximadoras para os problemas variacionais, sendo que essas funções são definidas no domínio de cada elemento ao invés de encontrar uma única função que satisfaça as condições de contorno do domínio inteiro. Logo, para cada elemento que compõe uma estrutura a solução tentativa é formada pela combinação linear de funções de forma associadas aos nós ponderados pelas variáveis referidas aos nós do elemento (ASSAN, 2003).

O processo consiste em substituir a função exata por uma aproximada com parâmetros ajustáveis, composta pela combinação linear de outras funções, chamadas funções de forma. Essa função é substituída no funcional que descreve o sistema em análise, impondo a este a condição de estacionaridade (mínimo), sendo então escolhidos os parâmetros ajustáveis de modo a obter seu ponto de mínimo (se houver), ou seja, o ponto de equilíbrio estável, onde as forças externas equivalem-se às internas (ASSAN, 2003).

O MEF tem como pioneiros os engenheiros Argyris e Kelsey, que procederam a sua aplicação em chapas da asa de um avião com o objetivo de encontrar a distribuição de tensão, porém, somente em 1965 descobriu-se que

o método se tratava de um caso particular do Método de Rayleigh-Ritz (SORIANO, 2003)

A ideia inicial do MEF, advém de um procedimento intuitivo de transformar um problema complexo em vários outros mais simples, discretizando a geometria do meio contínuo em um número finito de elementos com geometria mais simples, formando a malha dos elementos finitos (Figura 1), conforme expõe Souza (2003) e Azevedo (2003).

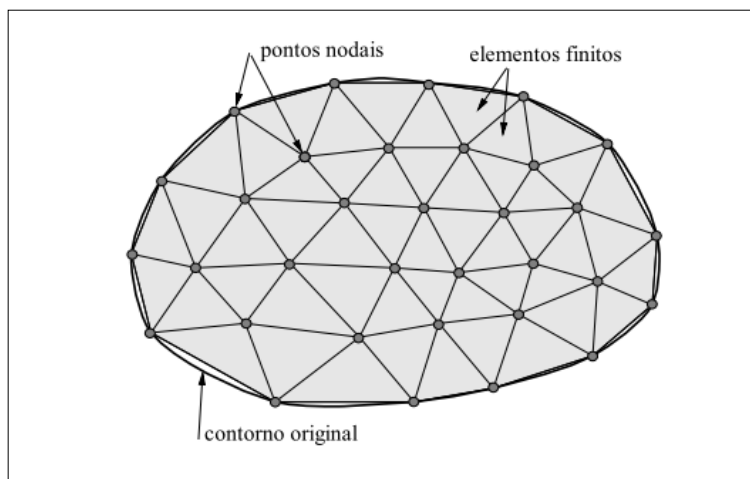


Figura 01 – Malha de elementos finitos (2D)
Fonte: Souza (2003)

Segundo Zienkiewicz e Taylor (2000), a escolha do tipo de elemento (são apresentados alguns tipos na Figura 2) e da função de forma são fatores que influenciam significativamente na convergência dos resultados e ficam a encargo do responsável pela análise, logo o usuário de programas deve ter domínio sobre o assunto.

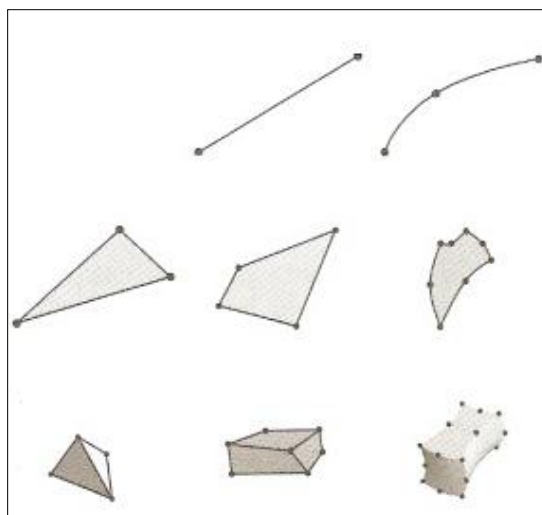


Figura 02 – Alguns tipos de elementos finitos para 1,2 e 3 dimensões
Fonte: Silva, 2009

Outro fator relevante para a convergência, além do grau de aproximação é a escolha do número de elementos. Aumentando a quantidade de elementos, reduz-se a diferença entre a malha e a superfície real, conforme Figura 03, e, ao passo que o tamanho dos elementos tende a zero e o número de nós tende ao infinito teoricamente obtém-se solução exata. A consequência disto se dá pelo aumento no tempo de processamento dos dados e aumento do custo computacional (BATHE, 1982; SOUTO FILHO, 2003; SOUZA, 2003).

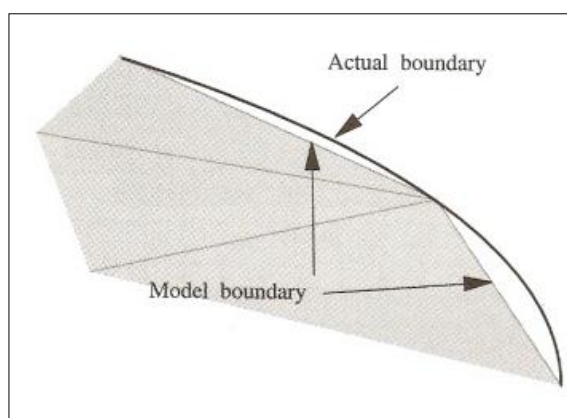


Figura 03 – Diferença entre a malha de elemento finito e a superfície real
Fonte: Silva, 2009

Um tipo de elemento que vem sendo bastante empregado são os elementos isoparamétricos, que conseguem se adaptar melhor aos limites físicos do modelo, pois sua geometria é composta pela combinação de polinômios, podendo possuir contorno curvo e suave. Conforme explica Ribeiro

(2004), o uso de elementos isoparamétricos vem se tornando padrão, visto que na prática os elementos encontram-se distorcidos ou inclinados em relação ao eixo das coordenadas, o que dificulta a sistematização do cálculo das integrais. Bathe (1982) também afirma que os elementos isoparamétricos são mais eficientes para as situações práticas.

1.2.2 Dinâmica das Estruturas

Em virtude do surgimento de projetos de construções mais esbeltas e leves, estimulado pelo emprego de materiais mais resistentes e o desenvolvimento de obras industriais de suporte a equipamentos a análise dinâmica de estruturas tem ganhado cada vez mais importância no Brasil (LIMA e SANTOS, 2008; SANCHES, 2011).

A análise dinâmica é também uma ferramenta interessante que pode ser empregada para auxiliar na verificação da integridade e segurança de uma estrutura, posto que cada estrutura possui frequência e modos de vibrar particulares e ao sofrer alterações (danos, fissuras) esses parâmetros são alterados também, o que torna possível a identificação e localização dos mesmos, bem como a detecção da mudança no seu módulo de elasticidade (deformabilidade). Esse tipo de ensaio fornece informações globais da estrutura podendo ser repetido e comparado ao longo do tempo, além de apresentar baixo custo, rapidez e confiabilidade é interessante para estudos de danificação progressiva de elementos de concreto (ALMEIDA e HANAI, 2008).

O objetivo da análise dinâmica é determinar o deslocamento, a velocidade e a aceleração dos graus de liberdade da estrutura, e conseqüentemente, as tensões que são provocadas por um carregamento (em determinado instante). A partir disto, obtêm-se os deslocamentos e esforços internos da estrutura (GRECO et al. 2010).

Para se resolver a equação da quantidade de movimento e descrever a movimentação de uma estrutura ao longo do tempo podem ser empregados métodos de integração direta, nos quais a estrutura é estudada no domínio do tempo, descrevendo-se todo o movimento, ou de análise modal, na qual busca-se identificar os principais modos de vibrar e frequências naturais da estrutura

para, em função desses, descrever o movimento da mesma (WARBURTON, 1976).

Os métodos de integração direta podem ser explícitos ou implícitos. No primeiro a variável básica (geralmente deslocamento) é determinada com base nas condições de velocidade e aceleração do instante anterior, já no caso da implícita, além de se basear no passo anterior, requer-se também resultados do passo atual, ou seja, a variável básica é função dela mesma, o que implica que para determiná-la as condições de equilíbrio no passo de tempo atual devem ser respeitadas (WARBURTON, 1976).

Para o caso de análise dinâmica não linear geométrica os métodos de integração implícita são mais convenientes, dentre os quais destaca-se na literatura o integrador temporal de Newmark, que será empregado no presente trabalho.

1.2.3 Análise Não Linear Geométrica

Na análise não linear geométrica considera-se o equilíbrio na configuração atual, deformada e deslocada, o que conduz a resultados adequados mesmo em situações de grandes deformações e deslocamentos, onde a configuração final do sólido é bem diferente da configuração inicial (OGDEN, 1984). Essa descrição do equilíbrio também é conhecida como cinematicamente exata.

Para que se possa descrever a mudança de configuração de um sólido é necessário definir o referencial, que pode ser fixo no caso da descrição Lagrangeana, ou móvel no caso da descrição Euleriana. Quando empregamos a descrição Lagrangeana (ou material) o movimento é expresso em termos da configuração inicial e do tempo, o que a torna muito eficiente quando se deseja determinar os deslocamentos dos pontos de um corpo a partir de sua forma inicial. Já a descrição Euleriana (ou espacial), é definida em termos da configuração deformada e do tempo, sendo muito aplicada em problemas onde as variáveis geralmente são velocidades e não deslocamentos. (SANCHES, 2008)

A não linearidade, tanto geométrica quanto física em pórtico vem sendo estudada há certo tempo, sendo que a introdução da não linearidade geométrica na análise de estruturas é atribuída a Turner et al.(1960) apud Araripe(1998) e a adição da não linearidade física em modelos numéricos considerando os materiais elasto-plásticos, a Gallagher (1962) apud Araripe (1998).

Dentre os estudos desenvolvidos a respeito da análise não linear geométrica, destaca-se a formulação corrotacional (PINTO, 2002; BELO, 2009; e CARVALHO, 2010). Segundo Gelatti (2012), nesta formulação o eixo de referência é subdividido em um eixo para o movimento de corpo rígido e outro associado às deformações, permitindo assim a ocorrência de grandes deslocamentos e deformações.

Belo (2009) apresenta como desvantagem da formulação corrotacional, a necessidade de um número elevado de elementos para obter bons resultados, o que para pórticos planos de grande porte torna-se ineficiente devido o número de graus de liberdade.

O que tem se apresentado como uma boa ferramenta para desenvolver análise não linear geométrica é chamada formulação baseada em posições, recentemente apresentada por Bonet et. al (2000) e Coda (2003), chamada aqui de formulação posicional. Nessa formulação as variáveis nodais são as posições (coordenadas) ao invés do deslocamento, o que proporciona algumas simplificações no desenvolvimento dos cálculos.

A formulação posicional tem como vantagem o fato de não possuir graus de liberdade em rotação, evitando a necessidade de se trabalhar com rotações finitas, resultando em uma matriz de massa constante o que permite o emprego do método de Newmark conservando-se a quantidade de movimento, bem como a energia em determinadas condições (SANCHES e CODA, 2013).

A formulação posicional tem se mostrado muito robusta e produzido resultados muito bons, conforme pode ser visto nos trabalhos de Greco e Coda (2004), Coda e Paccolla (2007), Maciel (2008), Coda (2009), e por isso é escolhida para este estudo.

1.2.4 Teorias Cinemáticas

Dentre as hipóteses cinemáticas empregadas para análise de estruturas, tem-se a Teoria de Euler-Bernoulli e Timoshenko, para vigas e arcos, e de Love-Kirchoff e Reissner-Mindlin, para placas delgadas e espessas, respectivamente. A diferença básica entre essas teorias se dá pela consideração da deformação causada pelas tensões de cisalhamento atuante na peça. No caso da teoria de Euler Bernoulli, a aproximação realizada é válida apenas quando são analisadas peças robustas. Já no caso da teoria de Timoshenko a deformação pela cortante passa a ser considerada, com resultado indiferente ao tipo da peça (FONSECA, 2011).

A cinemática de Reissner empregada neste trabalho é equivalente a Teoria de Timoshenko e contrária a de Euler Bernoulli, pois esta considera a deformação causada pelas tensões de cisalhamento, o que implica em afirmar que a seção transversal reta, permanece plana, entretanto, não necessariamente perpendicular à linha neutra da peça. (MACIEL, 2008)

1.2.5 Funções de forma B-Splines e o Método dos Elementos Finitos

A representação de curvas suaves, como o casco de um navio e a fuselagem de um avião era um desafio em tempos em que não havia auxílio do computador e tornou-se um problema crítico principalmente para o setor de construção naval, que para obter a forma almejada acabava elaborando seus projetos em tamanho real (ou quase real), necessitando portanto de uma grande área onde o desenhista se utilizava de longas tiras, magras e flexíveis chamadas de *spline* e de pesos (*ducks*) posicionados em pontos estratégicos dessas tiras de modo que possibilitasse a formação de curvas suaves. (DEBOOR; 1978, apud. MINETTO; 2003).

A partir disto e com o posterior aparato do computador, tal técnica foi matematicamente modelada, gerando assim as funções Splines, que por sua vez são consideradas uma evolução das curvas de Bézier. No início dos anos 60 houve várias publicações sobre o assunto, sendo que os créditos pela utilização dessas funções para modelar automóveis foi reivindicado por

Casteljau, da Citröen, Bézier, da Renault e De Boor da General Motors. (CASTELJAU; 1993, apud. MINETTO, 2003).

As Splines podem ser definidas pela combinação linear de funções menores, denominadas B-Splines. Sanches (2011) cita como vantagens desta, a positividade, oscilação numérica baixa em comparação com polinômios de Lagrange de alto grau, e sua continuidade extra, que segundo Strang e Fix (2008) justifica seu emprego como base aproximadora no MEF, pois reduz a dimensão do espaço teste sem destruir o grau de aproximação.

Com base nas características apresentadas acerca desse tipo de função e ao fato desta tornar viável a conversação entre projeto e análise, o que pode possibilitar a otimização do processo, de modo a reduzir os erros entre um processo e outro, principalmente no que se refere à formação da malha de elementos finitos, pode-se afirmar que as Splines e funções correlacionadas se tornam bastante atrativas para serem empregadas como funções de forma para o MEF (SANCHES, 2011).

Entretanto devido a característica não-local, as splines possuem a desvantagem de não atender um requisito do MEF, que é o cumprimento das condições de contorno essenciais (STRANG E FIX, 2008).

Assim, alguns autores se propuseram a solucionar esse impasse, para empregar de maneira eficiente funções de forma B-splines em mecânica computacional, sugerindo algumas modificações. Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005), propõem o emprego das B-Splines Racionalizadas Não Uniformes (*Non Uniform Rational B-Splines* - NURBS), Hölling et. al (2002) apresenta as B-Splines Ponderadas Estendidas (*Weighted Extended B-splines*, ou Web-splines) e Sanches, Borneman e Cirak (2011) introduzem as B-Splines Imersas ponderadas racionalizadas (ou I-splines).

1.3 OBJETIVOS

O objetivo geral do presente trabalho consiste em realizar análise dinâmica não linear geométrica de estruturas de barra empregando o Método dos Elementos Finitos com formulação posicional e funções B-Splines não uniformes.

1.3.1 Objetivos Específicos

Para se atingir o objetivo geral com êxito, alguns objetivos específicos são delimitados:

- Estudar a formulação posicional para análise não linear geométrica de pórticos;
- Estudar as funções B-splines não uniformes;
- Implementar as funções de forma B-splines não uniformes no programa Fluidstruc2d de Sanches e Coda (2006 e 2008).
- Validar o modelo desenvolvido e verificar a eficiência e robustez obtida nos resultados, fazendo-se uma breve comparação com os polinômios de Lagrange.

1.4 JUSTIFICATIVA

Os programas de CAD (*Computer Aided Design*), bem como CAM (*Computer Aided Manufacturing*) empregam largamente funções B-Splines e funções correlatas, como as NURBS (*Non uniform rationalized B-Splines*), no entanto, os programas de análise estrutural via Método dos Elementos Finitos em geral empregam polinômios de Lagrange ou de Hermite como funções de forma. Esse fato gera um impasse na integração CAD x análise estrutura, demandando esforços para criação de malha e podendo gerar erros durante esse processo.

A escolha adequada das funções de forma está diretamente associada com a convergência e com a robustez do MEF. As funções de forma do tipo B-splines possuem propriedades bastante atrativas ao método dos elementos finitos, que geram vantagens em relação aos polinômios de Lagrange. Uma das vantagens está relacionada com suas propriedades de positividade e suavidade, o que as leva a não apresentar variações quando da representação de descontinuidades o que não ocorre com as outras bases polinomiais geralmente utilizadas no MEF (SANCHES, 2011).

Entretanto, devido à natureza não local das funções B-splines, estas não satisfazem diretamente as condições de contorno essenciais. No caso de

elementos de pórtico isso pode ser satisfeito empregando-se B-Spline não uniformes nos elementos das extremidades.

Ao se propor empregar funções de forma B-spline não uniformes a uma formulação atual e que demonstra-se eficiente, que é a formulação posicional para análise dinâmica não linear de estruturas introduzida por Coda (2003), dá-se um importante passo em se obter um programa de análise estrutural eficiente que possa ser integrado a programas de CAD ao mesmo tempo em que torna-se possível verificar as reais vantagens das funções de forma B-Splines quando aplicadas à análise dinâmica em formulação posicional.

1.5 METODOLOGIA

Para a realização do presente estudo é necessário um bom conhecimento prévio acerca do MEF em abordagem posicional, bem como das funções aproximadoras B-Splines, o que faz com que a primeira etapa seja um aprofundamento teórico acerca desses assuntos.

Na sequência o estudo é conduzido utilizando-se o módulo de análise não linear geométrica de estruturas de barras do programa Fluidstruc2d de Sanches e Coda (2006 e 2008). Primeiramente faz-se necessário o estudo e entendimento do funcionamento do programa em questão e da linguagem de programação Fortran, na qual o programa foi desenvolvido.

As novas funções de forma são implementadas em substituição aos polinômios de Lagrange da versão original do programa, para tal modifica-se também a estrutura de entrada de dados, cálculo de tensões e saída para pós processamento. Finalmente o modelo numérico é validado por comparação com soluções analíticas e numéricas da literatura. O desempenho das B-Splines não uniformes também é comparado com o dos polinômios de Lagrange

2 MEF EM FORMULAÇÃO POSICIONAL NÃO LINEAR GEOMÉTRICA

Neste capítulo a formulação posicional empregada é descrita bem como a cinemática adotada para os elementos de pórtico e o procedimento de solução do problema não linear.

2.1 MUDANÇA DE CONFIGURAÇÃO

Por se tratar de uma análise não linear geométrica, deve-se tomar como referência a configuração final de um corpo. Para tal emprega-se uma função de mudança de configuração χ , que segundo Ogden (1984) e Coda (2003), é capaz de definir a posição na configuração final, $x(x_1, x_2, x_3)$ de um ponto em um dado tempo, t , em termos da posição na configuração inicial, $X(X_1, X_2, X_3)$, ou seja, $x = \chi(\vec{X}, t)$, como ilustra a Figura 04.

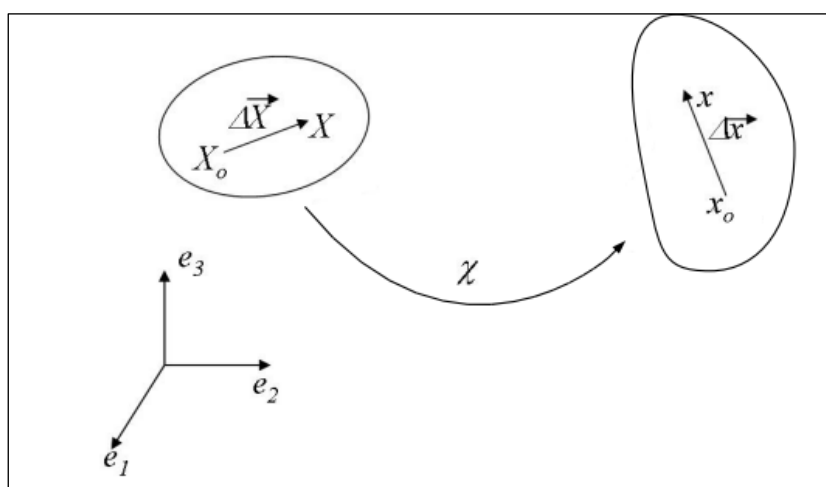


Figura 04 – Mudança de Configuração
Fonte: Sanches, 2011

Através desta função χ , é possível obter o deslocamento, $\Delta \vec{x}$, fazendo-se uma aproximação por série de Taylor em torno de X_0 , conforme equação 2.1.

$$\Delta \vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_0 = \left[\vec{x}_0 + \nabla \left(\chi(\vec{X}, t) \right) * \Delta \vec{X} + O^2(\Delta \vec{X}) \right] - \vec{x}_0 \quad (2.1)$$

De modo que, quando tem-se $\Delta\vec{x}$ infinitesimal, conclui-se que:

$$d\vec{x} = \nabla(\chi(\vec{X}, t)) d\vec{X} = \nabla(x(\vec{X}, t)) d\vec{X} \quad (2.2)$$

Posto isso, denomina-se de A o gradiente da função mudança de configuração em relação à posição X_j :

$$A_{ij} = \frac{\partial \chi_i(\vec{X}, t)}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i(X, t)}{\partial X_j} \quad (2.3)$$

para i e $j = 1, 2, 3$ (eixo x, y, z). "A", funciona como um operador linear entre o segmento infinitesimal referido e é não singular, ou seja, admite inversa, dado que seu determinante é sempre diferente de zero, pois, conforme Sanches (2008), a menos que $d\vec{x}$ seja nulo, $d\vec{X}$ jamais o será. Logo, com $\det(A) \neq 0$, tem-se que, $\det(A) = J$, onde J é o jacobiano da mudança de configuração que também representa a variação do volume do corpo.

Para a variação da área do corpo emprega-se a fórmula de Nanson:

$$dA\vec{n} = JB\vec{N}dA_0, \quad (2.4)$$

onde $B = (A^T)^{-1}$

2.2 DEFORMAÇÃO

A deformação, ε , de um sólido pode ser dada, por unidade de comprimento ou apenas pela medida do alongamento/encurtamento sofrido pelo mesmo.

No caso da medida de deformação para uma análise não linear geométrica, usa-se fazer a diferença dos quadrados dos módulos dos vetores $d\vec{x}$, na configuração final e $d\vec{X}$, na configuração inicial, conforme a equação (2.5).

$$|\overrightarrow{dx}|^2 - |\overrightarrow{dX}|^2 \quad (2.5)$$

Para que esta equação seja desenvolvida é necessário proceder com algumas manipulações algébricas, nas quais se faz necessário o uso do tensor de alongamento a direita de Cauchy-Green, C , o tensor de deformação de Green-Lagrange, E , e o tensor identidade de segunda ordem, I .

O tensor de alongamento de Cauchy Green, dado pela equação (2.6):

$$C = AA^T \quad (2.6)$$

Este tensor estabelece uma condição de indeformabilidade do corpo material quando é igual ao tensor identidade de segunda ordem ($C = I$), deste modo a função mudança de forma refere-se apenas a movimento de translação ou rotação de corpo rígido, sem deformação. Porém, quando isto não ocorre, fazendo a diferença entre esse tensor e a matriz identidade ($C - I$), tem-se, de certo modo, a medida da intensidade da mudança de configuração. (CODA, 2003).

Já o tensor de deformação de Green-Lagrange, expresso na equação (2.7), sob notação indicial, é empregado para medir a intensidade da mudança de forma (PASCON, 2008).

$$E_{ij} = \left(\frac{1}{2} C_{ij} - \delta_{ij} \right) \quad (2.7)$$

para $i=1,2,3$. Onde δ_{ij} é o delta de Kronecker (1 quando $i=j$; 0 quando diferente).

Por fim, retoma-se a equação (2.5), procedendo conforme Sanches (2008):

$$|\vec{dx}|^2 - |\vec{dX}|^2 = d\vec{X}.Cd\vec{X} - d\vec{X}.d\vec{X} = d\vec{X}.(C - I).d\vec{X} = d\vec{X}.2Ed\vec{X} \quad (2.8)$$

2.3 TENSÕES

Segundo o Princípio de Cauchy, ao seccionar um corpo sobre qual atuam forças externas superficiais, verifica-se que a resultante das forças internas distribuídas sobre o plano de corte equivale-se as forças externas atuantes.

Logo, ao definir-se uma área superficial infinitesimal deste plano de corte, tem-se que a força atuante é dada pela equação 2.9:

$$d\vec{f} = \vec{t} \cdot dA = \sigma_{ij} \cdot \vec{n}_j \quad (2.9)$$

onde $\vec{t} = (\vec{x}, t, \vec{n})$ é o tensor de forças de superfícies de Cauchy, definido em um dado tempo, t , por um vetor, \vec{n} , normal a superfície infinitesimal; dA é a medida infinitesimal da área com relação a configuração final deste corpo; e σ_{ij} é o tensor das tensões de Cauchy.

Tendo em vista que a equação 2.9 está definida com referência na configuração final do corpo e que ao realizar uma análise não linear geométrica, em princípio, não se conhece esta posição, então, faz-se necessário que a mesma seja definida em termos da configuração inicial do corpo:

$$d\vec{f} = \vec{T} \cdot dA_0 = P^T_{ij} \cdot \vec{N}_j \quad (2.10)$$

onde $\vec{T} = (\vec{X}, t, \vec{N})$, é o tensor de forças de Piola-Kirchoff de primeira espécie, definido em um dado tempo, t , por um vetor, \vec{N} , normal a superfície infinitesimal; dA é a medida infinitesimal da área com relação a configuração inicial deste corpo; e P^T_{ij} é o tensor das tensões de Piola-Kirchoff.

Ao correlacionar esses dois tensores, (equação 2.9 e 2.10), tem-se:

$$\vec{T} = \frac{\vec{t} \cdot dA}{dA_0} \quad (2.11)$$

Ao isolar dA_0 da fórmula de Nanson (2.4), obtém-se:

$$dA_0 = \frac{dA \cdot \vec{n}}{J B \vec{N}} \quad (2.12)$$

Substituindo a equação 2.12 na equação 2.11, tem-se a equação 2.13:

$$T = \frac{\vec{t} J B \vec{N}}{\vec{n}} \quad (2.13)$$

E, enfim define-se o tensor das tensões de Piola-Kirchoff em termos do tensor das tensões de Cauchy

$$\vec{T} = P^T \cdot \vec{N}_j = \sigma_{ij} \cdot A^{-T} \cdot J \cdot \vec{N}_j \quad (2.14)$$

A correlação entre as tensões e deformações, necessária para solucionar as equações de equilíbrio dos sólidos se dá por meio de uma lei constitutiva adequada. Conforme explica Fonseca (2011) a correlação inadequada é um erro comum, presente inclusive em programas comerciais de elementos finitos.

Em problemas onde emprega-se o tensor das tensões de Piola Kirchhoff e o tensor de deformações de Green-Lagrange, pode-se empregar com segurança a lei de Saint-Venant-Kirchhoff, que trata de uma generalização da Lei de Hooke e representa a relação linear entre esses dois tensores (SANCHES, 2011).

A energia de deformação específica para a deformação de Green-Lagrange é expressa pela equação 2.15 (SANCHES, 2011).

$$u_e = \frac{1}{2\nu} E_{ij} D_{ijkl} \mathbf{E}_{kl} = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{D} : \mathbf{E} \quad (2.15)$$

onde D é um tensor de quarta ordem, chamado tensor de modos elásticos de rigidez; E é o módulo de elasticidade e \mathbf{E} é o tensor de deformação de Green-Lagrange.

Ao procedermos com a derivada de u_e , obtém-se S , que é denominado tensor da tensão de Piola Kirchhoff de segunda espécie. (SANCHES, 2011)

$$S = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\text{tr } \mathbf{E}] \mathbf{I} + 2G\mathbf{E} \quad (2.16)$$

Sendo ν o coeficiente de Poisson; G o módulo de elasticidade transversal.

Segundo Pascon (2008) e Sanches (2011), a lei de Saint Venant Kirchhoff é empregada com segurança apenas nos casos onde ocorrem pequenas deformações e grandes deslocamentos.

2.4 FUNCIONAL DE ENERGIA

O funcional de energia potencial total, Π , que é dado por:

$$\Pi = U_e + K_C + K_a - P \quad (2.17)$$

onde:

U_e é o potencial de energia específica de deformação elástica, dada por:

$$U_e = \int u_e dV_0 \quad (2.18)$$

K_C é a energia cinética do corpo, dada pela integral da densidade específica do corpo no referencial lagrangeano, ρ_0 , e da velocidade vetorial no ponto material, \dot{x} , ao longo do volume inicial do corpo:

$$K_C = \int \rho_0 \frac{\dot{x} \cdot \dot{x}}{2} dV_0 \quad (2.19)$$

P é o potencial das forças conservativas externas; dado pelo produto do vetor de forças aplicadas, F^T , pelo vetor da posição das forças aplicadas, X :

$$P = F^T X \quad (2.20)$$

K_a é energia dissipada devido ao amortecimento (onde c_m , a constante de amortecimento), dada por:

$$\frac{\partial K_a}{\partial x_i} = \int \frac{\partial K_a}{\partial x_i} dV_0 = \int c_m \rho_0 \dot{x} dV_0 \quad (2.21)$$

Enfim que o funcional de energia potencial (2.17), pode ser reescrito conforme Equação 2.22:

$$\Pi = \int u_e dV_0 + \int \rho_0 \frac{\dot{x} \cdot \dot{x}}{2} dV_0 + \int c_m \rho_0 \dot{x} dV_0 - F^T X \quad (2.22)$$

Para obter a solução deste funcional emprega-se o princípio da mínima energia potencial pertencente ao cálculo variacional, através do qual define-se o ponto de equilíbrio do sistema ou ponto de mínimo, ao fazer, $\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = 0$, para um dado tempo, t , sendo x_i a posição desconhecida no equilíbrio do corpo. (MACIEL, 2008)

2.5 FORMULAÇÃO POSICIONAL PARA ELEMENTOS DE BARRA

Na formulação Lagrangeana posicional, tem-se como incógnitas as posições na configuração atual da estrutura, que são prioritariamente, determinadas para então, ser calculadas as deformações em relação à configuração inicial e tensões.

Sabe-se que elementos de barra caracterizam-se por possuir uma dimensão muito maior do que as outras. Devido a isso o mapeamento da estrutura inicia-se pela linha média da barra, sendo definidas as funções mudança de configuração fictícias, f_i^{m0} , dado pela equação 2.23 e f_i^{m1} , dado pela equação 2.24, as quais relacionam a posição dos pontos pertencentes a linha média no espaço adimensional auxiliar com os mesmos pontos na configuração inicial e final da estrutura, respectivamente, conforme ilustra-se na Figura 05.

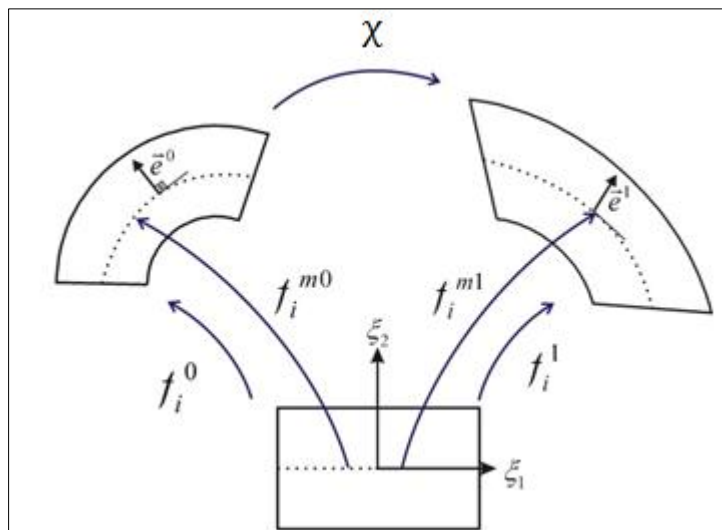


Figura 05 – Mapeamento posicional de elementos de barra (modificado)
Fonte: Sanches e Coda, 2008

$$f_i^{m0} = X_i^m(\xi_1, X_{ji}) = N_j(\xi_1)X_{ji} \quad (2.23)$$

$$f_i^{m1} = x_i^m(\xi_1, x_{ji}) = N_j(\xi_1)x_{ji} \quad (2.24)$$

Onde X_{ji} e x_{ji} são respectivamente a coordenada inicial e final, dos nós (com j =nó e i =direção $x,y,z \equiv 1,2,3$); e $N_j(\xi_1)$ são as funções de forma do nó j .

Para os pontos contidos fora da linha média, tem-se a equação 2.25 e 2.26, definidas em função do ponto correspondente a linha média.

$$X_i = X_i^m + \frac{h(\xi_1)}{2} e_i^0(\xi_1) \xi_2 \quad (2.25)$$

$$x_i = x_i^m + \frac{h(\xi_1)}{2} e_i^1(\xi_1) \xi_2 \quad (2.26)$$

Onde e_{ij}^0 é o valor nodal do vetor unitário normal à superfície média no ponto j , da configuração inicial.

A partir das equações 2.23 a 2.24, definem-se funções genéricas para a mudança de configuração para um elemento de barra:

$$f_i^0 = X_i = N_j(\xi_1) X_{ji} + \frac{h}{2} \xi_2 N_j(\xi_1) e_{ij}^0 \quad (2.27)$$

$$f_i^1 = x_i = N_j(\xi_1) x_{ji} + \frac{h}{2} \xi_2 N_j(\xi_1) e_{ij}^1 \quad (2.28)$$

No caso do mapeamento real, descrito por χ (da configuração inicial para final) tem-se:

$$\chi = \vec{\chi}(\vec{X}) = (\vec{f}^1) \circ (\vec{f}^0)^{-1} \quad (2.29)$$

Sendo A o gradiente de f , e A_{ij}^0 e A_{ij}^1 o gradiente da função f_i^0 e f_i^1 , respectivamente, em relação ao eixo auxiliar, então:

$$A = \nabla(\chi) = \frac{\partial \chi}{\partial X} = (A^1)(A^0)^{-1} \quad (2.30)$$

Ao discretizarmos uma estrutura em elementos finitos, a posição, velocidade e aceleração dos pontos nodais são redefinidas como sendo uma combinação linear das mesmas com as funções de forma (N) pertinentes a cada elemento, conforme as equações (2.31), (2.32), (2.33):

$$x = \sum N_j X_i \quad (2.31)$$

$$\dot{x} = \sum N_j \dot{X}_i \quad (2.32)$$

$$\ddot{x} = \sum N_j \ddot{X}_i \quad (2.33)$$

Posto isto, $\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = 0$, pode ser escrito da seguinte forma:

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}\right)_{s+1} = \left(\frac{\partial U_e}{\partial X}\right)_{s+1} + (M\ddot{X})_{s+1} + (C\dot{X})_{s+1} - (F)_{s+1} = 0 \quad (2.32)$$

onde, $M = \int \rho_0 N_j N_j dV_0$; $C = 2c_m M$

2.5.1 Solução do problema não linear

A solução para o funcional de energia que descreve um problema pode ser obtida por meio de vários métodos, dentre eles o Método de Rayleigh Ritz, que é utilizado neste trabalho e consiste na substituição da função exata $y(x)$ que minimiza o funcional, por uma função aproximadora $v(x)$, que é obtida por meio da combinação linear das funções de forma de cada elemento, conforme a equação 2.33:

$$y(x) = v(x) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot N_i(x) \quad (2.33)$$

sendo a_i , um coeficiente denominado de parâmetro nodal, obtido através da aplicação das condições de contorno.

Após definir a função aproximadora esta é substituída no funcional minimizado, sendo que para obter uma sequência de soluções convergentes para solução exata, a função $v(x)$ deve ser contínua até uma ordem menor do que a maior derivada do integrando, cada função de forma $N_i(x)$ deve satisfazer as condições de contorno e a sequência de funções deve ser completa, ou seja, a diferença entre a solução exata da aproximada deve atender a tolerância do erro estipulada. Se isso não ocorrer o número de termos da função aproximadora pode ser aumentado, melhorando em geral, a solução (ASSAN, 2003).

Após obter a equação capaz de minimizar o funcional através do método de Rayleigh Ritz, a resolução deste é obtida empregando-se o método de iterativo de Newton-Raphason e o integrador temporal de Newmark, tendo em vista que o problema a se analisar é dinâmico e também não linear.

Deste modo, as posições e velocidades (e também aceleração) atuais, são primeiramente aproximadas de acordo com as equações de Newmark:

$$X_{S+1} = \Delta t \dot{X}_S + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) X_S'' + \beta \cdot \ddot{X}_{S+1} \right] \quad (2.34)$$

$$\dot{X}_{S+1} = \dot{X}_S + \Delta t \left[(1 - \gamma) X_S'' + \gamma \cdot \Delta t \cdot \ddot{X}_{S+1} \right] \quad (2.35)$$

sendo que a aceleração é obtida fazendo uma manipulação algébrica das equações (2.34) e (2.35):

$$\ddot{X}_{S+1} = \frac{X_{S+1}}{\beta \Delta t^2} - \frac{X_S}{\beta \Delta t^2} - \frac{\dot{X}_S}{\beta \Delta t} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{X}_S \quad (2.36)$$

onde β e γ são os parâmetros de Newmark.

Na formulação clássica de Newmark, tem-se $\beta=0,25$ e $\gamma=0,5$, entretanto para problemas de impacto onde geralmente existem frequências altas, os parâmetros apresentam-se ineficientes. (SOLBERG e PAPADOPOULOS,1998, apud. MACIEL, 2008). Em virtude do inconveniente, para problemas de impacto será empregado parâmetros modificados, com $\beta=0,5$ e $\gamma =1,5$, conforme sugere Greco (2004).

Ao substituir a equação (2.34) e (2.35) na derivada da equação do movimento (2.32), tem-se:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial X_{S+1}} = \frac{\partial U_e}{\partial X_{S+1}} + \frac{M}{\beta \Delta t^2} \dot{X}_{S+1} - M Q_S + C R_S + \frac{\gamma C}{\beta \Delta t} X_{S+1} - F_{S+1} - \gamma \Delta t C Q_S = 0 \quad (2.37)$$

Sendo Q_S e R_S vetores de contribuição dinâmica das variáveis do passo anterior, dados por:

$$Q_S = \frac{X_S}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{X}_S}{\beta \Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{X}_S \quad (2.38)$$

$$R_S = X_S + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{X}_S \quad (2.39)$$

Definida a equação (2.37), emprega-se o método iterativo de Newton-Raphason de faz-se para um ΔX , uma expansão em série de Taylor e calcula-se o vetor desbalanceado com uma posição tentativa (que foi arbitrada) e a matriz Hessiana, que é dada pela derivada da equação 2.37.

Em seguida calcula-se pela relação entre o vetor desbalanceado pela matriz Hessiana, a variação da posição tentativa, que será usada para corrigir a esta (posição tentativa), usada inicialmente.

Se relação entre a variação da posição com o vetor desbalanceado for menor que a tolerância estipulada para o método, encontrou-se a posição de equilíbrio, porém, se isso não ocorrer, o processo é repetido empregando como posição tentativa a posição encontrada na primeira interação.

Deve-se ressaltar que para cada passo de tempo, tanto posição, quanto velocidade e aceleração devem ser atualizadas.

Abaixo, apresenta-se (de maneira idêntica) o passo a passo desenvolvido por Marques (2003, apud. Maciel, 2008), o qual permite melhor visualização do que foi descrito acima a respeito da resolução do problema dinâmico não linear descrito pela equação (2.37):

- 1) Define-se um intervalo de tempo Δt ,
- 2) Calcula-se a posição e velocidade ($s=0, \Delta x=0$)
- 3) Calcula-se o vetor de forças desequilibradas (vetor resíduos)

$$g_0 = F_0 - C\dot{X}_0 - \left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)_0$$

- 4) Calcula-se a aceleração $X = M^{-1} \left[F_0 - C\dot{X}_0 - \left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)_0 \right]$

Para incrementos de tempo

- 5) Atualização da posição $\rightarrow X_{s+1} = X_s + \Delta x$
- 6) Atualização da aceleração $\rightarrow \ddot{X}_{s+1} = \frac{X_{s+1}}{\beta \Delta t^2} - Q_s$
- 7) Atualização da velocidade $\rightarrow \dot{X}_{s+1} = \dot{X}_s + \Delta t \left[(1 - \gamma)\ddot{X}_s + \gamma \cdot \Delta t \cdot \ddot{X}_{s+1} \right]$
- 8) Cálculo do vetor desequilibrado para o novo passo de tempo \rightarrow

$$g = F_{int} - F_{s+1} + \frac{M}{\beta \Delta t^2} \dot{X}_{s+1} - M Q_s + C R_s + \frac{\gamma C}{\beta \Delta t} X_{s+1} - \gamma \Delta t C Q_s = 0$$

- 9) Cálculo do erro e verificação da convergência $\rightarrow \frac{\|\Delta X\|}{\|X_0\|} \leq \text{tolerância}$
- 10) Atendido o critério de convergência, seguir para 11, senão, voltar para 05.

- 11) Atualiza-se as variáveis de passado \rightarrow

$$X_s = X_{s+1}$$

$$\dot{X}_s = \dot{X}_{s+1}$$

$$\ddot{X}_s = \ddot{X}_{s+1}$$

- 12) Voltar para 05, com um novo passo de tempo.

3 B-SPLINES

As funções Splines são uma versão aprimorada das curvas de Bézier e seu uso para modelagem geométrica de curvas e superfícies demonstra-se mais vantajosa, pois possui controle local, o que evita que a alteração de um ponto modifique toda a forma da curva e o grau da curva não depende do número de pontos de controle, logo, o uso de um número elevado de pontos de controle não gera um custo computacional alto na geração da curva, no caso das Splines o grau da curva interfere apenas na continuidade da mesma. (CRUZ, ESCRIBA e FELIPE, 2005)

Tiller e Piegl (1997), reiteram, as funções B-Splines surgiram para aprimorar a representação de curvas suaves bem como de formas complexas, haja visto que o uso de polinômios contínuos de alto grau acabam dificultando o processo sem proporcionar a devida precisão além de se apresentar numericamente instáveis.

Uma curva B-spline é definida por um vetor de $m+1$ nós (*Knots*), um conjunto de pontos de controle, n (*nodes*) e por funções base N_i , de grau p , definidas para cada segmento. Nota-se que o termo traduzido por nós no caso dos elementos finitos refere-se aos pontos de controle, devendo o leitor estar atento ao contexto.

O vetor de nós tem a função de subdividir o domínio da curva em segmentos que devem ser compostos por números reais não-decrementados (ou seja, $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n$). Quando o espaçamento entre esses nós é igual, então o vetor é dito uniforme, porém quando há diferença no espaçamento denomina-se o mesmo de não-uniforme. No caso de haver mais de um nó ocupando a mesma posição, então, este é dito múltiplo, de multiplicidade k . Para saber se o vetor de nós é uniforme ou não, basta fazer a diferença do nó posterior pelo nó anterior ($u_{i+1} - u_i$), obtendo-se uma constante para todos os períodos de nós tem-se um vetor uniforme, senão, é não uniforme (MINETTO, 2003).

No presente trabalho fez-se uso de B-Splines não uniformes, posto que, para o cumprimento nas condições de contorno do MEF foi necessário

que as funções de forma (ou funções base) fossem definidas com os nós do contorno com multiplicidade $k=3$.

Conforme dito anteriormente, o grau da curva interfere na sua continuidade, porém, deve-se acrescentar que além do grau, o valor de k , ou seja, da multiplicidade do nó também influencia, pois a continuidade da curva é dada por C^{p-k} . Portanto no caso de nós simples e funções B-Splines cúbicas, onde $p=3$ e $k=1$, tem-se continuidade 2, (C^2). No caso em questão ($k=3$ e $p=3$), tem-se continuidade 0, ou seja, C^0 . Se houver a necessidade do nó apresentar multiplicidade e também continuidade, uma solução é aumentar o grau da função. Na Figura 06 é possível visualizar o que ocorre com a curva quando a multiplicidade de um nó aumenta.

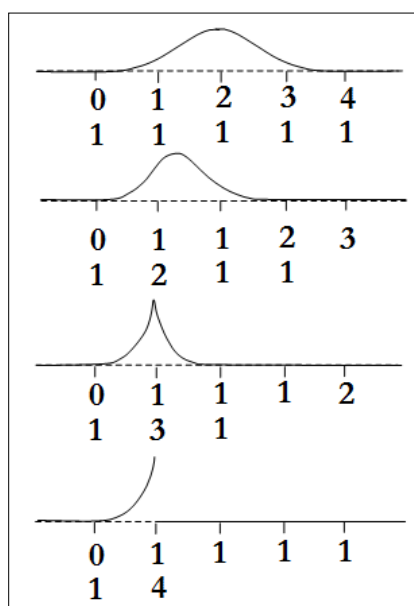


Figura 06 – Efeito do aumento de k em uma curva B-Spline
Fonte: Montenegro, 2013

Definido o número de nós e portanto a quantidade de segmentos da curva, faz-se necessário obter as funções de base (ou de forma) $N_{i,p}(u)$, que serão da mesma quantidade que o número de nós.

Segundo Tiller e Piegl, 1997, há várias maneiras de definir essas funções, porém a forma mais eficiente para implementação computacional se dá pela fórmula de recorrência de Cox de Boor (equações 3.1 e 3.2):

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{se cond. contorno} \end{cases} \quad (3.1)$$

$$N_{i,p}(u) = \left(\frac{u-u_i}{u_{i+p}-u_i}\right) * N_{i,p-1}(u) + \left(\frac{u_{i+p+1}-u}{u_{i+p+1}-u_{i+1}}\right) * N_{i+1,p-1} \quad (3.2)$$

onde i = nó e p o grau do polinômio a ser desenvolvido.

A equação 3.1 é empregada quando tem-se $p=0$, e deste modo as funções obtidas serão apenas funções de passo, ou seja, quando i (que se refere ao segmento de curva) for 1, então, no segmento 1 o valor da função é 1 e nos demais zero. Quando $i=2$, no segmento 2 o valor da função é 1 e nos demais zero e assim sucessivamente.

Já a Equação 3.2 é usada para obter funções base de grau maior, entretanto para obter as funções com $p=1$ é necessário que todas as outras funções com $p=0$ tenham sido computadas, de modo que para as outras funções segue-se a mesma lógica, pois o desenvolvimento dos cálculos se dá por meio de uma distribuição triangular, como apresentado na Figura 07.

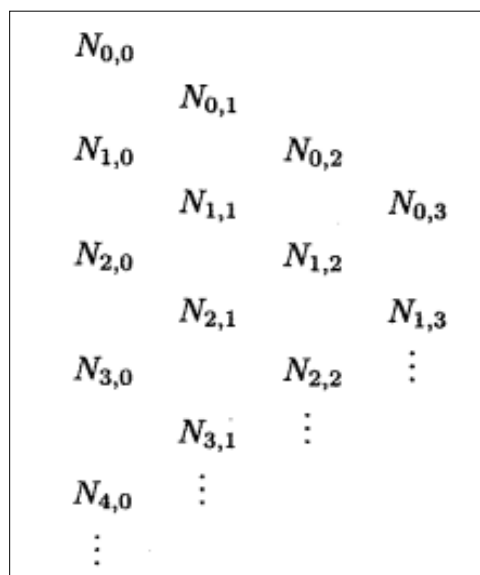


Figura 07 – Esquema de Computação Triangular
Fonte: Minetto, 2003

Em Tiller e Piegl (1997), Minetto (2003) e Hughes e Cottrell e Bazilevs (2005) são apresentados alguns exemplos de cálculo para as funções base.

Conforme dito anteriormente as funções B-Splines apresentam propriedades que tornam bastante atrativo seu emprego como função de forma para o MEF. Podemos dizer que as propriedades mais interessantes são:

- não negatividade em todo seu domínio;
- suporte local (não nula em $[u_i, u_{i+1})$);

- partição da unidade (a soma dos valores das funções base de um intervalo em um ponto qualquer é sempre 1) e;
- em qualquer intervalo no máximo $p+1$ funções base de grau p , são não-nulas.
- Redução de oscilações espúrias.

Os pontos de controle são o último requisito para que possamos definir uma curva B-Spline cúbica.

O conjunto de pontos de controle (n) deve ser composto de $m-p-1$ pontos. (MINETTO, 2003)

Os pontos de controle funcionam como pesos, distanciando ou aproximando a curva definida pelas funções B-Splines, logo, os pontos de controle não precisam necessariamente passar pela curva, podendo encontrar-se apenas próximos a ela, evitando assim a ocorrência de distorções na forma, como por exemplo, quando forçamos que uma curva passe por determinados pontos, sendo que sua geometria seria melhor representada se esses pontos permanecessem apenas próximos a curva, como na Figura 08.

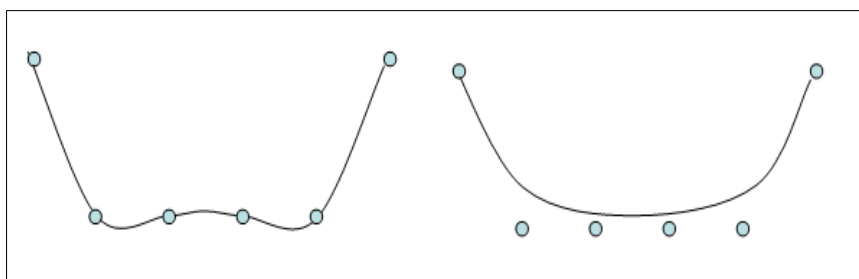


Figura 08 – Comparação da representação de uma curva
Fonte: Esperança, 2013

Os pontos de controles de uma função B-Spline, facilitam a manipulação da curva, podendo deixar a curvatura mais acentuada ou suave.

Neste trabalho, os pontos de controle foram definidos sobre a curva que se pretende aproximar não sendo analisada a manipulação dos pontos de controle para obtenção de melhores formas, o foco direcionou-se para verificação da eficiência das funções de base B-Splines não uniformes sendo que cada segmento entre nós do suporte (*knots*) é definido como elemento e possui a influência de 4 funções polinomiais cúbicas.

No espaço auxiliar dos pontos de Gauss os pontos de controle assumem a posição do nó central da B-Spline (que pode estar fora do domínio

do elemento), exceto para a B-Spline com ponto de máximo sobre o elemento que contém o nó do contorno, onde o ponto de controle fica definido no centro do elemento.

A função aproximada é definida então por meio da Equação 3.3, onde faz-se uma combinação das funções base B-Splines com os pontos de controle referente a cada nó:

$$F(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) * p_i \quad (3.3)$$

Onde:

$N_{i,p}(u)$ é a função do i -ésimo período de nó e,
 p_i é o ponto de controle do i -ésimo período.

Neste trabalho, cada ponto da função $F(u)$ é composto pela combinação linear de 4 polinômios de grau 3, sendo que cada período terá 4 funções de forma associadas a ele.

3.1 FORMA DE DISCRETIZAÇÃO PROPOSTA

3.1.1 Obtenção das Funções de Forma

A obtenção das funções de forma B-Splines de terceiro grau se deu por recorrência das equações 3.1 e 3.2, até $p=3$. Para que as condições de contorno essenciais do MEF fossem atendidas três nós das extremidades foram movidos para a mesma posição e passaram a ser de multiplicidade 3, tornando assim as funções B-Splines uniformes em não uniformes, pois tem-se diferentes espaçamentos entre os nós.

Tendo definido as funções em relação ao eixo cartesiano, a mesma é reescrita segundo coordenadas locais auxiliares adimensionais (ξ) de cada elemento no intervalo de $[-1,1]$.

Sendo os elementos os segmentos entre os nós do suporte (*knots*), nota-se que cada um deve possuir 4 nós (pontos de controle) e 4 funções de forma, sendo que, para elementos de extremidade necessita-se de um nó

adicional no meio do elemento, ao passo que os demais possuem um nó em cada extremidade e mais dois, um à esquerda e outro à direita (ver Figura 09).

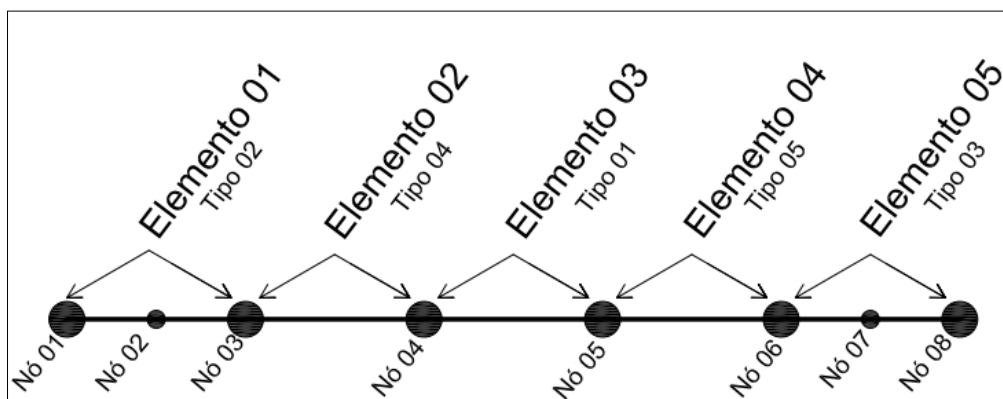


Figura 09 – Nós e elementos de uma estrutura
Fonte: O Autor, 2013

Logo, ter-se-á 5 tipos diferentes de elementos para se representar adequadamente uma barra. Isso nos leva a 20 polinômios diferentes no espaço adimensional para que as B-Splines sejam completamente representadas. Essas funções são apresentadas na Figura 10, sendo que no Anexo A as mesmas são apresentadas separadamente, para cada elemento, juntamente com a equação que a norteia e no Anexo B, tem-se o gráfico da suas derivadas, que permitem visualizar sua continuidade.

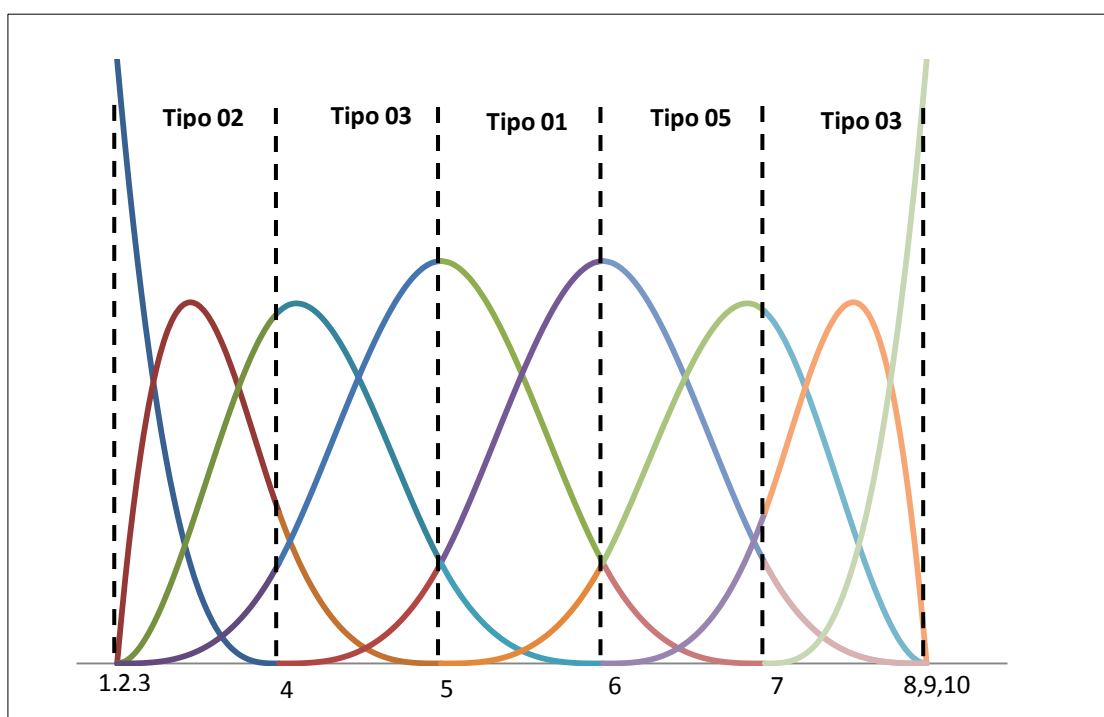


Figura 10 – Funções de forma b-spline não uniformes cúbica
Fonte: O Autor, 2013

Na implementação do programa, as 20 diferentes funções foram alocadas de maneira que ficassem vinculadas ao seu respectivo tipo de elemento, logo, ao entrarmos no pré-processamento com o dado do tipo do elemento, o programa já identifica qual a função correlata a ser usada para desenvolver os cálculos. Portanto, a entrada incorreta do dado tipo do elemento ou a alocação incorreta de uma função de forma pode gerar resultados incoerentes.

A princípio pode parecer que os elementos 2, 3 e 4 são definidos por apenas dois nós, entretanto, além destes contidos em seu domínio, há outros dois que se encontram nas extremidades, em elementos vizinhos. A adição de nós no centro de elementos de extremidade é feita para que o mesmo também seja definido por 4 nós.

Ao saber identificar os elementos e os nós de uma estrutura, é possível definir a incidência nodal (ou conectividade dos elementos), através do qual informa-se ao programa que nó está conectado ao outro. No caso da figura 12, uma estrutura linear simples, a incidência é facilmente identificada e como podemos ver na Tabela 01, os 3 últimos nós do elemento anterior são repetidos no subsequente.

Tabela 01: Incidência Nodal

Elemento	Nó início	Nós intermediários	Nó fim
1	1	2,3	4
2	2	3,4	5
3	3	4,5	6
4	4	5,6	7
5	5	6,7	8

Fonte: O Autor, 2013

3.2 O PROGRAMA

O programa utilizado como base para implementar as funções de forma B-Splines não uniforme foi o Fluidstruc2d que contempla a análise dinâmica não linear geométrica de estruturas de pórtico bidimensional, que foi desenvolvido por Sanches e Coda (2006 e 2008).

3.2.1 Pré-processamento

Devido à simplicidade da malha de elementos de barra, ainda que curvos, a geração da mesma é feita manualmente e os dados são repassados ao programa através de um arquivo de texto (*.txt), denominado arquivo de entrada. Esse arquivo possui um padrão de inserção de informações obedecendo à sequência imposta pelo programa, sendo apresentado um exemplo no Anexo C.

Durante a execução o programa solicita o nome do arquivo de entrada que deve ser lido. A partir daí o programa inicia a análise da estrutura imprimindo em arquivos de saída informações como deslocamento, tensões, dentre outras que tiverem impressão solicitada pelo programador.

Durante a execução da análise é importante verificar como a solução está convergindo, ou seja, se a modelagem utilizada está adequada ou necessita de ajustes em algum parâmetro.

Uma situação que pode requerer alterações caracteriza-se pela demora na convergência da solução, que pode estar associada a uma discretização, intervalo de tempo inadequado ou mesmo ocorrência de flambagem na estrutura.

3.2.2 Pós- processamento

O pós-processamento consiste basicamente na impressão dos resultados nos arquivos de saída, os quais são gerados em arquivos de texto (*.txt.) e na visualização e apresentação gráfica dos resultados, sendo usado para este trabalho os softwares Kitware Paraview e o Gnuplot.

O Paraview é um software de interface gráfica simples e é bastante completo. Através dele é possível visualizar a geometria do que está sendo analisado e o que ocorre com a esta no decorrer do tempo, ou seja, por meio do Paraview visualizamos os deslocamento e tensões da estrutura.

O Gnuplot é destinado para a visualização de gráficos e superfícies, possui domínio público. A forma mais prática de utilizar o programa se dá por meio de linhas de comando, que foi a utilizada neste trabalho, sendo que a

plotagem era feita recorrendo-se a um arquivo de dados (mais especificamente um arquivo de saída gerado pelo programa conforme implementação) onde encontravam-se definidos os pontos a serem plotados.

4 EXEMPLOS NUMÉRICOS E VALIDAÇÃO

Apresenta-se a seguir exemplos numéricos com o objetivo de validar o programa e comparar o desempenho das funções de forma B-Spline não uniformes como os polinômios de Lagrange.

4.1 PÓRTICO CURVO

Como na formulação posicional é necessário aproximar o vetor generalizado, inicialmente normal à linha neutra, esse exemplo tem como objetivo principal estudar o erro introduzido na análise com a aproximação desse vetor com o uso de funções B-Splines e com o uso de polinômios de Lagrange.

A partir da equação $y = \frac{2,003}{x^6} - 2,003$ modelou-se o pórtico curvo com as coordenadas apresentadas na Tabela 02, obtendo como resultado a Figura 11.

Tabela 02: Coordenadas dos nós

Nós	x	y
1	1.000	-0.003
2	1.050	0.506
3	1.100	0.870
4	1.300	1.585
5	1.700	1.917
6	2.200	1.983
7	2.600	1.994
8	3.000	1.998

Fonte: O Autor, 2013

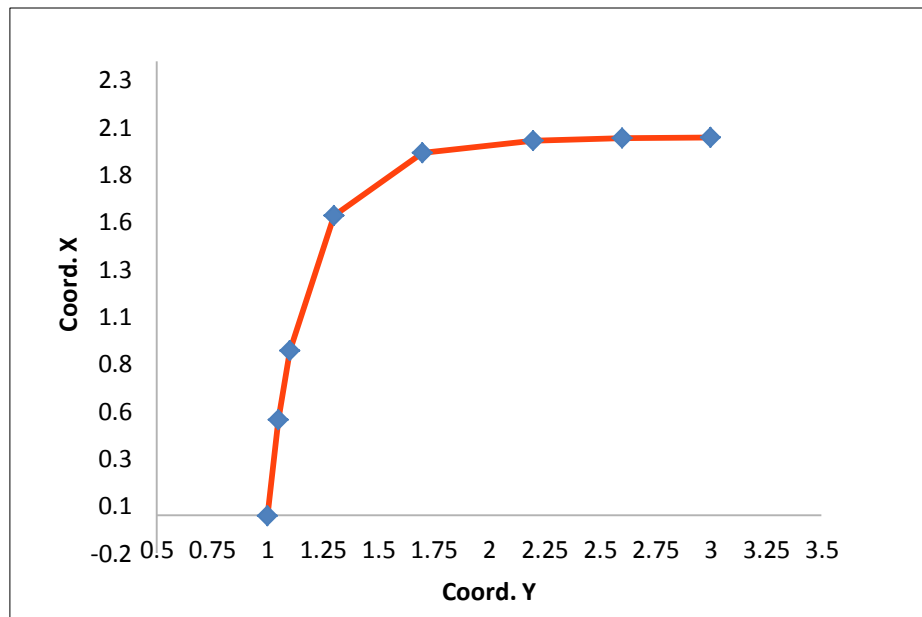


Figura 11 – Pórtico Curvo (B-Splines)
Fonte: O Autor, 2013

O pórtico para B-Spline foi discretizado em 5 elementos e 8 nós e para polinômios de Lagrange em 2 elementos e 7 nós (descartou-se a coordenada do nó 2 para tal). Essa diferença ocorre, pois no caso das B-Splines apenas 2 nós fazem parte do domínio do elemento, enquanto que para os polinômios de Lagrange todos os 4 nós fazem parte do domínio do elemento.

Analicamente a norma deste vetor deve ter valor 1, entretanto, com as aproximações, surgem erros que alteram ligeiramente esse valor.

Na Figura 12 é ilustrado um segmento de curva com seu vetor normal e componentes, sendo que:

$$n = n_x^2 + n_y^2 = 1 \quad (4.1)$$

$$n = -1 \cdot \text{sen}(\theta) \quad (4.2)$$

$$n_y = 1 \cdot \text{cos}(\theta) \text{ e,} \quad (4.3)$$

$$\theta = \arctan(y'). \quad (4.4)$$

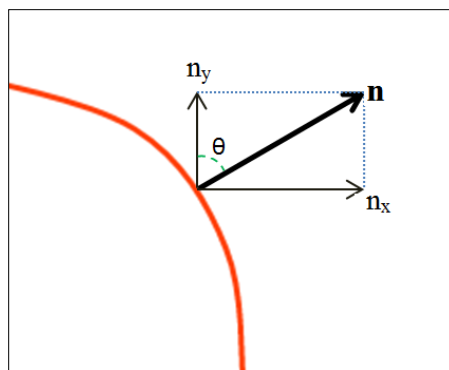


Figura 12 – Vetor norma e componentes
Fonte: O Autor, 2013

No programa foi implementado uma rotina capaz de calcular as componentes do vetor normal em pontos determinados, imprimindo os resultados em um arquivo de saída. Com isto obteve-se a Tabela 03, para polinômios de Lagrange, a Tabela 04 para B-Splines, bem como as Figuras 13 e 14.

Tabela 03: Componentes do vetor normal e norma para Polinômios de Lagrange

x	n_x	n_y	Norma
1.002305	-0.993866	0.081742	0.997221
1.012035	-0.985061	0.078922	0.988217
1.029447	-0.977826	0.082080	0.981265
1.055539	-0.979018	0.102353	0.984354
1.093232	-0.986278	0.150260	0.997658
1.146999	-0.984894	0.231828	1.011811
1.220794	-0.952635	0.346004	1.013525
1.314932	-0.871059	0.484053	0.996520
1.423379	-0.737772	0.630949	0.970775
1.533106	-0.572829	0.768233	0.958288
1.626347	-0.414967	0.877479	0.970653
1.685363	-0.308259	0.943613	0.992688
1.716058	-0.270387	0.961610	0.998901
1.781878	-0.228561	0.969080	0.995668
1.890108	-0.167117	0.979824	0.993973
2.026731	-0.103757	0.990435	0.995855
2.177440	-0.053763	0.998070	0.999517
2.330900	-0.024593	1.001514	1.001816
2.479836	-0.014501	1.001408	1.001513
2.619839	-0.015405	0.999597	0.999715
2.746963	-0.018119	0.998020	0.998184
2.855708	-0.017061	0.997742	0.997888
2.938661	-0.012106	0.998614	0.998687
2.988052	-0.006995	0.999666	0.999691

Fonte: O Autor, 2013

Tabela 04 - Componentes do vetor normal e norma para B-Splines

x	n_x	n_y	Norma
1.006876	-0.996090	0.087546	0.999930
1.031184	-0.994102	0.104814	0.999613
1.061979	-0.989822	0.130737	0.998419
1.091868	-0.982287	0.162756	0.995680
1.114516	-0.974338	0.191193	0.992919
1.127422	-0.969177	0.208481	0.991347
1.156045	-0.955906	0.248314	0.987632
1.206771	-0.924359	0.320428	0.978322
1.319479	-0.818342	0.476637	0.947030
1.347625	-0.785230	0.514136	0.938574
1.407683	-0.709223	0.591275	0.923365
1.506250	-0.581004	0.705768	0.914152
1.615690	-0.447990	0.810707	0.926251
1.695669	-0.363199	0.870340	0.943083
1.737886	-0.323885	0.895481	0.952254
1.823174	-0.255942	0.933925	0.968360
1.954167	-0.176171	0.968947	0.984832
2.092408	-0.116538	0.986018	0.992881
2.190976	-0.085490	0.991574	0.995252
2.242596	-0.072224	0.993492	0.996114
2.348503	-0.050628	0.996348	0.997633
2.527083	-0.027957	0.998790	0.999182
2.752780	-0.013474	0.999777	0.999867
2.945009	-0.006881	0.999964	0.999988

Fonte: O Autor, 2013

Na Figura 13 são plotados os valores das componentes x e y do vetor normal para funções B-Splines e polinômios de Lagrange. Observa-se que há pouca variação entre um e outro.

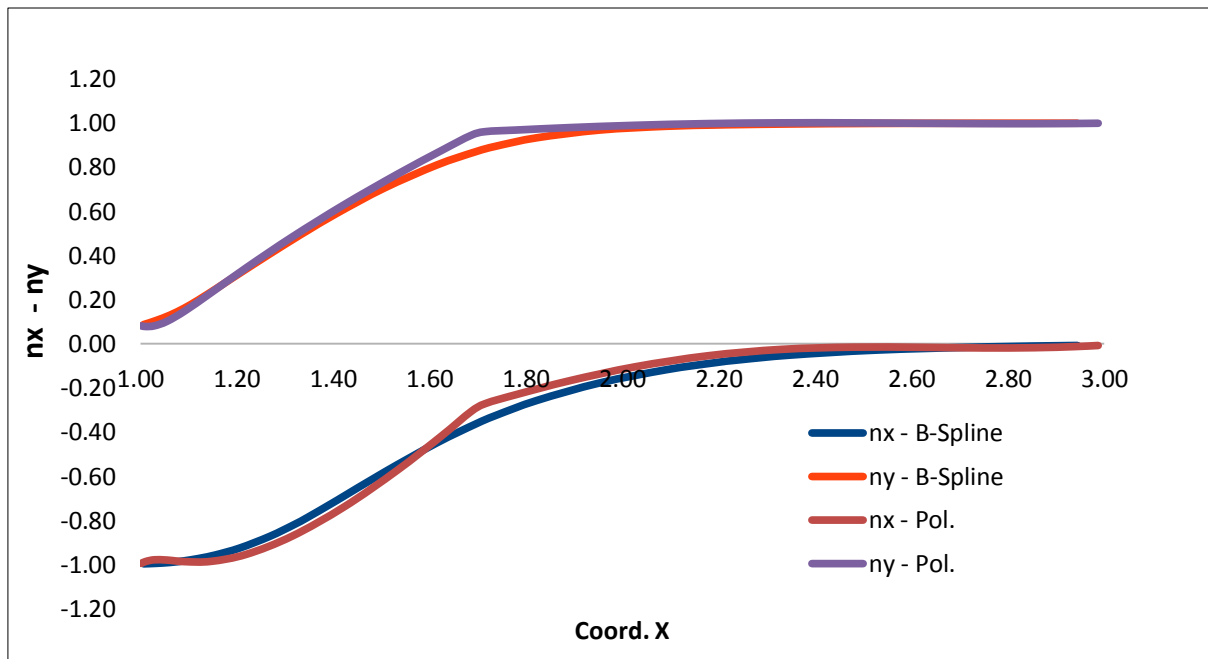


Figura 13 – Componentes do vetor norma
Fonte: O Autor, 2013

Entretanto ao plotar o gráfico da Figura 14 referente à norma do vetor pela coordenada x dos pontos fica visível a diferença, sendo que o maior erro ocorre com as funções B-Splines que se distanciam 0,0858 do valor exato da norma, 1, enquanto as funções com polinômios de Lagrange, se distanciam menos da metade deste valor. No entanto nota-se menor suavidade na aproximação por polinômios de Lagrange (maior variação da derivada), o que pode afetar negativamente a análise numérica.

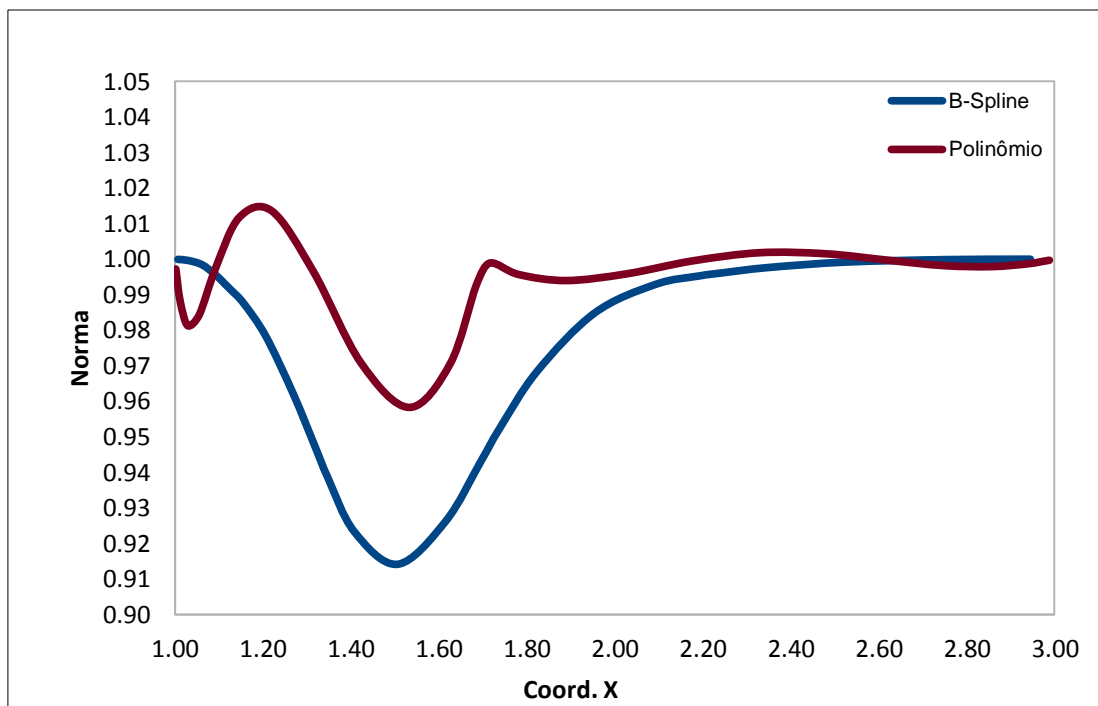


Figura 14 – Norma do vetor normal com B-Splines e Polinômios de Lagrange
Fonte: O Autor, 2013

Através da Figura 14 e Tabela 04, referente as B-splines, podemos observar que o erro concentra-se basicamente onde ocorre a mudança mais significativa da curvatura da estrutura, logo, seria possível diminuir o erro refinando-se a discretização em pontos críticos, haja visto todas as outras vantagens que as B-Splines apresentam.

Finalmente, adotou-se uma seção retangular de 0,1x0,2 m. e as seguintes propriedades do material: módulo de elasticidade, $E=25$ GPa, coeficiente de Poisson $\nu=0$, massa específica, $\rho=2500$ Kg/m³, e coeficiente de amortecimento $c=0$.

Para os parâmetros de Newmark, adotou-se $\beta=0,25$ e $\gamma=0,5$ e uma força $F=100.000$ N aplicada para baixo no nó 8 a fim de verificar a robustez do programa para solucionar o problema. Os resultados para tensão na face externa do pórtico é apresentado na Figura 15 para o tempo $t=0$, $t=0.02$ segundos e $t=0.04$ segundos, onde observa-se que conforme a estrutura se desloca para baixo sua tensão vai aumentando.

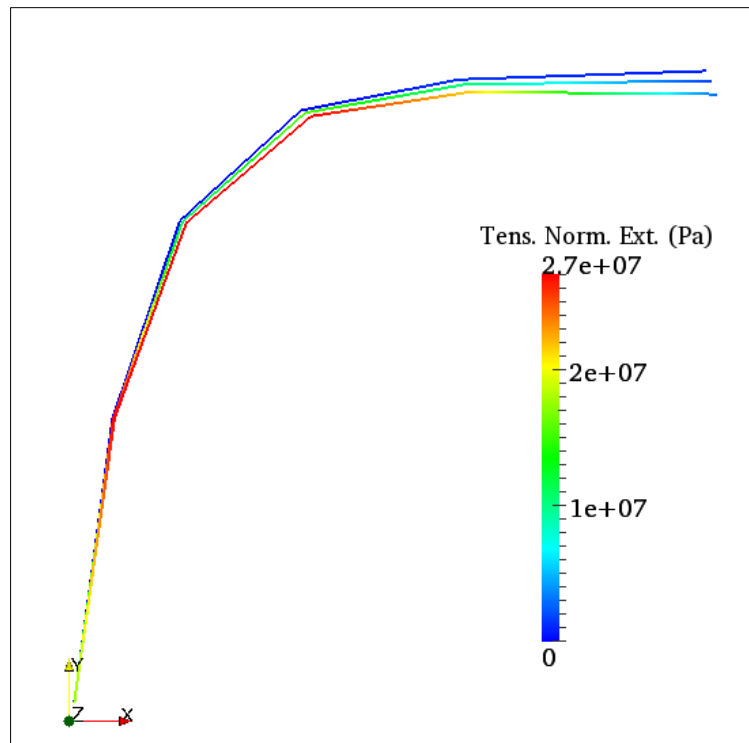


Figura 15 – Distribuição de tensão na face externa para $t=0, 0.02$ e 0.04
 Fonte: O Autor, 2013

4.2 TRELIÇA

A modelagem consiste em uma treliça isostática, de 35 elementos e 47 nós, apoiada em duas extremidades e com uma força de 200 kN aplicada instantaneamente no tempo $t=0$, no centro da treliça (nó 08), conforme Figura 16, onde os nós internos aos elementos são representados com “x”. A treliça é composta por um perfil “I” de aço, com as seguintes propriedades: módulo de elasticidade $E=205$ GPa, coeficiente de Poisson $\nu=0,3$, massa específica $\rho=7850$ Kg/m³, constante de amortecimento $c=0$, área da seção transversal $A=40,3$ cm², momento de inércia $I=3165$ cm⁴. Utilizou-se parâmetros de Newmark $\beta=0,25$ e $\gamma=0,5$ e passos no tempo $\Delta t=0,02$.

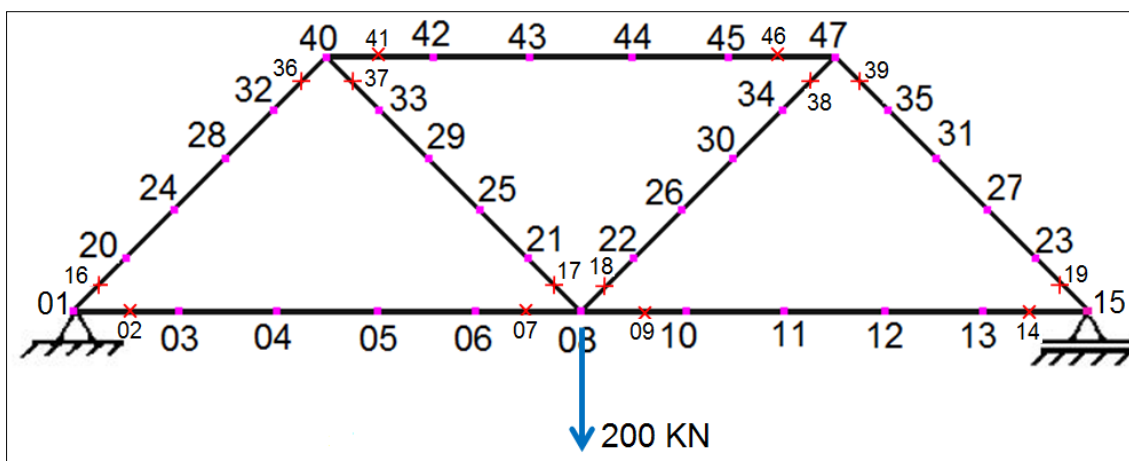


Figura 16 – Modelagem de uma treliça
Fonte: O Autor, 2013

Além disso, foram inseridas rótulas nas articulações, impedindo a transmissão de momento fletor.

Para definir o tipo de elemento é necessário arbitrar onde cada barra da treliça (que é composta por 05 elementos) começa e termina, feito isso, ter-se-á um padrão para os tipos de elemento, conforme estabelecidos no item 3.1.1, que será 2, 4, 1, 5 e 3 do início para o fim.

A inserção de rótulas só é possível nos nós de extremidade esquerda dos elementos tipo 2 ou direita dos elementos tipo 3, sendo que nesse caso a matriz local do elemento é modificada. Como resultado dessa análise apresentam-se na Figura 17 (em escala aumentada em 150 vezes) a deforma da estrutura em quatro diferentes instantes.

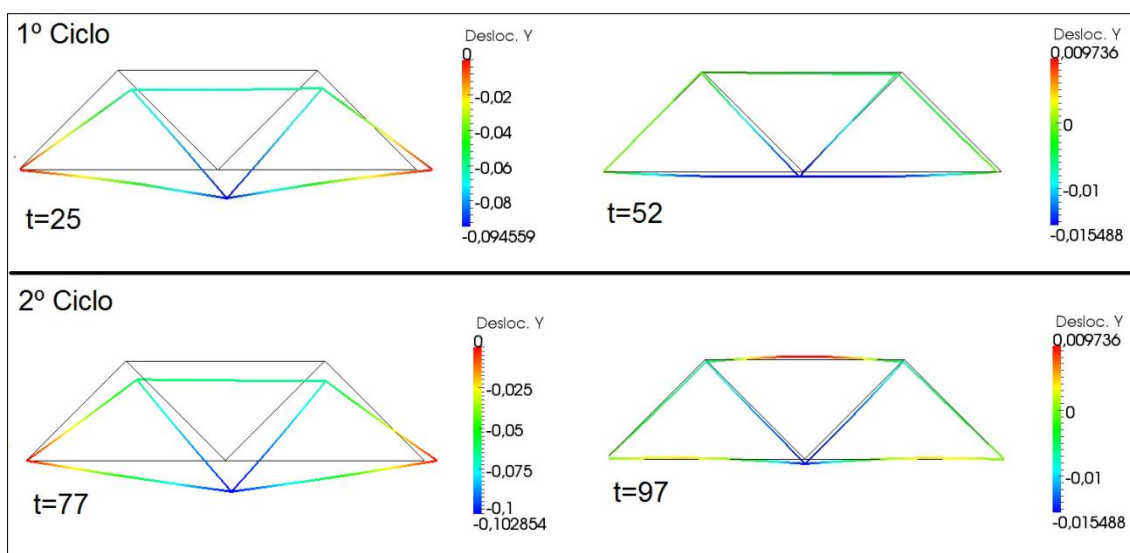


Figura 17 – Ciclo de deslocamentos
Fonte: O Autor, 2013

Através da representação desses dois ciclos torna-se fácil perceber que a estrutura oscila sobre sua posição de equilíbrio estático.

4.3 IMPACTO DE UM ANEL FLEXÍVEL

A situação em análise refere-se a um anel de diâmetro de 20, espessura constante de 2, área da seção transversal $A=1$, com as seguintes propriedades físicas adimensionais: módulo de elasticidade, $E=100$, coeficiente de Poisson, $\nu=0$, massa específica, $\rho=0,01$ e coeficiente de amortecimento, $c=0$, momento de inércia, $I=0.0833$ (valores adimensionais).

O anel foi discretizado com 37 elementos e 40 nós e move-se com uma velocidade $v_x=2$ e $v_y=-2$ (valores adimensionais) em direção a um anteparo.

Adotou-se um passo de tempo adimensional, $\Delta t=0.005$ e parâmetros de Newmark com $\beta=1$ e $\gamma=1$.

Uma característica interessante nesta estrutura é que a mesma é contínua, logo, não tem início ou fim definido, deste modo todos os elementos são classificados como tipo 01.

Esta análise já fora simulada por Maciel (2003), onde foi estudado o ângulo de reflexão da estrutura após o impacto e comparado com outros autores.

A configuração deformada do anel para vários instantes, ou seja, a trajetória do anel é mostrada na Figura 18 e pode ser comparada com os resultados obtidos por Maciel (2003), utilizando 1200 nós e 156 elementos tetraédricos, tendo como funções aproximadoras os polinômios de Lagrange, reproduzidos na Figura 19. Nota-se que os resultados se mostram idênticos.

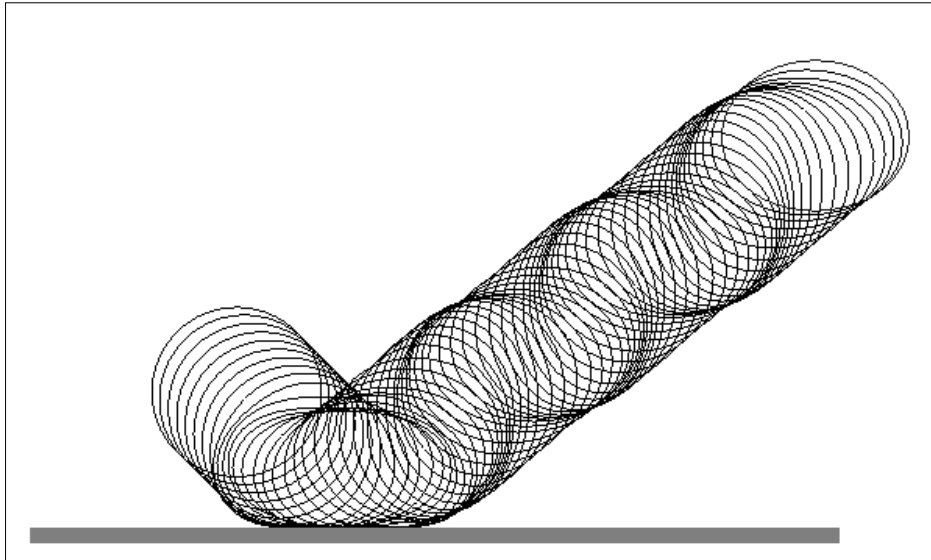


Figura 18 – Trajetória do anel no tempo
Fonte: O Autor, 2013

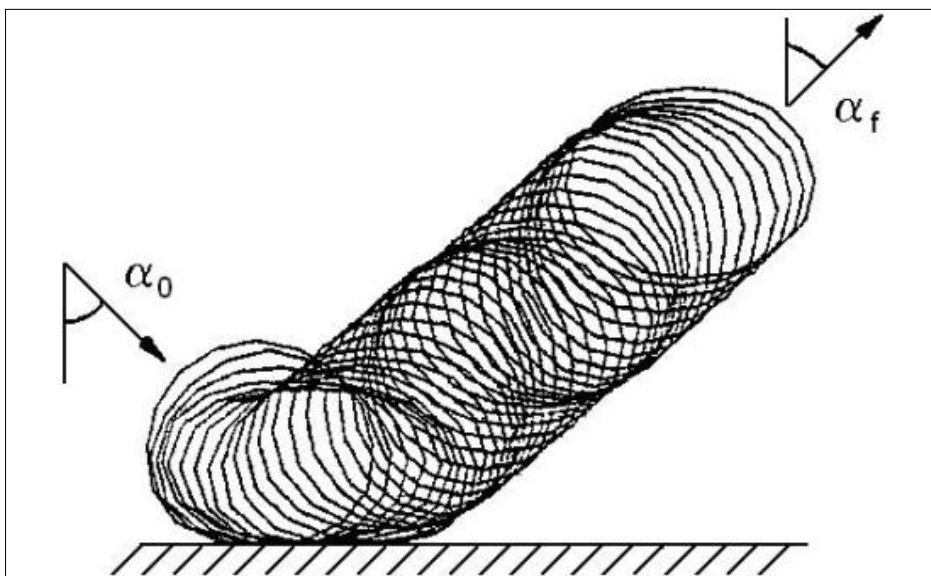


Figura 19 – Trajetória do anel no tempo
Fonte: Maciel, 2008

4.4 BARRA COM FORÇA DE TRAÇÃO APLICADA REPENTINAMENTE NA EXTREMIDADE

Neste exemplo uma barra com seção retangular de 1×1 e condições de contorno indicadas na figura 20 é modelada com 12 nós e 9 elementos. Uma força de 1 N é aplicada no instante $t=0$ em sua extremidade (nó 12). A barra é composta por material com as seguintes propriedades: módulo de elasticidade, $E=1$, coeficiente de Poisson, $\nu=0$, massa específica, $\rho=1$, e coeficiente de amortecimento, $c=0$, com área, $A=1$, e momento de inércia, $I=0.0833$ (valores adimensionais). Adotou-se os parâmetros de Newmark $\beta=0,25$ e $\gamma=0,5$ e intervalo de tempo $\Delta t=1$.

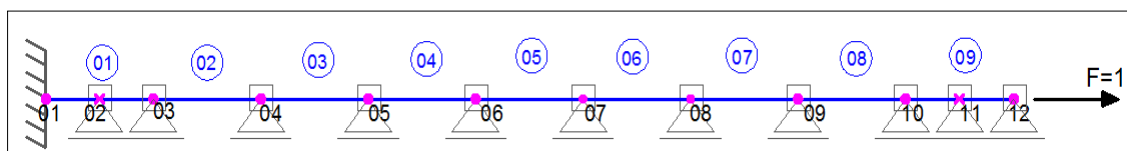


Figura 20 – Modelagem de uma barra engastada
Fonte: O Autor, 2013

O deslocamento em função do tempo para o nó 12 é apresentado na Figura 21, onde compara-se a solução numérica com a solução analítica. Como pode-se verificar obteve-se resultados muito bons para a discretização adotada, havendo pouca diferença com a solução analítica.

Nota-se que os valores adotados para os parâmetros de Newmark podem causar amortecimento numérico, o que pode ser observado na Figura 22, para o mesmo exemplo empregando-se $\beta=0,5$ e $\gamma=1$

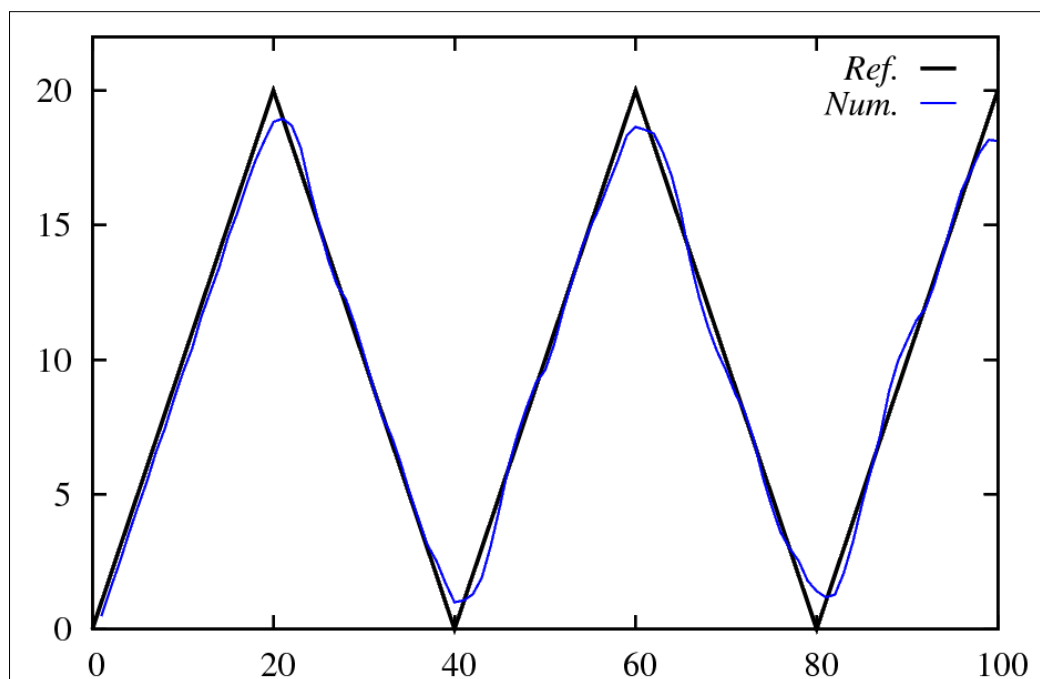


Figura 21 – Deslocamento versus tempo (nó 12)
Fonte: O Autor, 2013

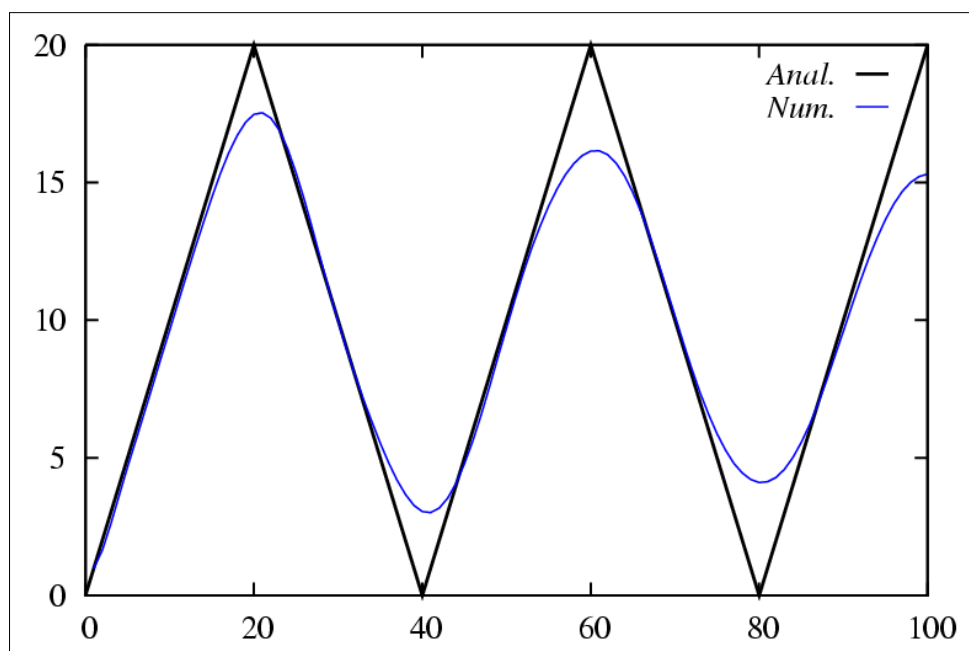


Figura 22 – Amortecimento numérico devido alteração do parâmetro de Newmark
Fonte: O Autor, 2013

Maciel (2008) analisou o referido problema, porém, em duas dimensões (2D), empregando polinômios de Lagrange e elementos tipo tetraédricos, sendo utilizados na modelagem um total de 3329 nós. Os resultados são apresentados na Figura 23, e como pode-se verificar o resultado obtido no presente trabalho empregando apenas 8 elementos de barra e 12 nós com funções B-Splines, atingiu resultados semelhantes.

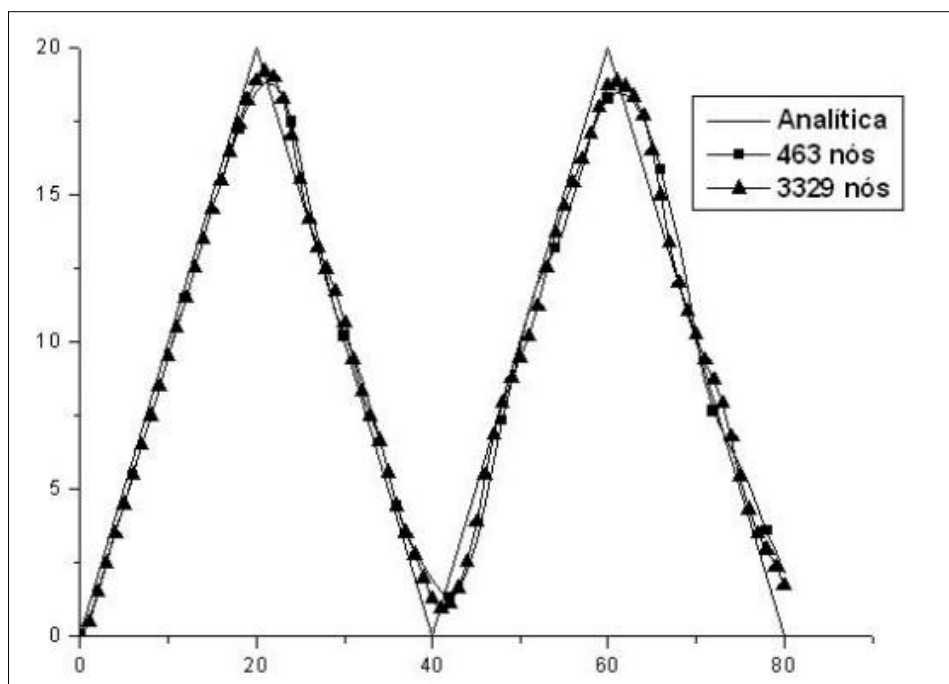


Figura 23 – Deslocamento versus tempo com polinômios de Lagrange (nó 12)
Fonte: O Autor, 2013

Para esta barra foi gerado também um estudo da tensão ao longo da estrutura em 4 instantes de tempo diferentes. A partir desses objetivou-se visualizar as ondas de tensões produzidas na estrutura após sofrer a solicitação e compará-las com o mesmo problema modelado com funções aproximadoras do tipo polinômios de Lagrange, sendo que no instante de tempo $t=3$ tem-se o início do deslocamento da onda de tensão no sentido do engaste. No tempo $t=11$, a onda está chegando no engaste, no tempo $t=24$ a onda está sendo refletida para o outro sentido e no tempo $t=31$ tem-se a onda chegando na extremidade livre. As tensões são plotadas nas coordenadas dos pontos de Gauss.

A Figura 24 apresenta o resultado obtido através do programa com funções de forma B-Splines não-uniformes, enquanto na Figura 25 encontra-se o resultado obtido com o emprego de funções de forma com polinômios de Lagrange.

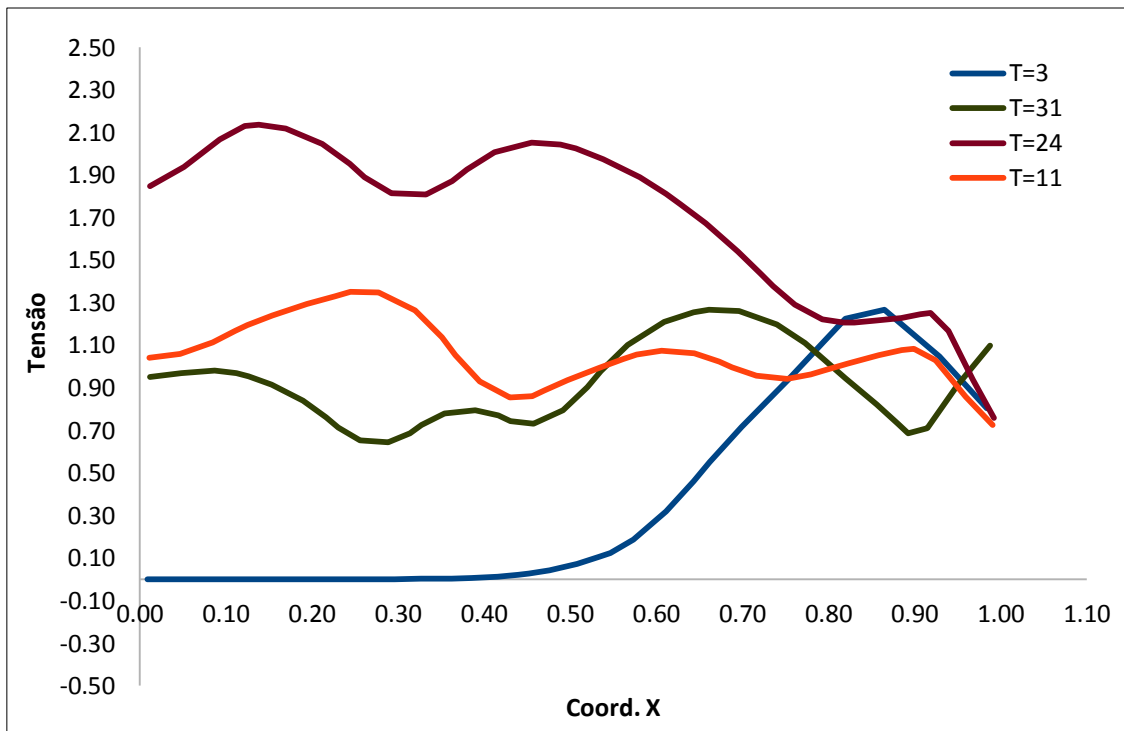


Figura 24 – Tensão na estrutura em 4 instantes de tempo (B-Splines)
 Fonte: O Autor, 2013

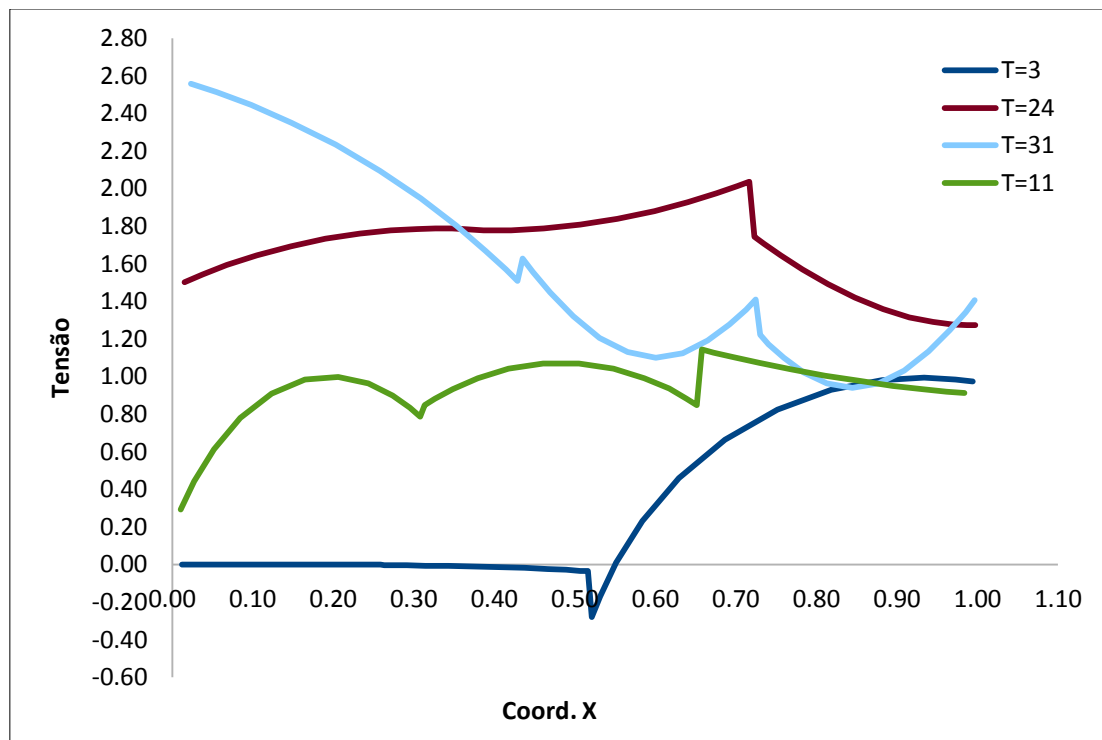


Figura 25 – Tensão na estrutura em 4 instantes de tempo (Pol. Lagrange)
 Fonte: O Autor, 2013

Como pode-se verificar a solução obtida por meio das funções B-Splines apresentou contorno mais contínuo, com menos oscilações.

4.5 IMPACTO DE UMA BARRA EM ANTEPARO RÍGIDO

Neste exemplo uma barra, modelada com 5 elementos (8 nós), seção retangular de 1×1 , comprimento (l) de 1, é posta em movimento com velocidade de 0,5 para então colidir com um anteparo rígido sem atrito. Para as propriedades do material, empregou-se os seguintes valores: módulo de elasticidade, $E=1$, coeficiente de Poisson, $\nu=0$, massa específica, $\rho=1$, e coeficiente de amortecimento $c=0$. Para os parâmetros de Newmark trabalhou-se com $\beta=1,0$ e $\gamma=1,5$ (valores adimensionais).

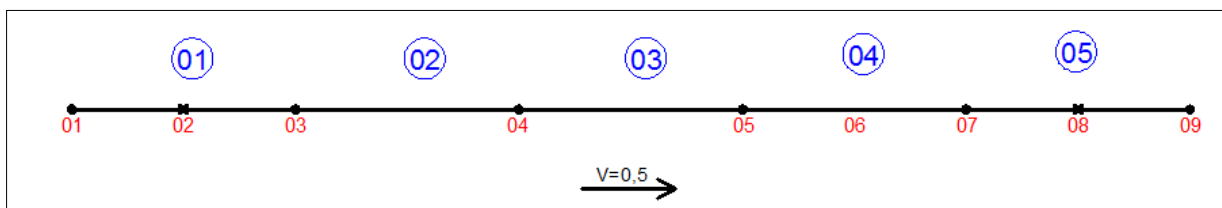


Figura 26 – Barra discretizada
Fonte: O Autor, 2013

Na Figura 27, faz-se uma comparação entre a solução numérica e analítica, com relação à velocidade desenvolvida pelo nó 8, ao longo do tempo.

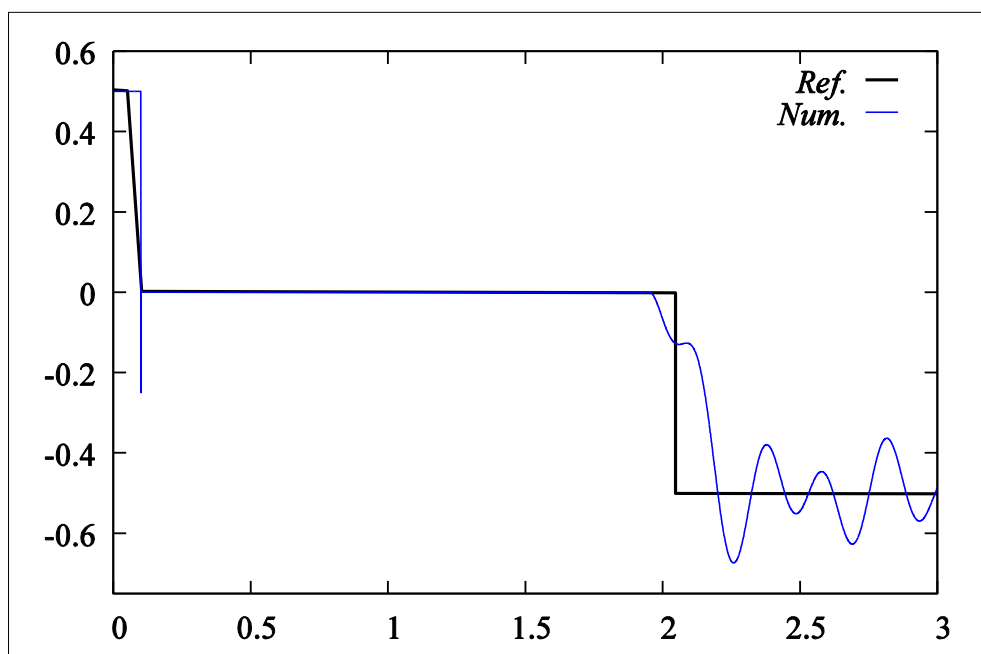


Figura 27– Velocidade versus tempo (nó 08)
Fonte: O Autor, 2013

Neste, o nó 8 inicia o movimento de corpo rígido com velocidade constante e após o impacto sua velocidade é reduzida abruptamente e, antes que se torne zero, fica negativa pois o corpo é impulsionado para o sentido

contrário do movimento. Porém, logo em seguida este nó volta para sua posição e permanece em contato com o anteparo onde mantém velocidade nula durante um intervalo de tempo.

Durante este intervalo de tempo tem-se o deslocamento do restante dos nós que compõe a estrutura para este mesmo sentido (sentido do anteparo), o que causa um esforço de compressão na barra. Porém, devido a uma força de reação exercida pelo anteparo, passado um determinado tempo, os nós da estrutura são postos a se deslocar para o outro sentido e com isto o nó 8, com velocidade nula até então, é posto em movimento novamente, sendo gerados a partir daí esforços de tração.

Através da Figura 27 é possível identificar o que é descrito a respeito da Figura 26, velocidade *versus* tempo.

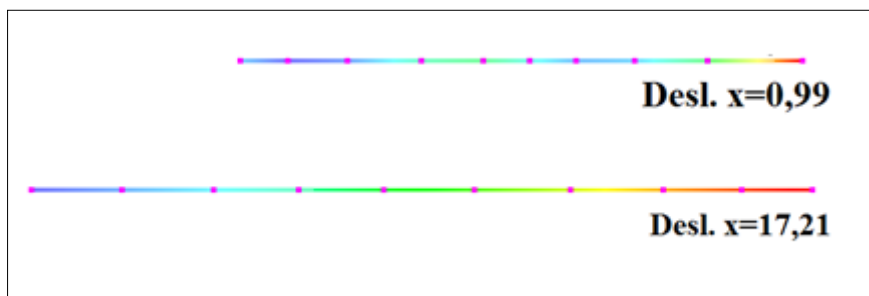


Figura 28 – Deslocamento no passo de tempo 18 e 37
Fonte: O Autor, 2013

Nesta, a primeira barra (desl. 0,99) representa o momento em que os nós se deslocaram no sentido do anteparo e num passo de tempo após a este os nós começarão a se deslocar em sentido contrário até atingir o deslocamento 17,2 apresentado na segunda barra (valores adimensionais).

5 CONCLUSÃO

O desenvolvimento deste trabalho abordou temas que se encontram bastante destacados no setor de engenharia de estruturas.

Neste trabalho foram realizados estudos acerca da formulação posicional do Método dos Elementos Finitos para análise não linear geométrica, que é bastante atual e vem se mostrando bastante robusta e eficiente.

Tendo como base o módulo de análise dinâmica não linear geométrica de pórticos bidimensionais do programa fluidstruc2D, foi possível implementar as funções de forma B-Spline não uniformes de forma isoparamétrica.

Com as implementações feitas foi possível demonstrar a viabilidade e eficiência do emprego de funções B-Splines não uniformes como funções de forma no MEF em formulação posicional e simular exemplos dinâmicos complexos produzindo resultados que foram comparados com outras soluções analíticas ou numéricas, atestando a precisão do programa.

Verificou-se que os resultados apresentaram-se muito próximos da solução analítica mesmo empregando discretização relativamente simples comparada com a literatura, notando-se ainda aproximações mais suaves.

Cabe destacar um ponto negativo identificado para essas funções ao se fazer a aproximação do vetor generalizado com erro maior que os polinômios de Lagrange de mesmo grau. Entretanto, apesar de numericamente os polinômios de Lagrange apresentarem resultados mais corretos, verificou-se a ocorrência de mais oscilações na aproximação, o que pode ser ruim para a análise numérica.

Por fim, conclui-se que as B-splines possuem um bom desempenho como funções de forma para o MEF em formulação posicional e como sugere-se para trabalhos futuros a aplicação de funções NURBS (B-Splines Racionais não uniformes) como funções de forma do MEF, pois enquanto as B-Splines são definidas por curvas paramétricas polinomiais, as NURBS são definidas por curvas paramétricas racionais, o que a torna mais poderosa e capaz de descrever qualquer tipo de geometria, além de ser padrão do sistema CAD.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Sandra Freire; HANAI, João Bento. **Análise dinâmica experimental da rigidez de elementos de concreto submetidos à danificação progressiva até a ruptura.** Cadernos de Engenharia de Estruturas de São Carlos, vol. 10, São Carlos, 2008. ISSN 1809-5860.

ARARIPE, Marcus Antônio Ferreira. **A não linearidade física e geométrica em pórticos planos de concreto armado.** 1998. 79f. Mestrado (em Infra estrutura Aeronáutica). Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São Paulo, 1998.

ASSAN, Eloísio Ernesto. **Método dos elementos finitos: primeiros passos.** 2ª edição, São Paulo: Unicamp, 2003.

AZEVEDO, Alvaro Ferreira Marques. **Método dos Elementos Finitos.** 1º Edição, Portugal: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2003.

BATHE, Klaus Jurgen. **Finite Element Procedures.** Prentice Hall: New Jersey, 1996.

BELO, Ivan Moura. **Desenvolvimento da formulação corrotacional em elementos finitos de casca para a análise hiperelástica.** 2009. 219 f. Doutorado (em Análise e Projeto Mecânico). Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2009.

BONET, Javier; WOOD, Richard D.; MAHANEY, Joseph; HEYWOOD, Peter. Finite element analysis of air supported membrane structures. **Computer**

Methods in Applied Mechanics and Engineering. vol. 190, Ed. 5-7, 2000. ISSN0045-7825.

CARVALHO, Miguel. F. M. Soares de. **Formulação corrotacional para análise de vigas com elementos finitos.** 2010. 116 f. Mestrado (em Engenharia Mecânica). Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2010.

CODA, Humberto Breves. **Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: Uma formulação posicional baseada no MEF.** 2003. 168 f. Tese (Tese para concurso de professor titular). Escola de Engenharia de Estruturas de São Carlos, São Paulo, 2003.

CODA, Humberto Breves; PACCOLLA, Rodrigo Ribeiro. **An alternative positional fem formulation for geometrically non-linear analysis of shells: curved triangular isoparametric elements.** Computational Mechanics, vol. 40, pp. 185–200, 2007..

CODA, Humberto Breves. **Two dimensional analysis of inflatable structures by the positional FEM.** Latin American Journal of Solids and Structures, nº 3, pp. 187–212, Setembro, 2009. ISSN 1679-7817.

CRUZ, Leandro M.V; ESCRIBA, Luis A. Rivera; FELIPE, Luis H. Guillermo. **Seleção de pontos de superfícies para manipulação direta em modelagem.** Disponível em: < [http://w3.impa.br/~lcruz/publications/sibgrapi-wuw-2005 .pdf](http://w3.impa.br/~lcruz/publications/sibgrapi-wuw-2005.pdf)>. Acesso: 21.Jul.2013.

ESPERANÇA, Cláudio; CAVALCANTI, Paulo Roma. **Introdução a computação gráfica: Curvas.** (Notas). Disponível em: <[www.lcg.ufrj.br / Cursos/COS-751/curvas-ppt](http://www.lcg.ufrj.br/Cursos/COS-751/curvas-ppt)> Acesso: 12.Jun.2013.

FONSECA, Jun Sérgio Ono. **Mecânica dos sólidos para a engenharia mecânica.** (Notas de aula). Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, 2011. Disponível em: <<http://www-gmap.mecanica.ufrgs.br/html/sumulas/mec077/Mecs2.pdf>> Acesso: 12.Jun.2013

GELATTI, Flávia. **Análise não linear física e geométrica de pórticos planos de concreto armado: modelagem por elementos finitos de barra.** 2012, 241 f. Mestrado (em engenharia civil). Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2012.

GRECO, Marcelo; FERREIRA, Ivone Passos; BARROS, Felício Bruzzi; SILVA, Ronaldo Romão. **Análise dinâmica não linear geométrica de uma viga treliçada.** 9º Simpósio de Mecânica Computacional, Minas Gerais, maio, 2010.

GRECO, Marcelo; CODA, Humberto Breves. A simple and precise fem formulation for large deflection 2d frame analysis based on position description. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol.193, pp. 3541–3557, 2004.

HÖLLING, Klaus; REIF, Ulrich; WIPPER, Joachim. Weighted extended b-spline approximation of dirichelet problems. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, vol. 39, N°02, pp. 442-462, 2002.

HUGHES, Thomas J.R.; COTTRELL, J. Austin; BAZILEVS, Yuri. Isogeometric analysis: Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 194, nº 39-41, pp. 4135-4195, Outubro, 2005.

LIMA, Silvio de Souza; SANTOS, Sergio Hampshire de Carvalho. **Análise dinâmica de estruturas**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna , 2008.

MACIEL, Daniel Nelson. **Análise de problemas elásticos não-lineares geométricos empregando o método dos elementos finitos posicional**. 2008. 153 f. Doutorado. (em engenharia de estruturas). Escola de Engenharia de São Carlos, São Paulo, 2008.

MINETTO, Ciliane de Fátima. **Um estudo sobre curvas NURBS**. 2003. 114 f. Mestrado (em matemática aplicada), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.

MONTENEGRO, Anselmo. **Curvas interativas** (Notas de Aula). Disponível em:< <http://www2.ic.uff.br/~anselmo/>> Acesso: 29.Jul.2013

OGDEN, Raymond. **Non-linear elastic deformations**. Engineering Analysis, vol. 1, nº2, 1984. ISSN 0264-682X.

PASCON, João Paulo. **Modelos constitutivos para materiais hiperelásticos: estudo e implementação**. 2008. 232 f. Mestrado (em engenharia de estruturas). Escola de Engenharia de São Carlos, São Paulo, 2008.

PINTO, Rivelli da Silva. **Análise não linear das estruturas de contraventamento de edifícios.** 2002, 204 f. Doutorado (em engenharia de estruturas). Escola de Engenharia de Estruturas de São Carlos-USP, São Paulo, 2002.

RIBEIRO, Fernando Luiz Bastos. **Introdução ao método dos elementos finitos.** (Notas de Aula – UFRJ, 2004). Disponível em: <http://wwwp.coc.ufrj.br/~fernando/downloads/Curso_MEF1.pdf>. Acesso em: 12.Jun.2013

SANCHES, Rodolfo A. Kuche. **Análise bidimensional de interação fluido estrutura: desenvolvimento de código computacional.** 2006, 105 f. Mestrado (em engenharia de estruturas). Escola de Engenharia de São Carlos, São Paulo, 2006.

SANCHES, Rodolfo A. Kuche; CODA, Humberto Breves. **Formulação bidimensional alternativa para a interação fluido estrutura através do MEF.** XXIX CILAMCE, Maceió, 2008.

SANCHES, Rodolfo André Kuche. **Sobre o acoplamento fluido-casca utilizando o método dos elementos finitos.** 2011, 228 f. Doutorado (em engenharia de Estruturas). Escola de Engenharia de Estruturas de São Carlos-USP, São Paulo, 2011.

SANCHES, Rodolfo A. Kuche, BORNEMANN, P.B.; CIRAK, F. Immersed b-spline (i-spline) finite element method for geometrically complex domains. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.** Vol. 200, nº 13-16, pp. 1432-1445, Março, 2011.

SANCHES, RODOLFO A. Kuche; CODA, Humberto Breves. Unconstrained vector nonlinear dynamic shell formulation applied to Fluid Structure Interaction. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering** vol. 259. pp. 177-196, Junho, 2013.

SILVA, Samuel. **Introdução ao método dos elementos finitos**. Notas de Aula – Centro de Engenharia e Ciências Exatas, Unioeste, Foz do Iguaçu, 2009.

SHINGUE, Carlos Y. **Métodos numéricos aplicados a engenharia**. (Material Didático) Universidade de São Paulo, 2008. Disponível em: <http://www.demar.eel.usp.br/metodos/mat_didatico/Metodo_dos_Elementos_Finitos.pdf>. Acesso em : 21.Jul.2013.

SORIANO, Humberto Lima. **Método dos elementos finitos em análise de estruturas**. São Paulo: EDUSP, 2003.

SOUTO FILHO, Marcello Varella. **Modelagem numérica de reforço estrutural em vigas de concreto armado**. 2002. 110 f. Mestrado (em engenharia de estruturas). Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 2002.

SOUZA, Remo Magalhães. **O problema dos elementos finitos aplicado a condução de calor**. Material Didático. Núcleo de Instrumentação e Computação Aplicada à Engenharia, Universidade Federal do Pará, Belém, 2003.

STRANG, Gilbert.; FIX, George. **An analysis of the finite element method**. 2^o. Edição. S.l.:Wesley-Cambridge Press, 2008.

TILLER, Wayne. PIEGL, Les. **The NURBS Book**. 2^o Ed. New York: Springer,1997.

ZIENKIEWICZ, Olgierd Cecil ; TAYLOR, R. L. **The finite element method**, vol. 01: The Basis. 5^o edição. Butterworth-Heinemann Linacre House, 2000.

WARBURTON, Geoffrey Barratt. **The dynamical behaviour of structures**. 2 edição, 1976, Pergamon Press.

ANEXOS

ANEXO A - Funções de Forma B-Splines não uniformes para cada tipo de elemento (Gráfico A1 ao A5)

ANEXO B – Derivadas das Funções de Forma B-Splines não uniformes

ANEXO C – Exemplo de um arquivo de entrada (item 3.3.4)

ANEXO A

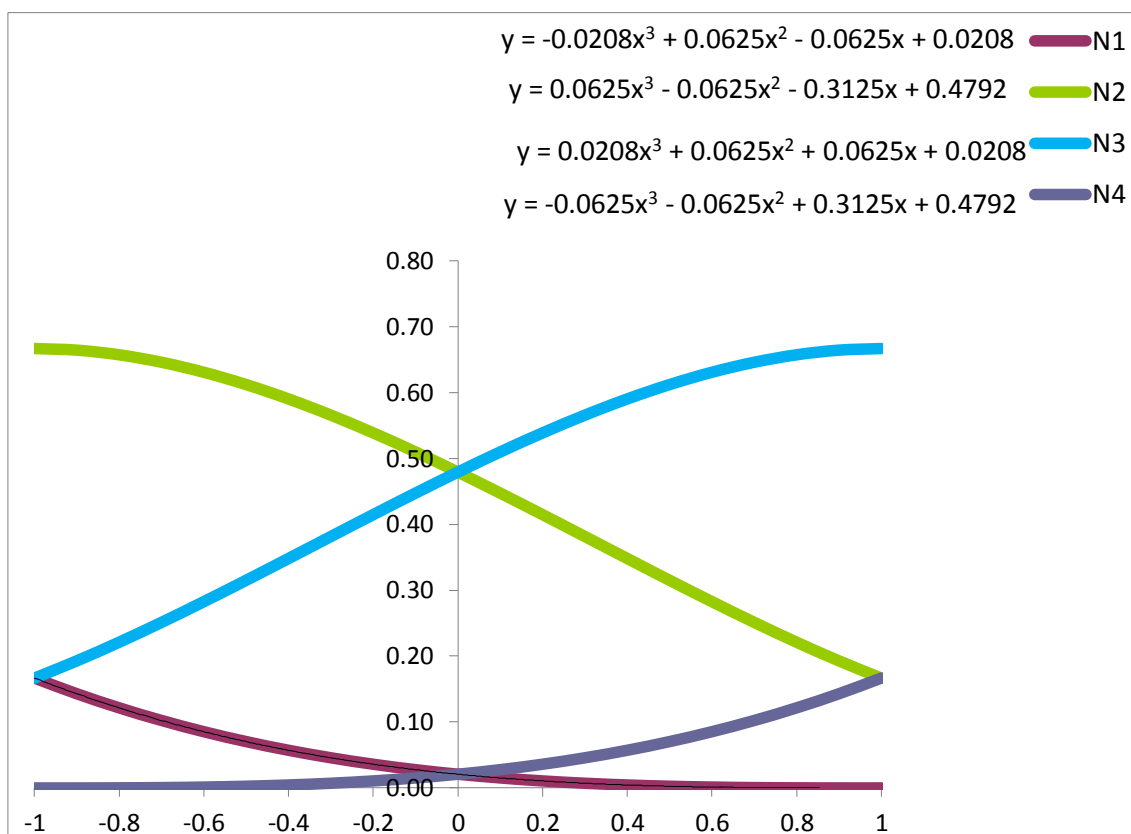


Gráfico A1 – Funções de Forma para Elemento do Tipo 01
Fonte: O Autor, 2013

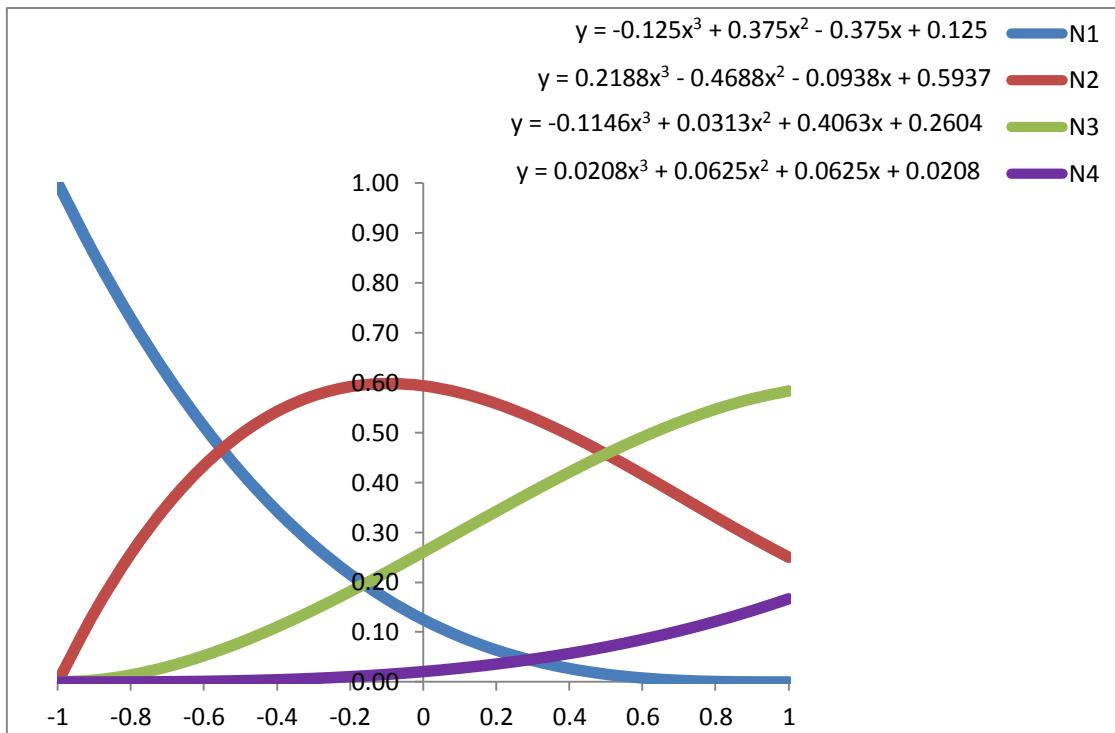


Gráfico A2 – Funções de Forma para Elemento do Tipo 2
 Fonte: O Autor, 2013

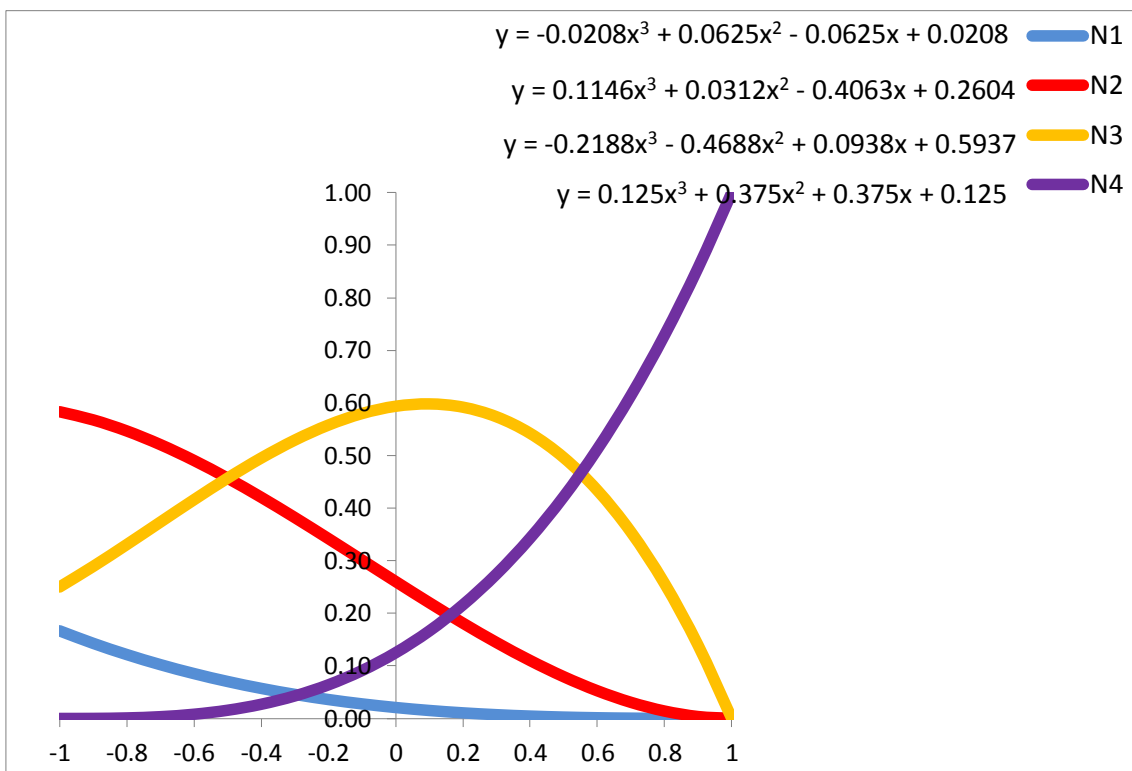


Gráfico A3 – Funções de Forma para Elemento do Tipo 3
 Fonte: O Autor, 2013

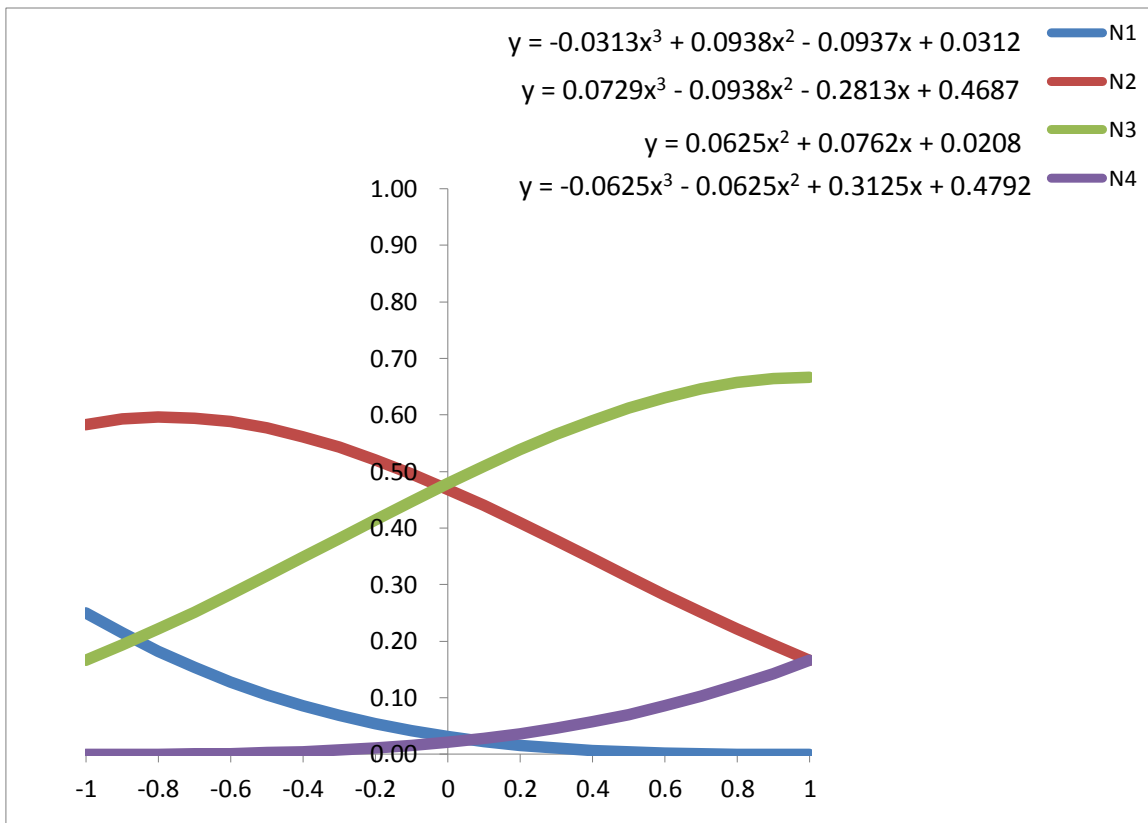


Gráfico A4 – Funções de Forma para Elemento do Tipo 4
 Fonte: O Autor, 2013

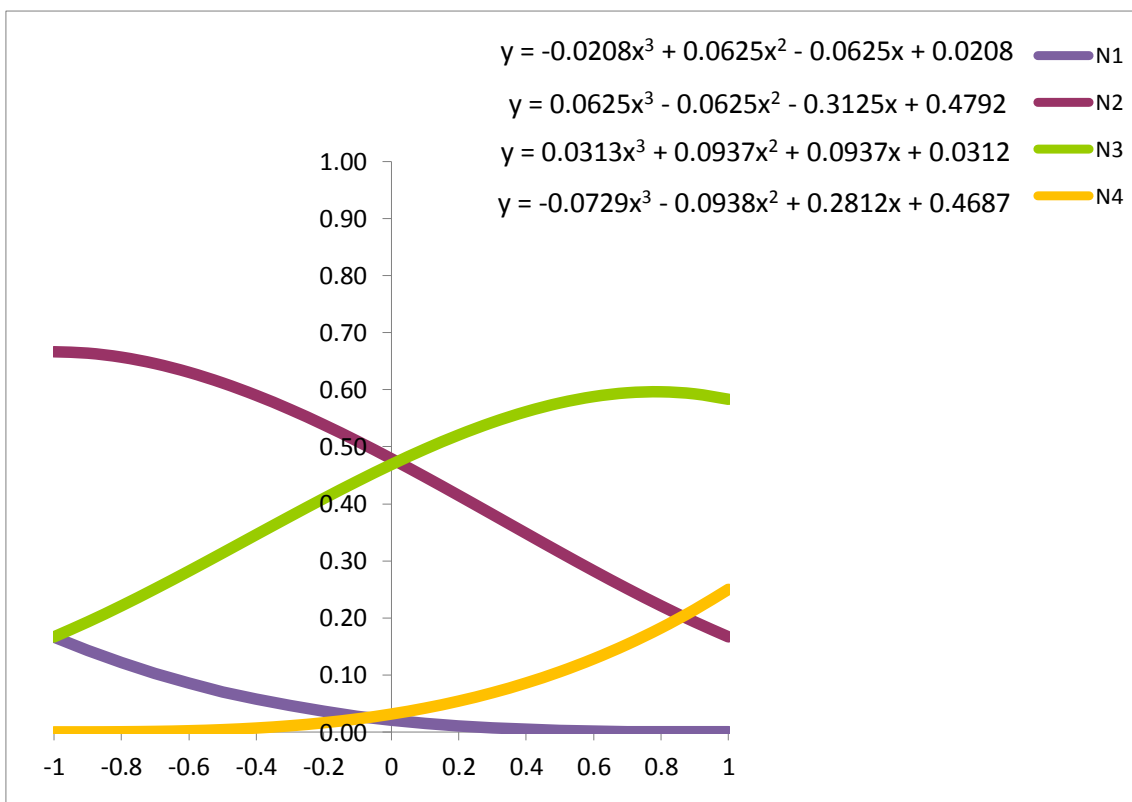


Gráfico A5 – Funções de Forma para Elemento do Tipo 5
 Fonte: O Autor, 2013

ANEXO B

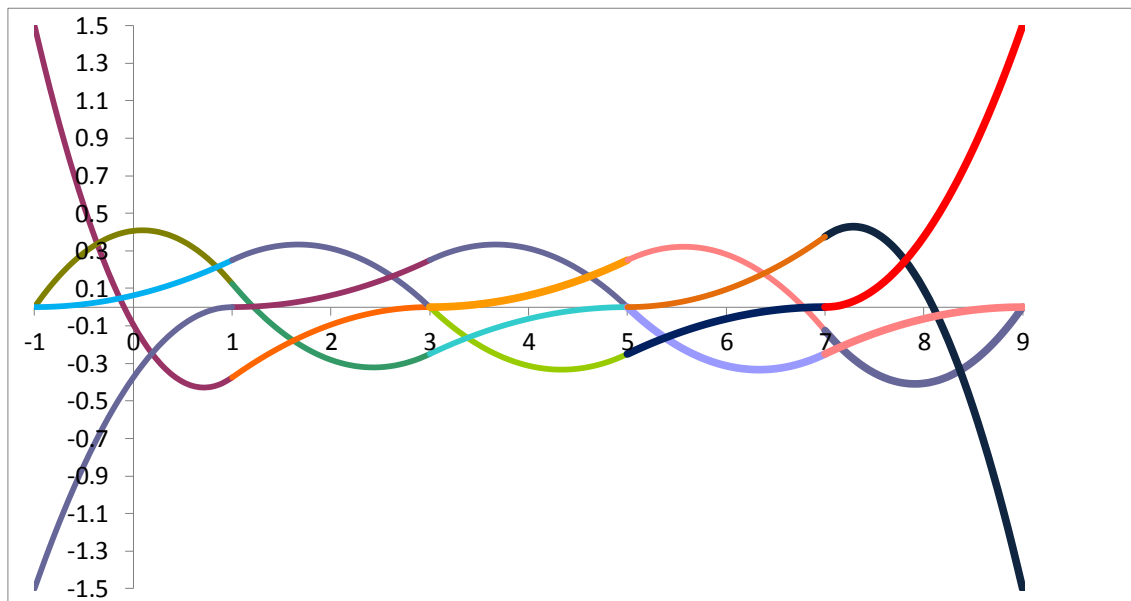


Gráfico B1 – Derivadas das funções de forma
Fonte: O Autor, 2013

ANEXO C

```

quer ler posicao inicial diferente de repouso (sim=1, nao=0)
0
nnos(numero de nos),nel(numero de elementos),nfc(numero de fases de
carga),tol,ngf(no para saida),ngf1(nopara saida)
12,9,1,.00000001,1,12
Número de gauss, frequência de impressao
5,1
elemento, numero de nos
1 4
2 4
3 4
4 4
5 4
6 4
7 4
8 4
9 4
tipo do elemento (cont esq=2, segundo esquerda=4, domínio=1, cont dir=3,
segundo direita=5)
2
4
1
1
1
1
1
1
5
3
incidencia
elemento,função de forma 1.....função de forma final
1 1 2 3 4

```


2 2 3 4 5

3 3 4 5 6

4 4 5 6 7

5 5 6 7 8

6 6 7 8 9

7 7 8 9 10

8 8 9 10 11

9 9 10 11 12

tipo do no de extremidade

elemento, no1, tipo, nof, tipo !0 restrito !1 livre(RÓTULA)

1 0 0

2 0 0

3 0 0

4 0 0

5 0 0

6 0 0

7 0 0

8 0 0

9 0 0

coordenadas

no,x,y

1 0.000 0.000 0.000

2 0.550 0.000 0.000

3 1.100 0.000 0.000

4 2.200 0.000 0.000

5 3.300 0.000 0.000

6 4.400 0.000 0.000

7 5.500 0.000 0.000

8 6.600 0.000 0.000

9 7.700 0.000 0.000

10 8.800 0.000 0.000

11 9.350 0.000 0.000

12 9.900 0.000 0.000

propriedades dos elementos

elemento,elasticidade,coef. poisson ,altura,area,ybarra(posição da linha
 neutra),mom. inércia,densidade,coeficiente de amortecimento
 1 1. 0. 1. 1. 0.5 .083333 1. 0.
 2 1. 0. 1. 1. 0.5 .083333 1. 0.
 3 1. 0. 1. 1. 0.5 .083333 1. 0.
 4 1. 0. 1. 1. 0.5 .083333 1. 0.
 5 1. 0. 1. 1. 0.5 .083333 1. 0.
 6 1. 0. 1. 1. 0.5 .083333 1. 0.
 7 1. 0. 1. 1. 0.5 .083333 1. 0.
 8 1. 0. 1. 1. 0.5 .083333 1. 0.
 9 1. 0. 1. 1. 0.5 .083333 1. 0.
 numero de nos com velocidade inicial
 1
 no, velox, vely, velz
 1 0 0
 Impacto sem atrito, região quadrada
 Entrar com o centro e a distância das faces ao centro
 xp,yp,xc,yc,coeficiente de atrito ao impacto
 -10000000000,-10000000000,100000000000,100000000000,0.
 primeira fase de carga
 numero de nos restritos, numero de nos carregados na fase, num. passos de
 tempo
 12,1,100
 nelcar(num. ele. carr. qx,qy),nelnco(num. ele. carr. qn,qt),num. ele. temp.
 1,1,1
 leitura dos parametros de Newmark e passo de tempo
 beta, gama, dt !0.25 0.5, dt normal ! 0.5 1.5 dt (impacto)
 .25,.5,1
 restricao de graus de liberdade
 no,desloc x (1 fixo, 0 livre),desloc y (1 fixo, 0 livre),rotação (1 fixo, 0 livre)
 1,1,1,1
 2,0,1,0
 3 0 1 0
 4 0 1 0

5 0 1 0

6 0 1 0

7 0 1 0

8 0 1 0

9 0 1 0

10 0 1 0

11 0 1 0

12 0 1 0

leitura dos valores prescritos

no,ux,uy,tetaz

1,0,0,0

2,0,0,0

3 0 0 0

4 0 0 0

5 0 0 0

6 0 0 0

7 0 0 0

8 0 0 0

9 0 0 0

10 0 0 0

11 0 0 0

12 0 0 0

comportamento temporal do movimento de bas

(ba,bb,bc,bd,be,bf,bg,bh,bi,bj,bk)

1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0

CARGA CONCENTRADA nos com carregamento prescrito

no,f1,f2

12,1.,0.,0.

cargas distribuidas nas extremidades

elemeto, qx no inicial, qx no final, qy no inicial, qy no final coordenadas

1 0 0 0 0

cargas distribuidas nas extremidades nao conservativas

elemeto, qn no inicial, qn no final, qt no inicial, qt no final coordenadas

1,0,0,0,0

temperatura constante ao longo do elemento

elemento temp. acima, temp. abaixo, coeficiente de dilatacao termica

1,.0,0.,.0

comportamento temporal da carga (ca,cb,cc,cd,ce,cf,cg,ch,ci,cj,ck)

1,0,0,0,0,0,0,0,0,0 !terminou a fase 1