UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DE ENGENHARIA MECÂNICA
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

FRANCIS KALUWANDIMIO MATONDO

ANÁLISE FUNCIONAL E ALGUMAS APLICAÇÕES

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Guarapuava
2017

FRANCIS KALUWANDIMIO MATONDO

ANÁLISE FUNCIONAL E ALGUMAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação, apresentado à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso, do Curso Superior de Engenharia Mecânica para a Coordenação de Engenharia Mecânica – COEME – da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel.

Orientador: Prof. Dr. Juliano Dos Santos Gonschorowski.

Guarapuava
2017

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Coordenação de Engenharia Mecânica
Câmpus Guarapuava

TERMO DE APROVAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso

ANÁLISE FUNCIONAL E ALGUMAS APLICAÇÕES

por

FRANCIS KALUWANDIMIO MATONDO

Este **Trabalho de Conclusão de Curso** foi apresentado às **10h:30m** do dia **08/12/2017** como requisito parcial para a obtenção do título de **ENGENHEIRO MECÂNICO**, pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho:

. . . .

(aprovado com louvor, aprovado, aprovado com restrições ou reprovado)

Professores Membros que compõe a Banca Examinadora:

Prof. Dr. Juliano Dos Santos Gonschorowski

Prof. Dr. Sérgio Dálmas

Prof^{a}. Dr^{a}. Tatiane Batista Cardoso

Prof. Dr. David Lira Nunez
UTFPR GP – Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

A Folha de Aprovação Assinada encontra-se na Coordenação do Curso – COEME

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me dado saúde e força para vencer as dificuldades.

Aos meus pais, pelo amor, incentivo e apoio incondicional, especialmente à minha mãe pelo seu maravilhoso papel como meu anjo da guarda!

Ao Prof. Dr. Juliano do Santos Gonschorowski pela oportunidade e apoio na elaboração deste trabalho.

Aos meus amigos, especialmente à Carla Luiza Costa, a minha eterna amiga. E ao Talyson (Bruce Lee).

RESUMO

Kaluwandimio, Francis. Análise Funcinal e Algumas Aplicações 2017. 51 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Guarapuava, 2017.

A teoria de análise funcional é um ramo da matemática que se originou da análise clássica e seu desenvolvimento ajudou a solucionar problemas de diferentes campos da matemática. Na primeira parte deste trabalho abordamos os conceitos centrais desta teoria, os espaços de Banach, que são espaços vetoriais normados completos, e os espaços de Hilbert que são espaços de Banach com um produto interno. Apresentamos também exemplos destes espaços e alguns resultados que envolvem estes conceitos. Na segunda parte do trabalho, apresentamos os teoremas mais importantes de análise funcionais que são o teorema de Hahn-Banach, o teorema do gráfico fechado, o teorema do ponto fixo de Banach, o teorema de Banach-Steinhaus e o teorema de aplicação aberta. Além disso, fazemos uma aplicação de cada um destes teoremas.

Palavras-Chave: Análise Funcional.

ABSTRACT

Kaluwandimio, Francis. Functional Analysis and Some Applications 2017. 51 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Guarapuava, 2017.

The theory of functional analysis is a branch of mathematics that originated from classical analysis and its development helped to solve problems of different fields of mathematics. In the first part of this work we address the central concepts of this theory, Banach spaces, which are complete normed vector spaces, and Hilbert spaces that are Banach spaces with an internal product. And we present examples of these spaces and some results that involve these concepts. In the second part of the paper, we present the most important theorems of functional analysis, which are Hahn-Banach's theorem, closed-graph theorem, Banach fixed-point theorem, Banach-Steinhaus theorem and open application theorem. In addition, we make an application of each of these theorems.

Key-Words: Functional analysis.

LISTA DE SÍMBOLOS

$B(X,Y)$	Espaços de operadores lineares limitados definidos em X e Y
$C[a,b]$	Espaços de funções contínuas definidas em [a,b]
$dimX$	Dimensão do espaço X
$\mathbb{R}$	Conjunto de números reais
$\|\|T\|\|$	Norma de um operador linear limitado
$\left\langle x,y \right\rangle$	Produto interno de x e y
sup	Supremo
$d(x,y)$	Distância entre x e y
$B(x;r)$	Bola aberta com o centro em x e raio r
$\mathbb{C}$	O conjunto dos números complexos
$\|\|f\|\|$	Norma de um sistema funcional linear f
I	Operador identidade
X'	Espaço dual de um espaço normado X
$C(X,Y)$	Espaço de operadores lineares compactos $T :\longrightarrow Y$
$L(X,Y)$	Espaços dos operadores lineares $T : X \longrightarrow Y$

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A análise funcional é o ramo da matemática e mais especificamente da análise que trata do estudo de funções. A necessidade de se estudar esta ciência começou quando a matemática passou por um desenvolvimento vertiginoso entre os séculos XVII e XIX. Uma das razões foram quando a matemática passou a resolver uma grande quantidade de problemas que antes não podiam ser tratados matematicamente de uma forma satisfatória [1]. Muitos desses problemas têm funções definidas, sem possível representação em figuras geométricas, como por exemplo, equações diferenciais funcionais, ordinárias ou parciais, que até o séculos XIX com a utilização dos espaços de dimensão finita não tinham solução numérica [1].

No inicio de século XX foi desenvolvidos teoremas para solucionar problemas matemáticos de análise funcional com utilização dos espaços de dimensão infinita. O seu desenvolvimento começou nos estudos de transformações de tais como a transformada de Fourier, e nos estudos de equações diferenciais e equações integrais [3].

A análise funcional possui forte relação com a topologia e faz uso de muitos conceitos de álgebra linear, que trata dos espaços vetoriais e das transformações lineares entre eles [1]. Com base de seus teoremas podemos encontrar várias aplicações em outras áreas da matemática, por exemplo análise complexa, teoria da medida, teoria do controle, programação convexa e teoria dos jogos.

Neste trabalho pretendemos estudar os principais teoremas da análise funcional e posteriormente algumas de suas aplicações em equações diferenciais e equações integrais.

1.1 A JUSTIFICATIVA

Análise funcional resolve problemas envolvendo equações diferenciais parciais e integrais, com aplicação nas áreas de engenharia tais como transferências de calor, mecânica dos fluidos, mecânica quântica(que usa os conceitos de análise funcional usados para descrever a equação de ondas na forma vetorial usando o espaço de Hilbert), e na termodinâmica para construir as equações de Boltzmann a discretização do espaço de velocidades é feita através de um processo de quadratura, onde a norma dos polinômios de Hermite do espaço de Hilbert contínuo é igualada à norma do espaço discreto de velocidades.

2 OBJETIVOS

Os objetivos desse Trabalho de Conclusão de Curso são apresentados subsequentemente nos tópicos de Objetivos Geral e Específicos.

2.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo deste trabalho constituiu em estudar a teoria de análise funcional e algumas aplicações, que tem como teoremas principais:

- Teorema de Hanh-Banach
- Teorema de Banach-Steinhaus;
- Teorema de Gráfico Fechado;
- Teorema da aplicação aberta;
- Teorema do ponto fixo de Banach

Para entender estes teoremas é necessário conhecer os seguintes assuntos dentro da teoria:

- Espaços Métricos;
- Espaços Normados;
- Espaços de Banach;
- Operadores Lineares e Lineares Limitados;
- Espaços de Hilbert;
- Funcionais Lineares.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

O objetivo específico será fazer algumas aplicações da análise funcional e os teoremas importantes.

3 ESPAÇOS MÉTRICOS, DE BANACH, E DE HILBERT

Inicialmente estudaremos os espaços métricos que são conjuntos associados a uma função que mede a distância entre os elementos. Neste contexto definiremos sequências de Cauchy, que formam a base, junto com os espaços normados, para desenvolver a teoria de espaços de Banach.

Alguns teoremas, lemas, proposições e exemplos somente serão enunciados e as demonstrações podem ser encontradas nas referências.

Definição 3.1 *Sejam um conjunto de $M \neq \emptyset$ e $d : M \times M \to \mathbb{R}$. Indiquemos por $d(x,y)$ a imagem do par genérico $(x,y) \in M \times M$, através da função d. Dizemos que d é uma métrica sobre M se as seguintes condições se verificam para quaisquer $x, y, z \in M$:*

(M1) $d \geq 0$,

(M2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M3) $d(x,y) = d(y,x), \forall x,y \in M$

(M4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z), \forall x,y,z \in M$

A propriedade $(M4)$ é conhecida como desigualdade triangular e se motiva no fato de que na geometria elementar cada lado de um triângulo tem medida menor que a soma das medidas dos outros dois lados.

Exemplo 3.2 *Em $\mathbb{R}$ temos a métrica usual dada por $d(x,y) = |x-y|$*

Demonstração. Verificaremos as propriedades da distância

(i) $d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x)$

(ii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \longrightarrow |x-z| \leq |x-y| + |y-z|$

Exemplo 3.3 (Plano euclidiano $\mathbb{R}^2$) *O espaço métrico euclidiano é obtido a partir do conjunto de pares ordenados de números reais $x = (a,b)$, $y = (c,d)$. Sua métrica definida por:*

$$d(x,y) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

Além disso, pode-se obter outro espaço métrico com o mesmo conjunto anterior, mas define-se outra métrica d por:

$$d(x,y) = |a-c| + |b-d|$$

Pode-se observar que, dentro de um conjunto que contenha mais de um elemento, pode-se obter mais de um espaço métrico com métricas diferentes.

Exemplo 3.4 (Espaço de sequência l_∞) *Esse espaço define-se pelo conjunto X de todas as sequências limitadas de números complexos, ou seja, cada elemento de X é uma sequência complexa* $x = (x_1, x_2, ...)$ *tal que para todo* $j = 1,2,3,..$ *tem-se* $|x_j| \leq c_x$. *Onde* c_x *é um número real que pode depender de x, mas não depende de j. A métrica escolhida é definida por:*

$$d(x,y) = \sup |x_j - y_j|$$

onde $j \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.5 (Espaço métrico discreto) *Tomando qualquer conjunto X, a métrica discreta em X é definida por:*

$$d(x,x) = 0$$

e

$$d(x,y) = 1, (x \neq y)$$

Todo ponto de X é isolado. Este espaço (X,d) *é chamado espaço métrico discreto.*

3.1 CONJUNTO ABERTO, CONJUNTO FECHADO

Nesta seção apresentaremos as noções básicas de conjunto aberto, conjunto fechado e ponto de acumulação, que são os conceitos mais importantes que serão, utilizados mais adiante em certas demonstrações.

Definição 3.6 *Sejam* $r > 0$ *e* $x_0 \in X$. *Definimos a bola aberta de centro* x_0 *e raio r como,* $B(x_0;r) = \{x \in X | d(x,x_0) < r\}$.

Exemplo 3.7 *Seja* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a métrica em* $\mathbb{R}$. *Então, a bola aberta de centro* $x_0 \in \mathbb{R}$ *e* $r > 0$ *é o conjunto:*

$$B(x_0;r) = \{x \in \mathbb{R} | d(x,x_0) = |x - x_0| < r\}$$

Definição 3.8 *Sejam* $r > 0$ *e* $x_0 \in X$. *Definimos a bola fechada de centro* x_0 *e raio r como,* $B[x_0;r] = \{x \in X | d(x,x_0) \leq r\}$.

Definição 3.9 *Sejam X espaço métrico e* $A \subset X$.

1 Um ponto $a \in X$ é dito ser ponto de acumulação de A se para cada $b > 0$

$$B(a;b) \cap A - \{a\} \neq \emptyset$$

2 Seja $A \subset X$ um ponto $x_o \in X$ é dito ponta da fronteira ou de bordo de A se para todo $b > 0$

$$B(a;b) \cap A \neq \emptyset$$

e

$$B(a,b) \cap (X - A) \neq \emptyset$$

3 Um ponto $a \in X$ é dito aderente de A se para cada $b > 0$

$$B(a;b) \cap A \neq \emptyset$$

Definição 3.10 (Fecho de um conjunto) *Seja $M \subset X$. O fecho de M é a intersecção de todos os conjuntos fechados que contém M e será denotado por $\bar{M}$.*

Exemplo 3.11 *O fecho do conjunto $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\}$ é o conjunto $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} ...\}$.*

Definição 3.12 (Conjuntos densos, Conjuntos separáveis) *Um conjunto de M de um espaço métrico X é dito ser um conjunto denso em X se*

$$\bar{M} = X.$$

X é dito ser separável se ele tem um conjunto contável que é denso em X.

Exemplo 3.13 (Plano complexo) *O plano complexo é separável.*

Demonstração.

Um subconjunto contável de $\mathbb{C}$ é um conjunto de todos os números complexos cuja parte real e imaginária são ambas racionais.

□

Exemplo 3.14 (Espaço métrico discreto) *O espaço métrico discreto X é separável se, e somente se, X é contável.*

Demonstração. O tipo de métrica implica que nenhum subconjunto de X pode ser denso. Então o único conjunto denso em X é ele mesmo. □

3.2 CONVERGÊNCIA E SEQUÊNCIA DE CAUCHY

Definição 3.15 *Defini-se uma sequência $(X_n)_{n \in A}$ como uma função $f : A \subset \mathbb{N} \to X$*

Exemplo 3.16 *Se (a_n) = 1 para todo $n \in \mathbb{N}$, temos a sequência constante $(1, 1, 1, 1, ...)$. Essa sequência é limitada, não-decrescente e não-crescente.*

Exemplo 3.17 *Sendo $(a_n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos a sequência $(1, 2, 3, 4, ..., n, ...)$, que é limitada inferiormente, ilimitada superiormente, monótona crescente.*

Proposição 3.18 *A sequência $\big(X_n\big)$ de números reais é limitado se, $(|X_n|)$ é limitada.*

Exemplo 3.19 *A sequência $X_n = n$ em $\mathbb{R}$ não é limitada.*

Definição 3.20 *Uma sequência $(x_n)_n$ em espaço métrico é dita de Cauchy se para todo $\varepsilon > 0$ existir um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon,$$

para todo $m, n > n_0$

O espaço X é dito ser completo se cada sequência de Cauchy converge em X, ou seja, tenha um limite que seja elemento de X.

Teorema 3.21 *Toda sequência convergente em um espaço métrico é uma sequência de Cauchy.*
Demonstração.

Seja X um espaço métrico e $(x_n)_{n\in N}$ sequência em X tal que $x_n \to x$. Então dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ temos que $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Logo, pela desigualdade triangular obtemos que:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall m, n > n_0.$$

Isto mostra que $(x_n)_{n\in N}$ é uma sequência de Cauchy. □

Teorema 3.22 (Fecho) *Seja M um subconjunto não vazio de um espaço métrico (X,d) e $\bar{M}$ seu fecho. Então:*

(a) $x \in \bar{M}$ se, e somente existir uma sequência (x_n) em M tal que $x_n \longrightarrow x$;

(b) M é fechado se, e somente se $x_n \in M$ e $x_n \longrightarrow x$ implicar que $x \in M$.

Demonstração.

(a) Seja $x \in \bar{M}$. Se $x \in M$, a sequência da forma $(x, x, x, ...)$ que converge para x. Se $x \notin M$, ele é um ponto de acumulação de M. Então para cada $n = 1, 2, 3...$ a bola $B(x; \frac{1}{n})$ contém um $x_n \in M$, e $x_n \longrightarrow x$, pois $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ com $n \longrightarrow \infty$. De outra forma, se $(x_n$ está em M e $x_n \longrightarrow x$, então $x \in M$ ou cada vizinhança de x contém pontos $x_n \neq x$, tal que x é um ponto de acumulação de M. Então $x \in \bar{M}$. Então, $x \in M$ pela definição de fecho.

(b) M é fechado se, e somente se $M = \bar{M}$, tal que (b) segue de (a).

□

Teorema 3.23 (Subespaço completo) *Um subespaço M de um espaço métrico completo X é completo se, e somente se o conjunto M é fechado em X.*

Demonstração.

Seja M completo. Pelo teorema anterior, para cada $x \in \bar{M}$ existe uma sequência (X_n) em M na qual converge para x. Como (x_n) é de Cauchy, pelo teorema de sequência convergente, e como M é completo, (x_n) converge em M e seu limite é único. Dessa forma, isso implica que $x \in M$. E prova que M é fechado. De outra forma, seja M fechado e (x_n) e $x \in X$ como $M = \bar{M}$, por hipótese. Então, a sequência arbitrária de Cauchy (x_n) converge em M, no qual prova a completude de M. $\square$

Exemplo 3.24 (Completude do C(a, b)) *O espaço de função $C[a,b]$ é completo, aqui [a, b] é dado qualquer intervalo fechado em $\mathbb{R}$.*

Demonstração.

Seja (x_m) qualquer sequência de Cauchy em C[a, b]. Então, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $\forall m, n > n_0$ temos

$$d(x_m, x_n) = \max_{t \in J} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon \tag{3-1}$$

Considere $J = [a,b]$. Portanto, para qualquer fixo $t = t_0 \in J$,

$$|x_m(t_0) - x_n(t_0)| < \varepsilon$$

Isso mostra que $(x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots)$ é a sequência de Cauchy dos números reais. Sabemos que $\mathbb{R}$ é completo, então a sequência converge, $x_m(t_0) \longrightarrow x(t_0)$ como $m \longrightarrow \infty$. Desta forma podemos associar a cada $t \in J$ o único número real $x(t)$. Isso define a função x em J, e mostramos que $x \in C[a,b]$ e $x_m \longrightarrow x$.

De (3-1) com $n \longrightarrow \infty$ temos:

$$\max_{t \in J} |x_m(t) - x(t)| \leq \varepsilon$$

$$(n > N)$$

Portanto, para cada $t \in J$,

$$|x_m(t) - x(t)| \leq \varepsilon$$

$$(n > N)$$

Isto mostra que $(x_m(t)) \longrightarrow x(t)$ uniformemente em J. Como os x_m são contínuas em J e convergem uniformemente, a função limite é contínua em J.Como $x \in C[a,b]$. Também $x_m \longrightarrow x$. Isso prova a completude do $C[a,b]$. $\square$

Exemplo 3.25 (Funções contínuas) *Seja X o conjunto de todas as funções reais de valor real em* $J = [0,1]$, *e* $d(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)|\, dt$. *Este espaço métrico* (X,d) *não é completo.*

3.3 COMPLETAMENTO DE ESPAÇOS MÉTRICOS

A noção de completamento de espaços normados é muito importante, pois várias operações e conceitos só tomam uma forma satisfatória após algum tipo de extensão ou completamento.

Definição 3.26 (Mapeamento Isométrico, Espaços Isométricos) *Seja* $X = (X,d)$ *e* $= (\hat{X},\hat{d})$ *são espaços métricos. Então:*

(a) O mapeamento T de X em X é dito isometria se T preserva as distâncias, isto é, para todos $x,y \in X$,

$$d(Tx,Ty) = d(x,y),$$

onde Tx e Ty são imagens de x e y respectivamente.

(b) Dois espaços métricos (X,d) e $(\hat{X},\hat{d})$ são ditos isométricos se existe uma isometria $k : X \longrightarrow X$ bijetora.

Teorema 3.27 (Completamento) *Se* (X,d) *é um espaço métrico, então ele é isométrico a um subconjunto dentro de um espaço métrico completo* $\hat{X} = (\hat{X},\hat{d})$*; tal que* $\hat{X}$ *é chamado de completamento de* X*. Além disso, quaisquer dois completamentos de* X *são isométricos.*

Demonstração.
A demonstração pode ser encontrada em [1].

3.4 ESPAÇOS NORMADOS

Neste tópico vamos introduzir os conceitos sobre espaço normado que é um espaço vetorial em que existe uma métrica compatível com a sua estrutura de espaço vetorial.

Definição 3.28 *Dizemos que a função* $||.|| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma norma se as seguintes propriedades forem satisfeitas:*

(N1) $||x|| \geq 0$

(N2) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(N3) $||\alpha x|| = |\alpha|\, ||x||, \forall \alpha \in k$

(N4) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||, \forall x,y \in \mathbb{R}$

Chamamos de espaço normado o par $(X, ||.||)$

Observação 3.29 *Um espaço vetorial normado* $(X, \|.\|)$ *é um espaço métrico com a distância* $d(x,y) = \|x-y\|$. *Chamamos de espaço métrico com a métrica induzida pela norma.*

Definição 3.30 *Um espaço vetorial munido de uma norma completa é chamado de um espaço de Banach.*

Proposição 3.31 *Os espaços vetoriais normados de dimensão finita em* $K = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *são espaços de Banach.*

Exemplo 3.32 *Sejam o espaço vetorial* $\mathbb{R}^n$ *e o espaço* $\mathbb{C}^n = \{(x_1,...,x_2); x_i \in \mathbb{C}\}$. *Pode-se definir uma norma por* $\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_i|^2}$.

Exemplo 3.33 (Espaço l_∞) *Considere o espaço* l_∞ *como sendo o espaço das sequências reais limitadas. Defina a norma como sendo* $\|x\|_\infty = \sup_{i \in x} |x_i|$.

Demonstração. Mostraremos que $||x||_\infty$ é uma norma. Por isso precisamos verificar se as propriedades da norma valem.

(N1) Pela definição temos que $|x_i| \geq 0, \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \|x\|_\infty \geq 0$.

(N2) $\|x\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \sup |x_i| = 0 \Leftrightarrow |x_i| = 0, \forall i \in N \Leftrightarrow x = 0$

(N3) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:

$$||\alpha x||_\infty = \sup |\alpha x_i| = |\alpha| \sup |x_i| = |\alpha| ||x||_\infty.$$

(N4) Seja $x, y \in l^\infty$. Então,

$$\|x+y\|_\infty = \sup |x_i + y_i| \leq \sup(|x_i + |y_i|) = \sup |x_i| + \sup |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty .$$

□

Afirmação 3.34 $(l^\infty, \|x\|_\infty)$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $x_m = (x_1^m, x_2^m, ...)$ sequência de Cauchy em l^∞. Então dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$||x_m - x_n|| = sup|x_i^m - x_i^n| < \varepsilon, \forall m,n > n_0$$

para cada $i = 1,2,...$ fixado temos que

$$|x_i^m - x_i^n| < \varepsilon, \forall m,n > n_0$$

Sabemos que a sequência de números reais é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$ é completo, então podemos concluir que esta sequência converge, isto é, $x_i^m \to x_i$. Com isso, definimos $x = (x_1, x_2, ...)$ como sendo os respectivos limites. Agora mostraremos que $x \in l^\infty$ e que $x_m \to x$. Temos

$$|x_i^m - x_i| \leq \varepsilon, \forall m, n_0$$

Para cada $x_m \in l^\infty$ e existe um número real l_m tal que $|x_i^m| \leq l_m, \forall i \in \mathbb{N}$. usando a desigualdade triangular temos:

$$|x_i| = |x_i - x_i^m + x_i^m| \leq |x_i - x_i^m| + |x_i^m| \leq \varepsilon + l_m.$$

Assim mostramos que a sequência (x_m) é limitada ou seja $x \in l^\infty$.

Por equação $|x_i^m - x_i^n| < \varepsilon, \forall m > n_0$ obtemos que

$$||x_m - x|| = \sup |x_i^m - x_i| \leq \varepsilon, \forall m, n_0$$

Isso mostra que $x_m \to x$. Concluímos que l_∞ é completo. □

3.5 BASE DE SCHAUDER

Nesta seção apresentaremos o que é uma base de Schauder em espaço de Banach, damos exemplos e apresentamos alguns resultados importantes que serão utilizados mais adiante.

Definição 3.35 *Uma sequência $(x_n)_n$ em um espaço normado X é dita uma base de Schauder de X, se para todo $x \in X$ existe uma única sequência $(\alpha_n)_n$ de escalares tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$.*

Proposição 3.36 *Se $(x_n)_{n=1}$ é base de Schauder de um espaço de Banach X, então o conjunto $\{x_n \in X, n \in \mathbb{N}\}$ é linearmente independente.*

Demonstração.

Suponha que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n = 0$, onde $k \in \mathbb{N}$ chamando $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$, segue da unicidade de representação que é a representação de x em termos de base de schauder. Aplicando x_j em x segue que $a_j = x_j = x_j\left(\sum_{n=1}^{k} \alpha_n x_n\right) = x_j(0) = 0$, para cada $j = 1, ..., k$.

Logo, $\{x_n \in X, n \in \mathbb{N}\}$ é linearmente independente. □

3.6 ESPAÇO NORMADO DE DIMENSÃO FINITA E SUBESPAÇOS

Nesta seção estudaremos propriedades que caracterizam os espaços normados de dimensão finita. Se X tiver dimensão finita, vamos mostrar que todas as normas em X são equivalentes e que toda aplicação linear $T : X \longrightarrow Y$ entre os espaços normados é contínua. E enunciaremos o teorema de dimensão finita que nos garante que, todo espaço normado de dimensão finita é completo.

Lema 3.37 (Combinação linear) *Seja $\{x_1,...,x_n\}$ um conjunto de vetores linearmente independente de um espaço normado X, então existe uma constante $c > 0$, que depende do conjunto X, tal que*

$$||\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n|| \geq c(|\alpha_1| + ... + |\alpha_n|) \tag{3-2}$$

Teorema 3.38 *Seja X um espaço normado de dimensão finita. Então todo operador linear em X é limitado.*

Demonstração.

Seja $dimX = n$ e $\{e_1,.....e_n\}$ uma base em X de tal forma que se $x \in X$ temos

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$$

.

Como T é um operador linear definido em X, então

$$||Tx|| = ||T\sum_{j=1}^{n} x_j e_j|| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j|||T_{e_j}|| \leq max||T_{e_j}|| \sum_{j=1}^{n} |\varepsilon_j| \tag{3-3}$$

Aplicando o lema (3-2) enunciado acima obtemos

$$\sum_{j=1}^{n} |\varepsilon_j| \leq \frac{1}{c}||\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j e_j|| = \frac{1}{c}||x|| \tag{3-4}$$

Somando as eqauções (3-3) e (3-4):

$$||Tx|| \leq \gamma||x||$$

onde $\gamma = \frac{1}{c}max||T_{e_k}||$, resulta que $||T|| \leq \gamma$, logo T é limitado, onde

$$||T|| \sup_{||x||=1} ||Tx||.$$

□

Definição 3.39 (Norma equivalente) *Uma norma $||.||$ em um espaço vetorial X é dito equivalente a uma norma $||.||_0$ sobre X se houver números positivos a e b tal que para todos $x \in X$ temos*

$$a||x||_0 \leq ||x|| \leq b||x||_0 \tag{3-5}$$

Teorema 3.40 (Normas equivalentes) *Em um espaço vetorial X de dimensão finita, qualquer norma $||.||$ é equivalente a qualquer outra norma $||.||_0$.*

Demonstração.

Seja dim $X = n$ e $\{e_1,...,e_n\}$ uma base qualquer para X, então cada $x \in X$ tem uma única representação

$$x = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n.$$

Por lema (3-2) existe uma constante positiva c tal que

$$||x|| \geq c(|\alpha_1| + ... + |\alpha_n|).$$

Por outro lado, da desigualdade triangular, temos

$$||x||_0 \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|||e_j||_0 \leq k \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|,$$

Com $k = max||e_j||_0$.

Este teorema tem uma grande importância na prática. Por exemplo, implica que a convergência ou divergência de uma sequência em um espaço vetorial de dimensão finita não depende da escolha particular de uma norma nesse espaço.

□

Teorema 3.41 *Todo espaço normado de dimensão finita é completo.*

Demonstração.

De fato as normas equivalentes geram as sequências de Cauchy. Assim, se $x_n \longrightarrow x_0$ em uma norma, então $x_n \longrightarrow x_0$ na outra norma. Mas, como todas as normas em X são equivalentes, o espaço X é completo com uma norma arbitrária.

□

Teorema 3.42 (Completude) *Cada subespaço de Y de dimensão finita do espaço normado X é completo. Em particular, cada espaço normado de dimensão finita é completo.*

Demonstração.

Consideremos uma sequência arbitrária de Cauchy (y_m) em Y e mostramos que é convergente em Y; o limite será denotado por y. Seja dim Y = n e $\{e_1,...,e_n\}$ qualquer base para Y. Então, cada y_m tem uma única representação da forma

$$y_m = \alpha_1^m e_1 + ... + \alpha_n^m e_n.$$

Como (y_m) é uma sequência de Cauchy, $\forall\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||y_m - y_r|| < \varepsilon$ quando $m,r > n_0$. Pelo lema (3-2) temos que $\varepsilon > ||y_m - y_r|| = \left|\left|\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j^m - \alpha_j^r)e_j\right|\right| \geq c\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j^m - \alpha_j^r|$, onde $m,r > n_0$ Dividindo os dois lados por $c > 0$ temos

$$|\alpha_j^m - \alpha_j^r| \leq \sum_{j=1}^{n}|\alpha_j^m - \alpha_j^r| < \frac{\varepsilon}{c}$$

Isto mostra que cada uma das n sequências $(\alpha_j^m) = (\alpha_j^1, \alpha_j^2, ...)$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, com $j = 1,...,n$ Portanto converge.

Denotamos α_j como o limite. Usando esses n limites $\alpha_1,...,\alpha_n$ definimos

$$y = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n.$$

Claramente, $y \in Y$. Além disso,

$$||y_m - y|| = \left|\left|\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j^m - \alpha_j)e_j\right|\right| \leq \sum_{j=1}^{n}|\alpha_j^m - \alpha_j|||e_j||.$$

Temos que, $\alpha_j^m \longrightarrow \alpha_j$ e $||y_m - y|| \longrightarrow 0$, isto é, $y_m \longrightarrow y$. Isso mostra que (y_m) é convergente em Y. Como (y_m) foi uma sequência de Cauchy arbitrária em Y, isso prova que Y é completo.

$\square$

4 OPERADORES LINEARES

Nesta seção falaremos sobre os conceitos de operadores lineares em espaços normados. Os operadores lineares limitados formam uma classe muito importante visto que estes podem tirar de partido da estrutura vetorial. O resultado é aquele que estabelece que um operador é limitado se e somente é contínuo. Vamos usar as seguintes notações:

(a) $D(T)$ denotado domínio de T

(b) $R(T)$ denotado conjunto imagem de T e

(c) $N(T)$ denotado núcleo de T, isto é $N(T) = \{x \in D(T)|Tx = 0\}$

Definição 4.1 (Operador linear) *Sejam X,Y dois espaços vetoriais sobre o mesmo corpo K. Uma aplicação $T : D(T) \subset X \to Y$ diz-se um operador linear se:*

(i) $D(T)$ é um espaço vetorial e a imagem $R(T) \subset Y$,

(ii) Para quaisquer $x,y \in D(T)$ e escalares $\alpha,\beta \in K$ temos $T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$.

Exemplo 4.2 (Operador identidade) *O operador identidade $I : X \to X$ definido por $I_{xx} = x$ para qualquer $x \in X$.*

Demonstração.

De fato sejam $x,y \in X$ e $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Temos: $I(\alpha x + \beta y) = \alpha I(x) + \beta I(y)$. □

Exemplo 4.3 (Operador nulo) *O operador nulo* $0 : X \to Y$ *é definido por* $0x = 0$ *para todo* $x \in X$.

Exemplo 4.4 (Operador integração) *Seja* $X = C([0,1])$ *o espaço vectorial das funções reais contínuas definidas em* $[0,1]$. *Definimos*

$$T : C([0,1]) \longrightarrow C([0,1])$$

,

$$x \longrightarrow (Tx)(t) = \int_0^t x(s)\,ds.$$

Como a integral é uma operação linear, então o operador T *também é linear.*

4.1 OPERADORES LINEARES LIMITADOS E ESPAÇO DUAL

Nesta seção apresentaremos alguns exemplos, e definiremos o espaço dual de um espaço normado. O resultado mais importante deste tópico, é o espaço formado pelos operadores limitados, o qual forma um espaço normado $B(X,Y)$.

Definição 4.5 (Operador limitado) *Sejam* X, Y *espaços normados e* $T : D(T) \to Y$ *um operador linear. Então* T *se diz um operador linear se existir uma constante* c *tal que para todos* $x \in D(T)$ *temos*

$$||Tx|| \leq c||x||.$$

Definição 4.6 (Operador contínuo) *Sejam* X, Y *espaços normados e* $T : D(T) \to Y$ *um operador linear dado. Então* T *é contínuo em* $x_0 \in D(T)$ *se para qualquer* $\varepsilon > 0$ *e* $\delta > 0$ *tal que*

$$||x - x_0|| < \delta \Rightarrow ||T(x) - T(x_0)|| < \varepsilon.$$

4.2 TEOREMA CONTINUIDADE E LIMITAÇÃO

Teorema 4.7 *Seja* $T : D(T) \longrightarrow Y$ *operador linear, onde* $D(T) \subset X$ *e* X, Y *são espaços normados. Então:*

(i) T *é contínua se somente se* T *é limitado.*

(i) se T *é continua num ponto, então* T *é contínuo.*

Demonstração.

(i) Para $T = 0$ é trivial. Suponhamos que $T \neq 0$. Então $||T|| \neq 0$. Suponhamos que T é limitado e para qualquer $x_0 \in D(T)$. Escolhemos $\delta = \frac{\varepsilon}{\|T\|}$ e para qualquer $x \in D(T)$ tal que

$$||x - x_0|| < \delta$$

Obtemos

$$||Tx - Tx_0|| = ||T(x - x_0)|| \leq \|T\| \, ||x - x_0|| < \|T\| \, \delta = \varepsilon.$$

Como $x_0 \in D(T)$ foi escolhido, isso mostra que T é contínuo. Assumamos que T é contínuo da arbitrariedade de $x_0 \in D(T)$. Então para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $||Tx - Tx_0|| \leq \varepsilon$ para todo $x \in D(T)$ satisfazendo $||x - x_0|| \leq \delta$.

Para $y \neq 0 \in D(T)$ definimos $x = x_0 + \frac{\delta}{||y||} y \Leftrightarrow x - x_0 = \frac{\delta}{\|y\|} y \Rightarrow \|x - x_0\| = \delta$

Logo,

$$||Tx - Tx_0|| = ||T(x - x_0)|| = ||T \frac{\delta}{\|y\|} y|| = \frac{\delta}{\|y\|} \|Ty\| < \varepsilon$$

ou

$$\|Ty\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \|y\| .$$

Passando ao supremo em ambos lados obtemos $\|Ty\| \leq c \, \|y\|$, onde $c = \frac{\varepsilon}{\delta}$, e mostramos que T é limitado.

(ii) se T é contínuo num ponto, então pela parte da prova (i).T é limitado, logo T é contínuo por (i) □

Definição 4.8 (Restrição) *A restrição de um operador $T : D(T) \longrightarrow Y$ a um subconjunto $B \subset D(T)$ é denotado por*

$$T|_B$$

E é o operador definido por

$$T|_B : B \longrightarrow Y,$$

$$T|_B x = Tx$$

para todo $x \in B$.

Definição 4.9 (Extensão) *Uma extensão de T a um conjunto $M \supset D(T)$ é um operador*

$$\tilde{T} : M \longrightarrow Y$$

De tal modo que $\tilde{T}|_{D(T)} = T$, *isto é,* $\tilde{T}x = Tx$ *para todo* $x \in D(T)$.

Teorema 4.10 (Extensão linear limitada) *Seja* $T : D(T) \subset X \longrightarrow Y$ *um operador linear limitado,sendo* X *um espaço normado e* Y *um espaço de Banach. Então* T *admite uma extensão*

$$\tilde{T} : \overline{D(T)} \longrightarrow Y$$

Onde $\tilde{T}$ *é o operador linear limitado da norma*

$$||\tilde{T}|| = ||T||.$$

Demonstração.

Consideramos qualquer $x \in \overline{D(T)}$. Pelo teorema de fecho e conjunto fechado há uma sequencia (x_n) em $D(T)$ de modo que $x_n \longrightarrow x$. Como T é linear limitado, temos

$$||Tx_n - Tx_m|| = ||T(x_n - x_m)|| \leq ||T||||x_n - x_m||.$$

Isso mostra que (Tx_n) é de Cauchy pois x_n converge. Por pressuposição, Y é completo tal que (Tx_n) converge, isso quer dizer

$$Tx_n \longrightarrow y \in Y.$$

Definimos $\tilde{T}$ por

$$\tilde{T} = y.$$

Mostraremos que esta definição é independente da escolha particular de uma sequência em $D(T)$ que converge para x. Suponhamos que $x_n \longrightarrow x$ e $z_n \longrightarrow x$. Então, $v_m \longrightarrow x$, onde v_m é a sequência $(x_1, z_1, x_2, z_2, ...)$.

Consequentemente (Tv_m) converge pela continuidade dos operadores lineares limitados, e as duas subsequências (Tx_n) e (Tz_n) de (Tv_m) deve ter o mesmo limite. Isso prova que $\tilde{T}$ é unicamente definido a cada $x \in \overline{D(T)}$.

Claramente, $\tilde{T}$ é linear e $\tilde{T}x = Tx$ para cada $x \in D(T)$, tal que $\tilde{T}$ é uma extensão de T. Usamos

$$||Tx_n|| \leq ||T||||x_n||$$

Então $Tx_n \longrightarrow y = \tilde{T}x$. Como $x \longrightarrow ||x||$ define um mapeamento contínuo, obtemos

$$||\tilde{T}x|| \leq ||T||||x||.$$

Consequentemente $\tilde{T}$ é limitado e

(a) $||\tilde{T}|| \leq ||T||$.

Claro que,

(b) $||\tilde{T}|| \geq ||T||$ por que a norma, sendo definido um supremo, não pode diminuir uma extensão.

Juntando (a) e (b) temos $||\tilde{T}|| = ||T||$.

$\square$

4.3 FUNCIONAIS LINEARES

Os funcionais lineares representam uma grande ferramenta no estudo de espaços vetoriais de dimensão finita. Além disso, este conceito desempenha um papel importante nas discussões sobre subespaços vetoriais e sistemas de equações lineares homogêneos.

Definição 4.11 *Um funcional linear f é um operador linear com domínio em um espaço vetorial X e a imagem no campo escalar de X. Assim,*

$$f : D(T) \longrightarrow K,$$

onde $K = \mathbb{R}$ se X é um real e $K = \mathbb{C}$ se X é complexo.

Definição 4.12 (Funcional linear limitado) *Um funcional linear limitado f é um operador limitado com a imagem no campo escalar de um espaço normado X na qual o dominio $D(f)$ pertence. Assim, existe um número real c tal que para todo $x \in D(f)$.*

$$|f(x)| \leq c||x||.$$

E a norma é

$$||f|| = \sup_{x \in D(f)} \frac{|f(x)|}{||x||},$$

com $x \neq 0$

$$||f|| = \sup_{x \in D(f)} |f(x)|,$$

com $||x|| = 1$.

Exemplo 4.13 *A norma $||.|| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é um espaço normado $(X, ||.||)$ e um funcional em X em que não é linear.*

4.4 ESPAÇOS DE SEQUÊNCIAS

Falaremos dos espaços de sequências e estudaremos alguns resultados precursores, a saber as desigualdades de Holder e Minkowski.

Teorema 4.14 *Seja $p \geq 1$ um número real fixo. Pela definição, cada elemento no espaço l_p é uma sequência de números $x = (\varepsilon_j) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...)$ tais que $|\varepsilon_1|^p + |\varepsilon_2|^p + ...$ converge, assim*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varepsilon_j|^p < \infty \tag{4-1}$$

E define sua métrica por

$$d(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varepsilon_j - \eta_j| \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{4-2}$$

onde $y = (\eta_j)$ e $\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^p < \infty$, será obtido o espaço l_p. Em particular, quando $p = 2$ temos a sequência de Hilbert no espaço l_2 com a métrica definida por

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |\varepsilon_j - \eta_j|^2}. \tag{4-3}$$

Agora, para provar que o espaço l_2 é um espaço métrico será preciso apenas provar que ela converge, e assim a desigualdade triangular está satisfeita. Procedendo passo a passo os itens a seguir, deve-se encontrar:

(a) uma desigualdade auxiliar;

(b) a desigualdade de Holder (a);

(c) a desigualdade de Minkowski (b)

(d) a desigualdade triangular (b) de (c).

Segue que,

(a) Tomo $p > 1$ define q por

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q} = 1. \tag{4-4}$$

Onde p e q são chamados de expoentes conjugados. De (4-4) temos

$$pq = p + q, (p-1)(q-1) = 1. \tag{4-5}$$

Então, $\frac{1}{(p-1)} = q - 1$, tal que $u = t^{p-1}$ implica $t = u^{q-1}$. Sejam α e β quaisquer números positivos. Como $\alpha\beta$ é a área do retângulo assim, pela integração, obtém a desigualdade:

$$\alpha\beta \leq \int_0^{\alpha} t^{p-1} dt + \int_0^{\beta} u^{q-1} du = \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}. \tag{4-6}$$

Observe que a desigualdade é trivial se $\alpha = 0$ e $\beta = 0$.

(b) Sejam $\tilde{\varepsilon_j}$ *e* $\tilde{\eta_j}$ *tais que*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\tilde{\varepsilon_j}|^p = 1, \sum_{j=1}^{\infty} |^q = 1. \tag{4-7}$$

Defina $\alpha = |\tilde{\varepsilon_j}|$ *e* $\beta = |\tilde{\eta_j}|$*, de (4-6) tem-se a desigualdade*

$$|\tilde{\varepsilon_j}\tilde{\eta_j}| \leq \frac{1}{p}|\tilde{\varepsilon_j}|^p + \frac{1}{q}|\tilde{\eta_j}|^q.$$

Aplicando o somatório de (4-7) e (4-4), tem

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\tilde{\varepsilon_j}\tilde{\eta}| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{4-8}$$

Tomando quaisquer diferentes de zero $x = (\varepsilon_j) \in l_p$ *e* $y = (\eta_j) \in l_q$ *e o conjunto*

$$\tilde{\varepsilon_j} = \frac{\varepsilon_j}{\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varepsilon_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \tag{4-9}$$

$$\tilde{\eta_j} = \frac{\eta_j}{\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_m|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \tag{4-10}$$

Então de (4-7) está satisfeita e pode-se aplicar (4-8). Assim, substituindo (4-9) em (4-8) e fazendo a mutiplicação na desigualdade resultante pelo produto dos denominadores em (4-9), resulta na desigualdade de Holder pelo somatório

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varepsilon_j\eta_j| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varepsilon_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4-11}$$

Onde $p > 1$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. No caso particular, quando* $p = 2$*, então* $q = 2$ *e (4-11) é chamado de desigualdade de Cauchy-Schwarz*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varepsilon_j\eta_j| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\varepsilon_k|^2}\sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^2}. \tag{4-12}$$

(c) A demonstração da desigualdade de Minkowski pode ser encontra em [1].

4.5 ESPAÇOS DUAIS

Nesta seção o objetivo é estudar os duais de espaços normados. Antes disso, vamos definir o que é espaço dual.

Definição 4.15 *Sejam X e Y espaço normados e considere $B(X,Y)$ o conjunto dos operadores lineares limitados de Xem Y. Vamos mostrar que $B(X,Y)$ é um espaço normado. Assim dados $T_1,T_2 \in B(X,Y)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos o operador soma por:*

$$(T_1 + T_2)x = T_1(x) + T_2(x), \forall x \in X$$

E o produto sendo

$$(\alpha T)x = \alpha T(x).$$

Assim $B(X,Y)$ é um espaço normado, que tem a norma definida por
$||T|| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{||Tx||}{||x||} = \sup\limits_{||x||=1} ||Tx||.$

Será que este espaço é de Banach? A resposta está no teorema a seguir.

Teorema 4.16 *Se Y é espaço de Banach, então $B(X,Y)$ é espaço de Banach.*

Demonstração.

Consideremos $(T_n)_n \in \mathbb{N}$ sequência de Cauchy em $B(X,Y)$ e mostremos que (Tn) converge para o operador $T \in B(X,Y)$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in N$ tal que $\forall m,n > n_{0)}$ temos

$$||T_n - T_m|| < \varepsilon$$

Observe que para todo $x \in X$ e $m,n > n_0$ obtemos que:

$$||T_n(x) - T_m(x)|| = ||(T_n - T_m)(x)||||x|| < \varepsilon||x||. \tag{4-13}$$

Agora para cada $x \in X$ fixado e dado $\varepsilon > 0$ escolhemos ε_1 tal que $\varepsilon_1||x|| < \varepsilon_1$. Por 4-13 temos que $||T_n(x) - T_m(x)|| < \varepsilon_1$ e vemos que $T_n(x)$ é Cauchy em Y. Como Y é completo então existe $T(x) \in Y$ tal que $T_n(x) \to T(x)$. Claramente, o limite $y \in Y$ depende da escolha de $x \in X$. Assim,defina o operador $T : X \longrightarrow Y$ tal que $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$.

□

Definição 4.17 (Espaço Dual X') *Seja X um espaço normado. Então o conjunto dos funcionais lineares limitados sobre X, denotado por X', é um espaço normado com a norma definida por* $||f|| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{||x||} = \sup\limits_{||x||=1} |f(x)|$

Exemplo 4.18 *O espaço dual de $\mathbb{R}^n$ é $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração.

Sabemos que a base de Schauder para l^1 é (e_k), onde $e_k = \delta_{kj}$. Então todo $x \in l^1$ tem a única representação

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k e_k.$$

Consideremos qualquer $f \in l^*$, onde l^* é o espaço dual do l^1. Como f é linear e limitado, temos

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \beta_k$$

Com $\gamma_k = f(e_k)$

Onde os números de $\gamma_k = f(e_k)$ são determinados unicamente por f. Também $||e_k|| = 1$ e

$$|\gamma_k| = |f(e_k)| \leq ||f||||e_k|| = ||f||,$$

Daí $(\gamma_k) \in l^\infty$ □

É importante que o conjunto de todos os funcionais lineares definidos em um espaço vetorial X possa ser feito em um espaço vetorial. Este espaço é denotado por X^* e é chamado de espaço dual algébrico de X.

Teorema 4.19 (Dimensão de X^*) *Seja X um espaço vetorial de n-dimensões e a base $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ para X. Então $F = \{f_1, ..., f_n\}$ dado por $f(e_j) = \delta_{jk} = 0$ se $j \neq k$, e $f(e_j) = \delta_{jk} = 1$ se $j = k$, é uma base para o dual algébrico X^* de X, e $dimX^* = dimX = n$.*

Demonstração.

F é linearmente independente se

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k f_k(x) = 0$$

com $x = e_j$ temos

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k f_k(e_j) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \delta_{jk} = \beta_k$$

De modo que todos os β_k em $\sum_{k=1}^{n} \beta_k f_k(x) = 0$ são zero. Mostramos que cada $f \in X^*$ pode ser representada como uma combinação linear dos elementos de F de uma maneira única. Escrevemos $f(e_j) = \alpha_j$,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \alpha_j$$

Para todos $x \in X$. Por outro lado obtemos

$$f_j(x) = f_j(\varepsilon_1 e_1 + ... + \varepsilon_n e_n) = \varepsilon_j.$$

Junto,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j(x).$$

Daí a representação única do funcional linear$f$ arbitrária em X em termos dos funcionais $f_1, ..., f_n$ é $f = \alpha_1 f_1 + ... + \alpha_n f_n$. □

Lema 4.20 (Vetor zero) *Seja X espaço vetorial de dimensão finita. Se $x_0 \in X$ tem a propriedade de $f(x_0) = 0$ para todo $f \in X^*$, então $x_0 = 0$.*

Demonstração.

Seja a base $\{e_1,...,e_n\}$ para X e $x_0 = \sum \varepsilon_0 e_j$. Então a equação $f(x) = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \alpha_j$ se torna

$$f(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{0j} \alpha_j$$

Pelo pressuposto, isto é zero para cada $f \in X^*$, isso é ,para cada escolha de $\alpha_1,...,\alpha_n$. Portanto, todos ε_{0j} devem ser zero. □

5 ESPAÇOS DE HILBERT

O curso de Álgebra Linear a utilidade de se munir um espaço vetorial de um produto interno. O produto interno permite 'geometrizar' o estudo dos espaços vetoriais e das transformações lineares. Ao considerar espaços com produto interno, estamos fazendo o caminho inverso e nos aproximando novamente dos espaços euclidianos. Esses espaços são completos, e para nos aproximar ainda mais dos espaços euclidianos, devemos considerar espaços com produto interno que são completos com a norma induzida pelo produto interno. Esses são espaços de Hilbert.

5.1 PRODUTO INTERNO

O espaço de produto interno é um espaço vetorial X com o produto interno definido sobre X. Seja X um espaço de vetorial sobre o corpo K. Um produto interno em X é uma aplicação

$$\langle .,. \rangle : X \times X \longrightarrow K$$

(IP1) $\langle x+y, z \rangle = \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle$,

(IP2) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x,y \rangle$,

(IP3) $\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$,

(IP4) Para todo $x \neq 0$, $\langle x,x \rangle$ é um número real estritamente positivo.

Para todo o produto interno em X defini-se a norma em X dado por $\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$ e para o espaço métrico é dado por $d(x,y) = \|x+y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle}$.

Como os espaços de produto interno são espaços normados, então os espaços de Hilbert são espaços de Banach.

Exemplo 5.1 *Dadas as sequências numéricas* $x = (x_j)_{j=1}$, $y = (y_j)_j$, *a expressão:*

$$\langle x,y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{x_j} y_j$$

define um produto interno em l_2. *A convergência da série em cima decorre da desigualdade de Holder. A norma induzida obviamente coincide com a norma original* $\|.\|_2$ *de* l^2

Teorema 5.2 (Lei do paralelogramo) *Seja* X *um espaço vetorial complexo com produto interno* $\langle .,.\rangle$ *e* $||.||_2$ *a norma proveniente do produto interno. Então, para todos* $x,y \in X$ *tem-se que*

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2\big(||x||^2 + ||y||^2\big)$$

Demonstração.

Pela definição do produto interno temos:

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + ||y||^2 \tag{5-1}$$

$$||x-y||^2 = ||x||^2 - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + ||y||^2 \tag{5-2}$$

Somando as (5-1) e (5-2) temos

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2\big(||x||^2 + ||y||^2\big)$$

□

Exemplo 5.3 *O espaço de* $C[a,b]$ *não é um espaço com produto interno.*

Demonstração.

Mostremos que a norma definida por

$$||x|| = \max_{t\in J} |x(t)|$$

com $t \in J$ e $J = [a,b]$ não pode ser obtido a partir de um produto interno, uma vez que, esta norma não satisfaz a igualdade do paralelogramo (Veja o resultado acima teorema de lei de paralelogramo Teorema). De fato, se tomarmos $x(t) = 1$ e $y(t) = \frac{t-a}{b-a}$, temos $||x|| = 1$, $||y|| = 1$ e

$$x(t) + y(t) = 1 + \frac{t-a}{b-a}$$

$$x(t) - y(t) = 1 - \frac{t-a}{b-a}$$

Consequentemente $||x+y|| = 2, ||x-y|| = 1$ e $||x+y||^2 + ||x-y||^2$
mas, $2(||x||^2 + ||y||^2) = 4$.
Isso completa a demostração. □

Exemplo 5.4 *(O espaço $L^2[a,b]$) A norma definida por $\|x\| = \left(\int_a^b x(t)^2\,dt\right)^2$ pode ser obtida a partir do produto interno definido por :*

$$\langle x,y \rangle = \int_a^b x(t)y(t)\,dt.$$

5.2 PROPRIEDADES DE ESPAÇO DE PRODUTO INTERNO

Enunciaremos os dois resultados mais importantes de espaço de Hilbert, que serão bastante usados para as demostrações mais para adiante.

Lema 5.5 (Desigualdade de Schwarz, Desigualdade triangular) *O produto interno e desigualdade de Schwarz e desigualdade triangular satisfazem*

(a)

$$\left|\langle x,y \rangle\right| \leq ||x||||y||$$

(b)

$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$$

Demonstração.

(a) se x ou y é o vetor nulo, então a prova é trivial. Podemos então supor $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Chame $a = \langle y,y \rangle$ e $b = \langle x,y \rangle$ para concluir que

$$a\overline{b}\langle x,y \rangle = \langle y,y \rangle \overline{b}b = |b|^2 \langle y,y \rangle$$

é um número real positivo. Lembramos que a também é um número real positivo:

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle ax-by, ax-by \rangle &= a\overline{a}\langle x,x \rangle b\overline{a}\langle y,x \rangle - a\overline{b}\langle x,y \rangle + b\overline{b}\langle y,y \rangle \\ &= a^2\langle x,x \rangle - 2\langle Re\left(a\overline{b}\langle x,y \rangle\right) + |b|^2\langle y,y \rangle \\ &= a^2\langle x,x \rangle - 2|b|^2\langle y,y \rangle + |b|^2\langle y,y \rangle \\ &= \langle y,y \rangle\left(\langle y,y \rangle\langle x,x \rangle - |b|^2\right) \\ &= \langle y,y \rangle\left(\langle y,y \rangle\langle x,x \rangle - |\langle x,y \rangle|^2\right) \end{aligned} \tag{5-3}$$

Como $\langle y,y\rangle > 0$ segue que $||y||^2||x||^2 - \left|\langle x,y\rangle\right|^2 = \langle y,y\rangle\langle x,x\rangle - \left|\langle x,y\rangle\right| \geq 0$, o que prova a desigualdade desejada.

(b)
$$\|x+y\|^2 = \langle x+y,x+y\rangle = \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2.$$

Pela desigualdade de Schwarz, temos

$$\left|\langle x,y\rangle\right| = |\langle y,x\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|.$$

Aplicando desigualdade triangular, obtemos

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Tirando a raiz quadrada nos dois lados, obtemos

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\| + \|y\|$$

□

Lema 5.6 (Continuidade de produto interno) *Se o espaço de produto interno $x_n \longrightarrow x$ e $y_n \longrightarrow y$, então $\langle x_n,y_n\rangle \longrightarrow \langle x,y\rangle$.*

Demonstração.

Usando a desigualdade triangular e a desigualdade de Schwarz, obtemos

$|\langle x_n,y_n\rangle| = |\langle x_n,y_n\rangle - \langle x_n,y\rangle + \langle x_n,y\rangle - \langle x,y\rangle| \leq |\langle x_n,y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x,y\rangle| \leq \|x_n\|\,\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\,\|y\| \longrightarrow 0$, pois $y_n - y \longrightarrow 0$ e $x_n - x \longrightarrow 0$ e $n \longrightarrow \infty$. □

5.3 ORTOGONALIDADE

O produto interno, sendo uma generalização do produto escalar em $\mathbb{R}$, pode ser usado para definir ângulo entre dois vetores; contudo, será introduzida apenas a ortogonalidade em espaços produto interno. Em outras palavras, dois vetores do $\mathbb{R}^2$ são ortogonais se, e somente se, o produto interno entre eles é igual a zero.

Definição 5.7 *Seja x elemento em um espaço de produto interno X. x é dito ortogonal ao elemento $y \in X$ se*

$$\langle x,y\rangle = 0.$$

Notação: $x \perp y$.

5.4 COMPLEMENTO ORTOGONAL E SOMA DIRETA

Nesta seção enunciaremos as definições de complemento ortogonal e da soma direta de um subespaço, que são os conceitos fundamentais de espaço de produto interno.

Definição 5.8 *Seja X um espaço vetorial munido do produto interno $\langle .,. \rangle$ e Y um conjunto não vazio de elementos de X. O conjunto Y definido por:*

$$Y^{\perp} = \{x \in X / \langle x,y \rangle = 0\},$$

é complemento ortogonal de y. No caso em que Y não é subespaço vetorial de X, o conjunto Y é denominado complemento ortogonal de $Y^{\perp}$ em X.

Definição 5.9 *Um espaço vetorial é dito soma direta de dois subespaços Y e Z de X, escrevemos:*

$$X = Y \oplus Z,$$

se cada $x \in X$ tem uma única representação $x = y + z$
$y \in Y$, e $z \in Z$.

Teorema 5.10 (Desigualdade de Bessel) *Seja (e_k) a sequência ortonormal em espaço do produto interno X. Então, para cada $x \in X$*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\langle x,e_k \rangle\right|^2 \leq \|x\|^2$$

Demonstração.

Consideremos $(e_1,...,e_n)$ como uma sequência ortonormal em um espaço de produto interno X e temos $x \in spam\{e_1,...,e_n\}$, onde n é fixo, então pela definição de spam, temos

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \tag{5-4}$$

Se tomamos o produto interno por um fixo e_j, obtemos

$$\langle x,e_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, e_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle e_k, e_j \rangle = \alpha_j \langle e_j, e_j \rangle = \alpha_j$$

Com , (5-4)

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \tag{5-5}$$

Se consideremos qualquer $x \in X$, não necessariamente em $Y_n = span\{e_1,...,e_n\}$, podemos definir

$y \in Y_n$ por

$$y = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$$

, onde n é fixo. E então definimos z por $x = y + z$. Vamos mostrar que $z \perp y$. Cada $y \in Y_n$ é uma combinação linear $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$. Com $\alpha_k = \langle y, e_k \rangle$, escolhemos $\alpha_k = \langle x, e_k \rangle$, $k = 1, ..., n$ devemos obter y tal que $z = x - y \perp y$. Para provar isso, observamos pela ortonormalidade que

$$||y||^2 = \left\langle \sum \langle x, e_k \rangle e_k ; \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_m \rangle e_m \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \tag{5-6}$$

Agora vamos mostrar que $z \perp y$:

$$\begin{aligned} \langle z,y \rangle &= \langle x - y,y \rangle \\ &= \langle x,y \rangle - \langle y,y \rangle \\ &= \left\langle x, \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\rangle - ||y||^2 \\ &= \sum \langle x,e_k \rangle \overline{\langle x,e_k \rangle} - \sum_{k=1}^{n} |\langle x,e_k \rangle|^2 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5-7}$$

Consequentemente pela relação do Pitágoras temos

$$||x||^2 = ||y||^2 + ||z||^2$$

pela (5-6) segue que

$$||z||^2 = ||x||^2 - ||y||^2 = ||x||^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2.$$

Como $||z|| \geq 0$, temos para cada $n = 1,2....$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq ||x||^2.$$

□

Teorema 5.11 (Convergência) *Seja e_k a sequência ortonormal num espaço de Hilbert H. Então:*

(a) $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ *converge se somente se a seguinte série converge:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$$

(b) *Se* $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ *converge, então os coeficientes* α_k *são coeficientes de Fourier* $\langle x, e_k \rangle$*, onde* x *é denotado como a soma da série* $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$

(c) *Para qualquer* $x \in H$*,a série* $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$*, com* $\alpha_k =< x, e_k >$ *converge.*

Demonstração.

(a) Seja $s_n = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n$ e $\sigma_n = |\alpha_1|^2 + ... + |\alpha_n|^2$. Então, pela ortonormalidade, para qualquer m e $n > m$,temos

$$\|s_n - s_m\|^2 = \|\alpha_{m+1} e_{m+1} + ... + \alpha_n e_n\|^2 = |\alpha_{m+1}|^2 + ... + |\alpha_n|^2 = \sigma_n - \sigma_m.$$

(s_n) é Cauchy em H se e somente se (σ_n) é Cauchy em $\mathbb{R}$. E sabemos que H e $\mathbb{R}$ são completo,então acabamos provar o item (a) do teorema.

(b) Tomando o produto interno de s_n e e_j e utilizando a ortonormalidade, temos

$$\langle s_n, e_j \rangle = \alpha_j$$

Para $j = 1, ..., k$

Por suposição, $s_n \longrightarrow x$. Isto mostra que o produto interno é contínuo,

$$\langle s_n, e_j \rangle \longrightarrow \langle x, e_j \rangle$$

com $(j \leq k)$.

(c) Pela desigualdade de Bessel nos vemos que a série $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2$ converge. Pelo item (a) concluímos que o item (c) converge.

□

5.5 TEOREMA DE REPRESENTAÇÃO DE RIESZ

O teorema de representação de Riesz é um resultado importante dentro dos estudos de Análise Funcional. A representação de Riesz nos mostra a forma geral de um funcional linear limitado em um espaço de Hilbert. O teorema fala que, para qualquer funcional linear limitado f sobre um espaço de Hilbert H, existe um vetor $z \in H$, tal que a atuação do funcional f sobre um vetor $x \in H$ é o produto interno de x por Z.

Teorema 5.12 *Seja H um espaço de Hilbert e f um funcional linear limitado sobre H. Então, existe um único $z \in H$ tal que,*

$$f(x) = \langle x,z \rangle$$

para qualquer $x \in H$ com a norma

$$\|z\| = \|f\|$$

Demonstração.

Antes de demonstrar o teorema da representação,sabemos que todo espaço vetorial normado de dimensão finita é completo. Além disso, em um espaço vetorial normado de dimensão finita, todos os funcionais lineares são limitados. Logo, pelo enunciado do teorema sabemos que para qualquer linear f sobre X existe $z \in Z$, o qual é unicamente determinado a partir de f, tal que $f(x) = \langle x,z \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i$. De fato, como f é linear para todo $x \in X$, temos que:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$$

Desta forma, tomando $z = f(e_1)e_1 + f(e_2)e_2 + ... + f(e_n)e_n$, pela definição de produto interno temos $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \langle x,z \rangle$. Por fim, pela desigualdade de Schwarz, $|f(x)| = \left|\langle x,z \rangle\right| \leq \|x\| \|z\|$. Logo $\|f\| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|z\|$ Além disso,

$$\|z\| = \frac{\langle z,z \rangle}{\|z\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{|\langle x,z \rangle|}{\|x\|} = \|f\|.$$

Portanto, $\|z\| = \|f\|$

□

Definição 5.13 *Sejam H_1,H_2 espaços de Hilbert e, $T : H_1 \longrightarrow H_2$ um operador linear limitado,dizemos que, $T^* : H_2 \longrightarrow H_1$ é o operador adjunto de T se para quaisquer $x \in H_1$ e $y \in H_2$, T^* satisfaz*

$$\langle Tx,x \rangle = \langle x,T^* y \rangle$$

Teorema 5.14 *O teorema da representação de Riesz, garante a existência e unicidade do operador adjunto T^* com a norma $\|T\| = \|T^*\|$.*

Demonstração.

Mostraremos que o h é um operador linear limitado com a norma. Sabemos que a formula

$$h(y,x) = \langle y,Tx \rangle$$

define a sesquilinear de $H_2 \times H_1$ porque o produto interno é sesquilinear e T é linear. De fato a linearidade conjugada de forma é vista de :

$h(y,\alpha x_1+\beta x_2)=\langle y,T(\alpha x_1+\beta x_2)\rangle$
$=\langle y,\alpha Tx_1+\beta Tx_2\rangle$
$=\overline{\alpha}\langle y,Tx_1\rangle+\overline{\beta}\langle y,Tx_2\rangle$
$=\overline{\alpha}h(y,x_1)+\overline{\beta}h(y,x_2).$
h é limitado. De fato, por desigualdade de Schwarz, temos

$$|h(y,x)|=|\langle y,Tx\rangle|\leq ||y||||Tx||\leq ||T||||x||||y||.$$

Isso implica também que $||h||\leq ||T||$. Além disso, temos $||h||\geq ||T||$ de

$$||h||=\sup\frac{|\langle y,Tx\rangle|}{||y||||x||}\geq \sup\frac{|\langle Tx,Tx\rangle|}{||Tx||||x||}=||T||,$$

Com $x\neq 0,y\neq 0$ e $Tx\neq 0$. Então podemos concluir que

$$||h||=||T||.$$

Pelo teorema da representação de Riesz podemos escrever que

$$h(y,x)=\langle T^*y,x\rangle,$$

E sabemos por este teorema que $T^*:H_2\longrightarrow H_1$ é um operador linear limitado com a norma

$$||T^*||=||h||=||T||.$$

$\square$

6 TEOREMA DE HAHN-BANACH

Nesta seção, enunciaremos o teorema de Hahn-Banach na sua forma analítica, e algumas de suas generalizações. O teorema de Hahn-Banach é um dos resultados fundamentais de análise funcional, ele permite que funcionais lineares definidos em um subespaço de um espaço vetorial sejam estendidos a todo espaço.

Definição 6.1 *Um conjunto parcialmente ordenado é um par $(M, \leq)$ onde M é um conjunto em que existe uma ordenação parcial, isso é uma relação binária denotada por $\leq$ que satisfaz as condições seguintes:*

(P1) $a \leq a, \forall a \in M$ (Reflexiva)

(P2) Se $a \leq b$ e $b \leq a$,então $a = b$ (Anti-simetria)

(P3) Se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$. (Transitiva)

Observação 6.2 *Chamamos $(M, <)$ de conjunto "parcialmente"ordenado por que podem existir elementos em M não comparáveis.*

Definição 6.3 (Conjunto Totalmente Ordenado) *Um conjunto é dito totalmente ordenado ou uma cadeia, se for parcialmente ordenado tal que quaisquer dois elementos do conjunto são comparáveis.*

Um elemento maximal em M é um elemento $a \in M$ tal que para todo $x \in M$ com $a \leq x$ temos $a = x$.

Exemplo 6.4 *A ordem natural $\leq$ de $\mathbb{R}$ é uma relação de ordem total. Observe que $\mathbb{R}$ não possui elemento maximal.*

Lema 6.5 (Lema de Zorn) *Um conjunto não-vazio parcialmente ordenado, no qual todo subconjunto totalmente ordenado possui um limite superior, possui um elemento maximal.*

Demonstração.

A demonstração pode ser encontrada em [1]. □

Para demonstrar o teorema de Hahn-Banach será importante o conceito de funcional sublinear.

Definição 6.6 *Seja X um espaço vetorial real. Um funcional sublinear em X é um funcional que é sub-aditivo, isto é:*

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \; \forall x, y \in X \tag{6-1}$$

e

$$p(\alpha x) = \alpha p(x) \forall \alpha \geq 0 \tag{6-2}$$

Exemplo 6.7 *Se X é um espaço normado, então $p(x) = ||x||$ é sublinear.*

Demonstração.

De fato temos:

(a) $p(x+y) = ||x+y|| \leq ||x|| + ||y|| = p(x) + p(y), \forall x, y \in X$

(b) $p(\alpha x) = |\alpha| ||x|| = |\alpha| ||x|| = \alpha p(x), \forall x \in X, \alpha > 0$

□

Teorema 6.8 (Teorema de Hahn-Banach extensão linear) *Seja X um espaço vetorial real e p um funcional sublinear em X. Seja f um funcional linear definido sobre um subespaço $Z \subset X$ e que satisfaz as seguintes condições:*

$$f(x) \leq p(x),\ \forall x \in Z \tag{6-3}$$

Então f tem uma extensão linear $\tilde{f}$ em Z satisfazendo

$$\tilde{f}(x) \leq p(x),\ \forall x \in X \tag{6-4}$$

Isto é, $\tilde{f}$ é um funcional linear em X, satisfazendo a equação (6-4) em X e $\tilde{f}(x) = f(x)\ \forall x \in Z$

Demonstração.

Provaremos que:

(a) O conjunto E de todas as extensões lineares g de f, que satisfazem $g(x) \leq p(x)$ em seu domínio $D(g)$, pode ser parcialmente ordenado e o lema de Zorn nos garantirá a existência de um elemento maximal $\tilde{f}$ de E.

(b) $\tilde{f}$ é definido em todo o espaço X.

Começamos demonstrado (a)

Seja E o conjunto de todas as extensões lineares g de f que satisfaz a condição

$$g(x) \leq p(x), \forall x \in D(g)$$

Claramente $E \neq \emptyset$ pois $f \in E$. Em E podemos definir uma ordem parcial por $g \leq h$ significa h é uma extensão de g. Por definição $D(h) \supset D(g)$ e $h(x) = g(x)$ para todo $x \in D(g)$. Para cada cadeia $C \subset E$ nós definimos $\hat{g}$ por

$$\hat{g} = g(x),$$

$(g \in C, x \in D(g))$, observe que $\hat{g}$ é um funcional linear com domínio sendo

$$D(\hat{g}) = \bigcup_{g \in C} D(g),$$

que é um espaço vetorial, já que C é uma cadeia. O funcional $\hat{g}$ está bem definido. De fato, para $x \in D(g_1) \cap D(g_2)$ com $g_1, g_2 \in C$ temos $g_1(x) = g_2(x)$ já que C é uma cadeia, e então $g_1 \leq g_2$ ou $g_2 \leq g_1$. Claramente $g \leq \hat{g}\ \forall g \in C$. Então $\hat{g}$ é uma cota superior de C. Como $C \subset E$ foi escolhido de maneira arbitrária, o lema de Zorn implica que E tem um elemento maximal $\tilde{f}$. Pela definição de E, ele é uma extensão linear de f que satisfaz

$$\tilde{f}(x) \leq p(x),$$

com $x \in D(\tilde{f})$.

Agora demonstraremos (b). Vamos mostrar que $D(\tilde{f})$ é todo x. Suponhamos que isso é falso. Escolhemos o $y_1 \in X - D(\tilde{f})$ e consideremos $Y_1 \subset X$ o subespaço gerado por $D(\tilde{f})$ e y_1. Como $D(\tilde{f})$ é um subespaço temos que $0 \in D(\tilde{f})$ assim $y_1 \neq 0$. Logo, $\forall x \in Y_1$ podemos escrever

$$x = y + \alpha y_1 \qquad y \in D(\tilde{f})$$

Esta representação é única. De fato, dado duas representações de Y, $y + \alpha y_1 = \tilde{y} + \beta y_1$ com $\tilde{y} \in D(\tilde{f})$. Teremos $y - \tilde{y} = (\beta - \alpha) y_1$, onde $y - \tilde{y} \in D(\tilde{f})$ porém $y_1\ \not{D}(\tilde{f})$. Assim só existe uma única solução $y - \tilde{y} = 0$ e $\beta - \alpha = 0$.

Um funcional $g_1 \subset Y_1$ é definido por

$$g_1(y + \alpha y_1) = \tilde{f}(y) + \alpha c \tag{6-5}$$

onde c é uma constante real qualquer. Note que g_1 é linear. Além disso, para $\alpha = 0$, temos $g_1(y) = \tilde{f}(y)$. Então g_1 é uma extensão própria de $\tilde{f}$, ou seja uma extensão tal que $D(\tilde{f})$ é o subconjunto próprio de $D(g_1)$. Consequentemente, provamos que $g_1 \in E$ mostrarmos que

$$g_1(x) \leq p(x), \forall x \in D(g_1) \tag{6-6}$$

contradizendo a maximalidade de $\tilde{f}$. Então $D(\tilde{f}) \neq X$ é uma afirmação falsa e $D(\tilde{f}) = X$ é verdadeira.

Para finalizar precisamos encontrar um c adequado na equação (6-5) que satisfaça (6-6). Consideremos $y,z \in D\left(\tilde{f}\right)$. De (6-4) e (6-1) temos

$$\tilde{f}(y) - \tilde{f}(z) = \tilde{f}(y-z) \leq p(y-z) = p(y+y_1, -y_1-z) \leq p(y+y_1) + p(-y_1-z)$$

Isto implica que

$$-p(-y_1-z) - \tilde{f}(z) - \leq p(y+y_1) - \tilde{f}(y);$$

Como do lado esquerdo da desigualdade não temos dependência de y e o lado direto não depende do z, a desigualdade continua valendo se tomarmos o supremo sobre $z \in D(\tilde{f})$ do lado esquerdo e o ínfimo sobre $y \in D\left(\tilde{f}\right)$ do lado direto. Tomamos c um número real tal que :

$$\sup\{-p(-y_1-z) - \tilde{f}(z)\} \leq c \leq inf\{p(y+y_1) - \tilde{f}(y)\}$$

Então, temos:

$$-p(-y_1-z) - \tilde{f}(z) \leq c \quad \forall z \in D(\tilde{f}) \tag{6-7}$$

$$c \leq p(y+y_1) - \tilde{y} \quad \forall y \in D(\tilde{f}) \tag{6-8}$$

Vamos provar (6-6) para $\alpha < 0$ em (6-5) e depois para $\alpha > 0$.

Para $\alpha < 0$ substituindo z por $\frac{y}{\alpha}$ na equação (6-7) isto é,

$$-p\left(-y_1 - \frac{y}{\alpha}\right) - \tilde{f}\left(\frac{y}{\alpha}\right) \leq c$$

Multiplicando por $-\alpha > 0$ dos dois lados, temos

$$\alpha p(-y_1 - \frac{y}{\alpha}) + \tilde{f}(y) \leq -\alpha c.$$

A partir dessa desigualdade e (6-5), usando $y + \alpha y_1 = x$, obtemos a desigualdade desejada

$$g_1(x) = \tilde{f}(y) + \alpha c \leq -\alpha p(-y_1 - \frac{y}{\alpha}) = p(\alpha y_1 + y) = p(x).$$

Para $\alpha = 0$: neste caso, temos $x \in D(\tilde{f})$ e nada para provar.

Para $\alpha > 0$: utilizando (6-8) com y substituído por $\frac{y}{\alpha}$, conseguimos

$$c \leq p\left(\frac{y}{\alpha} + y_1\right) - \tilde{f}\left(\frac{y}{\alpha}\right)$$

Multiplicando por $\alpha > 0$ dos dois lados, obtemos

$$\alpha c \leq \alpha p\left(\frac{y}{\alpha} + y_1\right) - \tilde{f}(y) = p(x) - \tilde{f}(y).$$

A partir desta desigualdade e (6-5), temos

$$g_1(x) = \tilde{f}(y) + \alpha c \leq p(x).$$

□

Agora serão apresentadas duas versões do teorema de Hahn-Banach, uma para espaços vetoriais ou complexo e outra para os espaços normados.

Teorema 6.9 (Teorema de Hahn-Banach Generalizado) *Seja X um espaço vetorial ou complexo e p um funcional a valores reais em X tal que para todo $x, y \in X$,*

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \forall x,y \in X \tag{6-9}$$

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x), \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in X \tag{6-10}$$

Além disso, seja f um funcional linear definido sobre um subespaço Z de X que satisfaz

$$|f(x)| \leq p(x),\ \forall x \in Z \tag{6-11}$$

Então f tem uma extensão linear $\tilde{f} : Z \to X$ satisfazendo

$$|\widetilde{f}(x)| \leq p(x) \tag{6-12}$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [1].

Teorema 6.10 (Teorema de Hahn-Banach para espaços normados) *Seja X um espaço normado e f um funcional linear limitado definido em um subespaço Z de X. Então existe $\tilde{f}$ funcional linear limitado definido em todo espaço X tal que $\tilde{f}$ é uma extensão de f para X o qual preserva a norma, isto é,*

$$||\tilde{f}||_x = ||f||_z \tag{6-13}$$

Onde

$$||\tilde{f}||_x = \sup_{x \in X} |\tilde{f}(x)|,$$

$$||f||_z = \sup_{x \in Z} |f(x)|$$

Demonstração.

Se $Z = 0$, então $f = 0$ e a sua extensão é $\tilde{f} = 0$. Então seja $Z \neq 0$. Queremos usar o teorema de Hahn-Banach generalizado. Portanto, devemos descobrir um funcional p satisfazendo as propriedades do teorema de hahn-Banach generalizado. Sabemos que Para todo $x \in Z$ temos:

$$|f(x)| \leq ||f||_z ||x||.$$

Esta é forma da equação (6-11), onde $p(x) = ||f||_z ||x||$. Vemos que p é definido em todos X. Além disso, p satisfaz a propriedade (6-9) sobre X, pela de desigualdade triangular, obtemos

$$p(x+y) = ||f||_z ||x+y|| \leq ||f||_z (||x|| + ||y||) = ||f||_z ||x|| + ||f||_z ||y|| = p(x) + p(y).$$

Também p satisfaz (6-10) sobre X, pois

$$p(\alpha x) = ||f||_z ||\alpha x|| = |\alpha| ||f||_z ||x|| = |\alpha| p(x).$$

Portanto, aplicamos o teorema do Hahn-Banach generalizado e concluímos que existe um funcional linear $\tilde{f}$ sobre X o qual é uma extensão de f e satisfaz

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x) = ||f||_z ||x||,$$

$$\forall x \in X$$

Tomando o supremo de todos os $x \in X$ com a norma 1, obtemos a desigualdade

$$||\tilde{f}||_z = \sup_{x \in X} |\tilde{f}(x)| \leq ||f||_z.$$

Como sob uma extensão a norma não pode ser diminuída e pela definição da norma temos que $||\tilde{f}||_x \geq ||f||_z$. Então, obtemos a equação (6-13) e provamos o teorema para os espaços normados.

6.1 APLICAÇÃO

O teorema de Hahn-Banach pode ser aplicado na demonstração do teorema de Riezs que garante que funcionais lineares em $C[a,b]$ podem ser representadas pela integral de Riemann-Stieltjes. Esta integral é uma generalização da integral de Riemann. Antes de enunciar este teorema, vamos definir o que é uma função de variação limitada em $[a,b]$

Definição 6.11 *Uma w função definida em $[a,b]$ é dita de variação limitada em $[a,b]$ se sua* *variação total* $Var(w)$ *em* $[a,b]$ *é finita, onde*

$$Var(w) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |w(t_j) - w(t_{j-1})| \right\}$$

Onde o supremo é tomado sobre todas as partições

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$$

do intervalo $[a,b]$ *onde* $n \in \mathbb{N}$ *é arbitrário.*

Teorema 6.12 (Teorema de Riesz) *Todo funcional linear* f *sobre* $C[a,b]$ *pode ser representado pela integral de Riemann-Stieltjes*

$$f(x) = \int_a^b x(t)dw(t)$$

onde f *é a variação limitada em* $[a,b]$ *e tem variação total*

$$Var(w) = f$$

Demonstração.

A demonstração pode ser encontrada em [1].

Este teorema é utilizado em outras áreas da matemática como por exemplo em sistemas dinâmicos onde é necessário entender a estrutura topológica do conjunto de medidas de probabilidade invariantes por uma função.

7 TEOREMA DE BANACH-STEINHAUS

O teorema de Banach-Steinhaus é outro resultado importante da análise funcional, e foi demonstrado pelos matemáticos S. Banach e H. Steinhaus em 1927. Ele também é conhecido como princípio de limitação uniforme pois garante condições para que uma família de operadores seja uniformemente limitada.

Definição 7.1 (Categoria de um conjunto) *Um subconjunto* M *de um espaço métrico* X *diz-se:*

(a) Raro em X *se* $\bar{M}$ *não possui pontos interiores.*

(b) Magro ou de primeira Categoria em X *se* M *é a união contável de conjuntos tal que cada um deles é raro em* X

(c) Não-magro ou de segunda categoria em X *se* M *não é de primeira categoria em* X*.*

Exemplo 7.2 *Um exemplo de um conjunto de primeira categoria em* $\mathbb{R}$ *é o conjunto dos números racionais* $\mathbb{Q}$*, pois* $\mathbb{Q}$ *é união enumerável de seus pontos que tem interior vazio.*

Teorema 7.3 (Categoria de Baire) *Se $X \neq \emptyset$ é um espaço métrico completo, então é um conjunto de segunda categoria. Assim, se $X \neq \emptyset$ é um espaço métrico completo e*

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

onde A_k são conjuntos fechado, então pelo menos um conjunto A_k contém um conjunto aberto não vazio. Agora podemos estabelecer o teorema de Banach-Steinhaus. O teorema fala que se X é um espaço de Banach e $T_n \in B(X,Y)$ sequências de operadores lineares limitados em ponto $x \in X$, então a (T_n) é uniformemente limitada.

Teorema 7.4 (Teorema de Banach-Steinhaus) *Seja (T_n) uma sucessão de operadores lineares limitados definidos $T_n : X \longrightarrow Y$ de um espaço de Banach X num espaço normado Y tal que $(||T_n x||)$ é um número real. Então a sequência das normas $||T_n||$ é limitada, isto é, existe c tal que*

$$||T_n|| \leq c$$

Demonstração.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $A_k \subset X$ o subconjunto em X definido por

$$A_k = \{x \in X; ||T_n|| \leq k, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

O conjunto A_k é fechado, pois, se $x \in \bar{A_k}$, então existe uma sequência $(x_j) \subset A_k$ tal que $x_i \longrightarrow x$. Assim, para cada n fixo, temos $|T_n x_j| \leq C$. Como T_n é contínuo temos

$$|T_n x| \leq C.$$

Deste modo, demonstramos que $x \in A_k$ ou seja A_k é fechado. Portanto

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

Como X é completo, então o teorema de Baire garante que pelo menos um dos A_k contém uma bola aberta:

$$B_0 = B(x_0; r) \subset A_k$$

Seja $x \in X - \{0\}$ arbitrário, definimos

$$z = x_0 + \gamma x, \gamma = \frac{2}{2||x||}$$

Sabemos que $z \in B_0$, então $||z - x_0|| < r$, daqui resulta que $z \in A_k$ e, assim temos $||T_n z|| \leq k_0$

para todo n. Também $||T_n x_0|| \leq k_0$ como $x = \frac{z-x_0}{\gamma}$, então para qualquer n temos

$$||T_n x|| = \frac{||T_n(z-x_0)||}{\gamma} \leq \frac{||T_n z|| + ||T_n x_0||}{\gamma} \leq \frac{4||x||k_0}{r}.$$

Tomando o supremo obtemos

$$||T_n|| = \sup_{||x||=1} ||T_n x|| \leq \frac{4k_0}{r}$$

onde o $C = \frac{4k_0}{r}$ □

7.1 APLICAÇÃO

Sabemos que a série de Fourier é uma forma de representar funções como soma de senos e cossenos. A série de Fourier de uma determinada função periódica x de período 2π é

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos(mt) + b_m \operatorname{sen}(mt)) \tag{7-1}$$

onde os coeficientes de Fourier de x são dados pelas formulas de Euler:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) cos(mt)\, dt,$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \operatorname{sen}(mt)\, dt \tag{7-2}$$

Escrevemos $\frac{a_0}{2}$ na equação (7-1) para ter apenas duas fórmulas em (7-2). Se escrevêssemos a_0 precisaríamos de três fórmulas de Euler. Sabe-se que a série (7-1) pode convergir mesmo em pontos onde x é descontínuo. Usando o teorema de limitação uniforme, podemos mostrar que existem funções contínuas de valor real cuja série de Fourier diverge em um determinado ponto.
Demonstração.

Seja X espaço normado de todas as funções contínuas do valor real de período 2π com a norma definida por :

$$||x|| = \max_{t \in [0,2\pi]} |x(t)| \tag{7-3}$$

X é um espaço de Banach, como segue a completude do $C[a,b]$ com $a = 0$ e $b = 2\pi$. Tomamos $t_0 = 0$, sem nenhuma restrição. Aplicamos o teorema de limitação uniforme a $T_n = f_n$, onde $f_n(x)$ é o valor em $t = 0$ da soma parcial da série de Fourier de x. Como para $t = 0$ todos os termos de senos são zero e o de cossenos são 1, vemos a partir de (7-1) e (7-2) que $f_n(x) =$

$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} \cos(mt) \right] dt$. Queremos determinar a função representada pela soma da integral. Para este motivo, calculamos

$$
\begin{aligned}
2\,\text{sen}\left(\frac{1}{2}t\right) \sum_{m=1}^{n} \cos(mt) &= \sum_{m=1}^{n} 2\,\text{sen}\left(\frac{1}{2}t\right) \cos(mt) \\
&= \sum_{m=1}^{n} \left[-\,\text{sen}\left(m - \frac{1}{2}\right) t + sen\left(m + \frac{1}{2}\right) t \right] \\
&= -\,\text{sen}\left(\frac{1}{2}\right) t + \text{sen}\left(n + \frac{1}{2}t\right) \qquad (7\text{-}4)
\end{aligned}
$$

onde a última expressão segue, dividindo por sen $\frac{1}{2}t$ e adicionando 1 em ambos lados, temos

$$1 + 2\sum_{m=1}^{n} \cos(mt) = \frac{\text{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{\text{sen}\,\frac{1}{2}t}$$

Consequentemente, a fórmula para $f_n(x)$ pode ser escrita de uma forma simples

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) q_n \, dt$$

Com

$$q_n(t) = \frac{\text{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{\text{sen}\,\frac{1}{2}t} \qquad (7\text{-}5)$$

Usando isso, podemos mostrar que o funcional linear f_n é limitado. De fato $(7-4)$ e $(7-5)$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi} max_{t \in [0,2\pi]} |x(t)| \int_0^{2\pi} |q_n(t)| dt = \frac{||x||}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q_n(t)| dt$$

Disso, vemos que f_n é limitada. Além disso, tomando o supremo sobre todo x da norma 1 obtemos

$$||f_n|| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q_n(t)| dt.$$

O sinal de igualdade é valido, para este fim, escrevemos

$$|q_n(t)| = y(t) q_n(t) \qquad (7\text{-}6)$$

onde $y(t) = +1$ em cada t em que $q_n(t) \leq 0$ e $y(t) = -1$ em outro lugar, y não é contínuo, mas para qualquer $\varepsilon > 0$ pode ser modificado para um x contínuo de norma 1 tal que para este x temos:

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} [x(t) - y(t)] \, q_n dt \right| < \varepsilon$$

Escrevemos as duais integrais, usando a equação (9-2), obtemos

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} x(t)q_n(t)dt - \int_0^{2\pi} y(t)q_n(t)dt\right| = \left|f_n(t) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|q_n(t)|dt\right| < \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ e $||x|| = 1$, isto prova a formula desejada,

$$||f_n|| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|q_n(t)|dt$$

Finalmente, mostramos que a sequência $(||f_n||)$ não é limitada. Substituindo f_n na expressão q_n, usando do fato de que

$$\left|sen\frac{1}{2}t\right| < \frac{1}{2}t$$

para $t \in [0,2\pi]$ e chamando $\left(n+\frac{1}{2}\right)t = v$, obtemos

$$\begin{aligned}
||f_n|| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{sen(n+\frac{1}{2})t}{sen\frac{1}{2}t}\right|dt \\
&> \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|sen(n+\frac{1}{2})t|}{t}dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi}\frac{|sen(v)|}{v}dv \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|sen(v)|}{v}dv \\
&\leq \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|sen(v)|\,dv \\
&= \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{k+1} \longrightarrow \infty
\end{aligned}$$

□

8 TEOREMA DE APLICAÇÃO ABERTA

Discutimos o teorema de Hahn-Banach e o teorema da limitação uniforme, agora será abordado o terceiro "grande"teorema chamado de teorema da aplicação aberta. Este teorema estabelece condições sob as quais um operador linear limitado é aberto.

Definição 8.1 (Aplicação aberta) *Sejam X,Y espaços métricos. $T : D(T) \longrightarrow Y$ com o domí-*

nio $D(T) \subset X$ é chamado mapeamento aberto se a imagem de qualquer aberto em $D(T)$ é um aberto em Ypara cada conjunto aberto em $D(T)$ a imagem é um conjunto aberto em Y.

Para demonstrar o teorema da aplicação aberta necessitamos do seguinte lema:

Lema 8.2 (Bola aberta unitária) *Sejam X,Y espaços de Banach e T um operador linear limitado. Então T possui a propriedade da imagem $T(B_0)$ da bola unitária aberta $B_0 = B(0;1) \subset X$ conter uma bola aberta sobre $0 \in Y$.*

Demonstração.

A demonstração podem ser encontrada em [1]. □

Teorema 8.3 (Teorema de aplicação aberta) *Sejam X,Y espaços de Banach e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear limitado dado. Então T é uma aplicação aberta.*

Demonstração.

Provamos que para cada conjunto aberto $A \subset X$ a imagem $T(A)$ é aberta em Y. Fazemos isso mostrando que para cada $y = Tx \in T(A)$, o conjunto $T(A)$ contém uma bola aberta sobre $y = Tx$. Seja $y = Tx \in T(A)$. Como A é aberto, ele contém uma bola aberta com o centro x. Portanto $A - x$ contém uma bola aberta com centro 0; seja r o raio da bola e seja $k = \frac{1}{r}$, de modo que $r = \frac{1}{k}$. Então $k(A-x)$ contém a bola aberta unitária $B(0;1)$. O lema da bola unitária aberta implica que $T((A-x)) = k[T(A) - Tx]$ contém uma bola aberta sobre 0, da mesma forma que $T(A) - Tx$. Portanto, $T(A)$ contém uma bola aberta sobre $Tx = y$. Como $y \in T(A)$ foi arbitrário, então $T(A)$ é aberto. □

8.1 APLICAÇÃO

O resultado a seguir é uma das aplicações do teorema da aplicação aberta ele garante condições para que a inversa de um operador seja limitado.

Teorema 8.4 *Sejam X,Y espaços de Banach e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear limitado dado. Então se T é bijetivo, T^{-1} é contínuo e portanto limitado.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [1].

9 TEOREMA DO GRÁFICO FECHADO

Nesta seção abordaremos o conceito de operador linear fechado e o teorema do gráfico fechado. A importância do teorema do gráfico fechado é que ele indica as condições necessárias sob as quais um operador linear fechado em um espaço de Banach é limitado. Na prática nem todos os operadores importantes são limitados. Por exemplo o operador de diferenciação.

Definição 9.1 (Operador fechado) *Sejam X, Y espaços normados e $T : D(T) \longrightarrow Y$ operador linear com o domínio $D(T) \subset X$. Então T é chamado de operador linear fechado se seu gráfico*

$$G(T) = \{(x,y)|x \in D(T), y = Tx\}$$

é fechado no espaço normado $X \times Y$, onde as duas operações algébricas de espaço vetorial em $X \times Y$ são definidas usualmente assim:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

α é um escalar e a norma sobre $X \times Y$ é definido por :

$$||(x,y)|| = ||x|| + ||y|| \tag{9-1}$$

Teorema 9.2 (Teorema do gráfico fechado) *Sejam X, Y espaços de Banach e $T : D(T) \longrightarrow Y$ operador linear fechado, onde $D(T) \subset X$. Então, se $D(T)$ é fechado em X, o operador T é limitado.*

Demonstração.

Vamos mostrar que $X \times Y$ com a norma definido na (9-1) é um espaço normado completo. Seja uma sequência (z_n) de Cauchy em $X \times Y$, onde $z_n = (x_n, y_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Então para cada $\varepsilon > 0$ existe N tal que

$$||z_n - z_m|| = ||x_n - x_m|| + ||y_n - y_m|| < \varepsilon \tag{9-2}$$

Como (x_n) e (y_n) são de Cauchy em X e Y, e convergem, diz-se que $x_n \longrightarrow x$ e $y_n \longrightarrow y$, pois X e Y são completo. Isto implica que $z_n \longrightarrow z = (x, y)$ desde então (9-2) com $m \longrightarrow \infty$, temos $||z_n - z|| \leq \varepsilon$ para $n > N$. Como a sequência de Cauchy (z_n) foi arbitrário, $X \times Y$ é completo. Por suposição, $G(T)$ é fechado em $X \times Y$ e $D(T)$ é fechado em X. Portanto, $G(T)$ e $D(T)$ são completos pelo teorema de subespaços completos. Agora vamos considerar o mapeamento

$$P : G(T) \longrightarrow D(T)$$

$$(x, Tx) \mapsto x.$$

P é linear, pois temos

$$P((x, Tx) + (y, Ty)) = P(x, Tx) + P(y, Ty)$$

P é limitado, pois $||P(x, Tx)|| = ||x|| \leq ||x|| + ||Tx|| = ||(x, Tx)||$. P é bijetivo, de fato a inversa do mapeamento é

$$P^{-1} : D(T) \longrightarrow G(T)$$

$$x \mapsto (x, Tx).$$

Como $G(T)$ e $D(T)$ são completos, podemos aplicar o inverso limitado e vemos que P^{-1} é limitado, diz-se

$$||(x, Tx)|| < b||x||$$

para alguns b e todos $x \in D(T)$. Portanto, T é limitado pois, $||Tx|| \leq ||x|| + ||Tx|| = ||(x, Tx)|| \leq b||x||$ para todo $x \in D(T)$ □

Teorema 9.3 (Operador linear fechado) *Seja $T : D(T) \longrightarrow Y$ operador linear, onde $D(T) \subset X$ e Y são espaços normados. Então T é fechado se e somente se possui a seguinte propriedade: Se $(x_n) \subset D(T)$ é tal que $x_n \longrightarrow x$ e $Tx_n \longrightarrow y$, então $x \in D(T)$ e $Tx = y$.*

Demonstração.

Como $G(T)$ é fechado, então se $z \in G(\bar{T}) = G(T)$ existe $(z_n) \subset G(T)$ tal que $z_n \longrightarrow z$ pelo que

$$x_n \longrightarrow x$$

$$Tx_n \longrightarrow y;$$

e $z = (x,y) \in G(T)$ se e só se $x \in D(T)$ e $y = Tx$. □

Lema 9.4 (Operador fechado) *Seja $T : D(T) \longrightarrow Y$ o operador linear limitado com o domínio $D(T) \subset X$, onde X, Y são espaços normados.*

Então:

(a) Se $D(T)$ é um subconjunto fechado em X, então T é fechado.

(b) Se T é fechado e Y é completo, então $D(T)$ é um subconjunto fechado em X.

Demonstração.

(a) Vamos mostrar que T é contínuo. Se $(x_n) \subset D(T)$ uma sucessão convergente para x tal que (Tx_n) converge, e então $x \in D(T)$ é fechado e temos ainda

$$Tx_n \longrightarrow Tx$$

pois T é contínuo. Pelo teorema de operador linear fechado.

(b) Seja $x \in D(\bar{T})$ dado e $(x_n) \subset D(T)$ com $x_n \longrightarrow x$, $n \longrightarrow \infty$. Como T é limitado, então a sucessão $(Tx_n) \subset Y$ é tal que

$$|Tx_n - Tx_m| \leq ||T|||x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Isto mostra que (Tx_n) é de Cauchy. Logo $Tx_n \longrightarrow y \in Y$ e por T ser fechado, $x \in D(T)$, $y = Tx$. De arbitrariedade de x resulta que $D(T)$ é fechado.

□

9.1 APLICAÇÃO

Agora vamos apresentar uma aplicação mostrando que o operador derivada é limitado, mas não é fechado.

Teorema 9.5 *Seja $X = C([0,1])$ o espaço de Banach com a norma* $|x| = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|$ *e* $T : D(T) \subset C([0,1]) \longrightarrow C([0,1])$, *definido por*

$$(Tx)(t) = x'(t),$$

onde $D(T)$ é formado pelas funções diferenciáveis com derivada contínua. Então T não é limitado, mas é fechado.

Demonstração.

Sabemos que T não é limitado. Vamos mostrar que T é fechado aplicando o teorema de operador linear fechado. Seja $(x_n) \subset D(T)$ uma sucessão tal que

$$x_n \longrightarrow x, Tx_n = x_n' \longrightarrow y.$$

Como a convergência em $C([0,1])$ é uniforme em $[0,1]$, então de $x_n' \longrightarrow y$ resulta que y é contínua..

$$\int_0^t y(\tau), d\tau = \int_0^t \lim_{n\to\infty} x_n'(\tau)d\tau = \lim_{n\to\infty} \int_0^t x_n'(\tau)d\tau = x(t) - x(0),$$

Isto é,

$$x(t) = x(0) + \int_0^t y(\tau)d\tau.$$

Assim, $x \in D(T)$ e $x' = y$. Portanto T é fechado pelo teorema de operado linear fechado. □

Observação 9.6 *O fechamento não implica a limitação de um operador linear.Por outro lado, a limitação não implica o fechamento.*

10 TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH

O teorema do ponto fixo de Banach é o último teorema que vamos apresentar neste trabalho. Este teorema é utilizado por exemplo para demonstrar a existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias. Além disso tem outras aplicações importantes, tais como equações algébricas lineares, e equações integrais.

Definição 10.1 (Um ponto fixo de Banach) *Um ponto fixo de uma função $T : X \longrightarrow X$ de um conjunto X é x na qual é aplicado nele mesmo, ou seja*

$$Tx = x,$$

A imagem Tx coincide com x. O teorema de Banach nos dá as condições suficientes para existência de um ponto fixo para uma classe de mapeamentos, chamado de contração.

Definição 10.2 (Contração) *Seja $X = (X,d)$ espaço de métrico. Uma função $T : X \longrightarrow X$ é chamada de contração em X se existir um número real positivo $\alpha < 1$ tal que para todo $x,y \in X$.*

$$d(Tx,Ty) \leq \alpha d(x,y) \tag{10-1}$$

Teorema 10.3 (Contração) *Considere um espaço métrico $X = (X,d)$, onde $X \neq \emptyset$. Suponha que X é completo e seja $T : X \longrightarrow X$ uma contração em X. Então T tem precisamente um ponto fixo.*

Demonstração.

Construímos a sequência (x_n) e mostramos que é Cauchy, de modo que converge no espaço completo X, e depois provaremos que seu limite x é um ponto fixo de T e T não tem mais pontos fixos. Escolhemos cada $x_0 \in X$ e definimos a "sequência iterativa"(x_n) por

$$x_0, x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^n x_0, ..., x_n = T^n x_0 \tag{10-2}$$

Claramente, esta é a sequência das imagens de x_0 em repetição de aplicação de T. Mostramos que (x_n) é Cauchy. Pela equação (10-1) e (10-2), temos

$$\begin{aligned} d(x_{m+1},x_m) &= d(Tx_m,Tx_{m-1}) \\ &\leq \alpha d(x_m,x_{m-1}) \\ &= \alpha d(Tx_{m-1},Tx_{m-2}) \\ &\leq \alpha^2 d(x_{m-1},x_{m-2}) \\ .. &= \alpha^m d(x_1,x_0) \end{aligned} \tag{10-3}$$

Portanto, pela desigualdade triangular e a soma de progressão geométrica que obtemos para $n > m$

$$\begin{aligned} d(x_m,x_n) &\leq d(x_m,x_{m+1}) + d(x_{m+1},x_{m+2}) + ... + d(x_{n-1},x_n) \\ &\leq (\alpha^m + \alpha^{m+1} + ... + \alpha^{n-1}) d(x_0,x_1) \\ &= \alpha^m \frac{1-\alpha^{n-m}}{1-\alpha} d(x_0,x_1) \end{aligned}$$

(10-4)

Como $0 < \alpha < 1$, no numerador temos $1 - \alpha^{n-m} < 1$. Consequentemente,

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \tag{10-5}$$

□

10.1 APLICAÇÃO

Vamos usar o teorema do ponto fixo de Banach para provar o teorema de Picard, que desempenha um papel importante na teoria das equações diferenciais ordinárias.

Definição 10.4 *Seja a equação ordinária diferencial dada em*

$$x' = f(t, x) \tag{10-6}$$

Definimos o problema de valor inicial desta maneira:

$$x(t_0) = x_0 \tag{10-7}$$

Onde t_0 e x_0 são números reais.

A ideia de abordagem é bastante simples, primeiro convertemos (10-6) e (10-7) em uma equação integral, que irá definir um operador T, e as condições do teorema implicarão que T é uma contração, de modo que seu único ponto fixo será a solução do nosso problema.

Teorema 10.5 (Teorema de existência e unicidade de Picard) *Seja f contínua no retângulo*

$$R = \{(t,x) |\, |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\},$$

isto é limitada em R, diz-se

$$|f(t,x)| \leq c$$

Suponha que f satisfaz a condição de Lipschitz em R, isto é, existe uma constante k tal que $(t,x),(t,v) \in R$

$$|f(t,x) - f(t,v)| \leq k\,|x - v|\,.$$

Então o problema de valor inicial, para equação diferencial ordinária da primeira ordem

$$x' = f(t,x),$$

tem uma única solução. Esta solução existe sobre um intervalo $[t_0 - \beta, t_0 + \beta|$, *onde*

$$\beta < min\left\{a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k}\right\}$$

Demonstração. Os detalhes da demonstração podem ser encontrados em [1]. Aqui apresentamos apenas uma ideia da prova.

(a) Primeiro consideremos o operador $Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau$ que está relacionado com o problema de valor inicial (10-6) e (10-7), usando um pouco de álgebra e progressão geométrica é possível mostrar que T é uma contração em C. Finalmente aplicamos o teorema do ponto fixo de Banach para garantir a existência da solução.

(b) $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau$. Depois de aplicar o teorema de ponto fixo chegaremos nesta última equação diferencial definida desta forma onde f é uma função inicial, com uma condição inicial.

□

11 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A metodologia consistirá em estudar o livro base, entender os conceitos mais importantes de análise funcional até chegar em seus principais teoremas.

Além de estudar a teoria referentes a estes conceitos, discutiremos também os resultados mais importantes para o desenvolvimento deste trabalho.

Por fim, os tópicos estudados serão apresentados semanalmente de forma de seminários, para melhorar o entendimento sobre o tema.

12 CONCLUSÃO

O trabalho ficou dividido em duas partes uma mais introdutória na qual foram estudados espaços métricos e os conceitos de espaços de Banach e Hilbert. Na segunda parte foram estudados os principais teoremas da teoria e algumas de suas aplicações. No contexto de espaços normados de dimensão finita, percebemos que todo operador definido neste espaço é limitado e, portanto contínuo. Quando estes espaços são completos, suas normas são equivalentes. Assim a teoria fica interessante quando os espaços não possuem dimensão finita. Já nos espaços de Hilbert, vimos que o produto interno nos dá informações extras sobre a geometria do espaço e assim podemos generalizar bases ortogonais para espaços de dimensão infinita. Um exemplo clássico estudado foi á série de Fourier. Também é interessante notar a relação de dualidade dos espaços Lps fornecida através do teorema de representação de Riesz.

Sobre o teorema de Hanh-Banach, foi necessário usar o lema de Zorn para garantir a existência da extensão do funcional. Este lema é imprescindível na demonstração do caso mais geral do teorema. Como aplicação, apresentamos o teorema de representação de Riesz para funções contínuas, ele garante a dualidade entre funções e objetos chamados de medidas, que tem consequências em outras áreas da matemática como, por exemplo, sistemas dinâmicos.

Já para a demonstração do teorema de Banach-Steinhaus é necessário usar o teorema de categoria de Baire que é um resultado importante da topologia geral. Como aplicação apresentamos a existência de uma função contínua cuja série de Fourier diverge.

Sobre o teorema do gráfico fechado é importante notar que ele garante condições para que um operador seja limitado, um exemplo de operador não limitado que foi apresentado é o operador derivação. Por fim, com a aplicação do teorema do ponto fixo de Banach é possível perceber a importância da análise funcional, pois através desta teoria se consegue demonstrar o teorema de Picard, que garante existência e unicidade de soluções para equações diferenciais ordinárias.

REFERÊNCIAS

[1] Geraldo Botelho, Daniel Pellegrino, and Eduardo Teixeira. Fundamentos de análise funcional. *Sociedade Brasileira de Matemática*, 2012.

[2] César R De Oliveira. *Introdução à análise funcional*. 2001.

[3] Erwin Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*, volume 1. 1989.

[4] Viakalathur Shankar Sunder. *Functional analysis: spectral theory*. 1997.