

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MECÂNICA  
CURSO DE ENGENHARIA INDUSTRIAL MECÂNICA

FRANCIS DIEGO MORETTO SARTURI

**MODELAGEM NUMÉRICA DE UMA PLACA  
LAMINADA UTILIZADA EM BLINDAGEM ANTI-  
PROJÉTIL**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**CURITIBA**

**2011**

FRANCIS DIEGO MORETTO SARTURI

**MODELAGEM NUMÉRICA DE UMA PLACA LAMINADA UTILIZADA  
EM BLINDAGEM ANTI-PROJÉTIL**

Monografia do Projeto de Pesquisa apresentada à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2 do curso de Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial para aprovação na disciplina.

Orientador: Prof. Dr. Ivan Moura Belo

**CURITIBA**

**2011**

## TERMO DE APROVAÇÃO

Por meio deste termo, aprovamos a monografia do Projeto de Pesquisa "MODELAGEM NUMÉRICA DE UMA PLACA LAMINADA UTILIZADA EM BLINDAGEM ANTI-PROJÉTIL", realizado pelo aluno FRANCIS DIEGO MORETTO SARTURI, como requisito parcial para aprovação na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2, do curso de Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Prof. Dr. Ivan Moura Belo

DAMEC

Orientador

Prof. Dr. Marco Antônio Luersen

DAMEC

Avaliador

Prof. Msc. Eduardo Gregório Olienick Filho

DAMEC

Avaliador

Curitiba, 16 de dezembro de 2011.

## RESUMO

SARTURI, Francis D. M. Modelagem numérica de uma placa laminada utilizada em blindagem anti-projétil. 2011. 99 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia Mecânica), Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2011.

O presente trabalho apresenta o estudo numérico do comportamento de uma placa laminada utilizada em blindagem anti-projétil Nível I, da norma americana NIJ 0180.01. Na elaboração do tema identificou-se grande número de pesquisadores estudando assuntos correlatos, mas de forma experimental, sendo que a modelagem numérica tem pouco destaque no estudo das blindagens. Para se adquirir conhecimentos para resolver o problema proposto foi realizada uma revisão bibliográfica sob os assuntos correlacionados com o tema, como polímeros, compósitos e elementos finitos, possibilitando assim um *know how* para a solução, que é a implementação de um código computacional de elementos finitos para a simulação do impacto de um projétil em uma placa. Diversas simulações foram realizadas a fim de testar a convergência do método proposto, sempre tendo como referência para análise a solução analítica do problema.

**Palavras-chave:** Compósitos laminados. Método dos elementos finitos. Blindagens transparentes.

## ABSTRACT

SARTURI, Francis D. M. *Numerical modeling of a laminated plate used in anti-projectile shield*. 2011. 99 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia Mecânica), Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2011.

*This work presents a numerical study of the behavior of a laminated plate used in anti-projectile shield Level I, by the American standard NIJ 0180.01. Developing the theme was identified a large number of researchers studying related subjects, but experimentally, and numerical modeling has little emphasis on the study of shields. To acquire knowledge to solve the problem posed a literature review was conducted on issues related to the theme, such as polymers, composites and finite elements, allowing the knowledge to the solution, which is the implementation of a finite element computer code for the simulation of the impact of a projectile on a plate. Several simulations were performed to test the convergence of the proposed method, always with reference to the analytical analysis of the problem.*

**Keywords:** *Composite laminates. Finite element method. Transparent shields.*

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Representação esquemática de uma cadeia de polímeros.....	21
Figura 2 – Representação esquemática de estruturas moleculares (a) lineares, (b) ramificadas, (c) com ligação cruzada e (d) em rede. ....	23
Figura 3 – Comportamento tensão deformação para polímeros frágeis (curva A), plásticos (curva B) e altamente elásticos (curva C). ....	24
Figura 4 – Grupo funcional carbonato. ....	25
Figura 5 – Estrutura do Bisfenol-A. ....	26
Figura 6 – Diferentes tipos de fibras.....	28
Figura 7 – Placa laminada com fibras orientadas em diferentes direções .....	29
Figura 8 – Fluxograma para avaliação das propriedades mecânicas de uma lâmina. ....	30
Figura 9 – Sistema de coordenadas principal do material.....	31
Figura 10 – Sistema de referência global e principal do material.....	35
Figura 11 – Geometria e deformação de uma placa. ....	41
Figura 12 – Variação da deformação e tensão através de um laminado e da espessura de uma lâmina. ....	44
Figura 13 – Orientações, forças e momentos em um placa. ....	45
Figura 14 – Configuração deformada segundo a Teoria de Primeira Ordem.....	47
Figura 15 – Orientações de forças e momentos.....	55
Figura 16 – Elemento quadrado de placa da TCL. (a) Elemento não conforme. (b) Elemento conforme. ....	60
Figura 17 – Elemento de placa para a FSĐT. ....	67
Figura 18 – Placa utilizada nos ensaios. ....	68
Figura 19 – Tipos de apoios: (a) apoio simples e (b) apoio engastado. ....	70
Figura 20 – Montagem da placa anti-projétil. ....	70

Figura 21 – Sistema de coordenada utilizador para a placa.....	71
Figura 22 – Elemento de placa retangular simples. ....	76
Figura 23 – Termos utilizados do triângulo de Pascal.....	77
Figura 24 – Função de forma. ....	79
Figura 25 – Fluxograma para resolução do problema proposto.....	83
Figura 26 – Malha de 4 elementos. ....	86
Figura 27 – Malha de 16 elementos.....	87
Figura 28 – Malha de 64 elementos. ....	87
Figura 29 – Campo de deslocamento para malha de 64 elementos. ....	89
Figura 30 – Convergência do elemento de placa simples.....	90
Figura 31 – Tensões na placa com 64 elementos.....	91
Figura 32 – Estado (a) uniaxial de tensões e (b) plano de tensões.....	92
Figura 33 – Curva tensão-deformação para o policarbonato. ....	93

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Função de interpolação de Lagrange e Hermite. ....	59
Tabela 2 – Propriedades mecânicas do policarbonato de bisfenol-A.....	69
Tabela 3 – Propriedades mecânicas do poliuretano. ....	69
Tabela 4 – Nível de proteção do sistema de blindagem quanto ao impacto balístico. .....	72
Tabela 5 – Parâmetros de simulação utilizados.....	72
Tabela 6 – Deslocamento no nó central da placa. ....	88
Tabela 7 – Energia de deformação da placa.....	88
Tabela 8 – Tensões no nó central da malha 8x8.....	91



## LISTA DE SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
EPT	Estado plano de tensões
FSDT	Teoria de Primeira Ordem de Mindlin, do inglês <i>First-order Shear Deformation Theory</i>
MEF	Método dos Elementos Finitos
NIJ	Instituto Nacional de Justiça, do inglês <i>National Institute of Justice</i>
NEB	Norma do Exército Brasileiro
TCL	Teoria Clássica da Laminação
3-D	Três dimensões
2-D	Duas dimensões

## LISTA DE SÍMBOLOS

$E$	Módulo de elasticidade
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$G$	Módulo de elasticidade ao cisalhamento
$\{\sigma\}$	Tensor de tensões
$\{\varepsilon\}$	Tensor de deformações
$[C]$	Matriz de rigidez
$[S]$	Matriz de flexibilidade
$[L]$	Matriz de transformação de coordenadas
$\sigma_p$	Tensão no sistema de referência do problema
$\sigma_m$	Tensão no sistema de referência do material
$[T]$	Matriz de transformação de coordenadas do sistema do material para o sistema do problema
$[R]$	Matriz de transformação de coordenadas do sistema do problema para o sistema do material
$\{\sigma\}_p$	Tensor de tensões no sistema de referência do problema
$\{\sigma\}_m$	Tensor de tensões no sistema de referência do material
$\{\varepsilon\}_p$	Tensor de deformações no sistema de referência do problema
$\{\varepsilon\}_m$	Tensor de deformações no sistema de referência do material
$[\bar{C}]$	Matriz de rigidez transformada
$[C]_p$	Matriz de rigidez no sistema de referência do problema
$[C]_m$	Matriz de rigidez no sistema de referência do material
$[\bar{S}]$	Matriz de flexibilidade transformada

$[S]_p$	Matriz de flexibilidade no sistema de referência do problema
$[S]_m$	Matriz de flexibilidade no sistema de referência do material
a	Dimensão na direção x da placa
h	Espessura da placa
$u_i$	Deslocamento do nó i na direção x
$v_i$	Deslocamento do nó i na direção y
$w_i$	Deslocamento do nó i na direção z
$\frac{\partial w_0}{\partial x}$	Rotação de um ponto genérico da superfície de referência em relação à x
$\frac{\partial w_0}{\partial y}$	Rotação de um ponto genérico da superfície de referência em relação à y]
$u_0$	Deslocamento de um ponto genérico da superfície de referência na direção x
$v_0$	Deslocamento de um ponto genérico da superfície de referência na direção y
$w_0$	Deslocamento de um ponto genérico da superfície de referência na direção z
$\phi_x$	Rotação em torno do eixo y
$\phi_y$	Rotação em torno do eixo x
$\epsilon_{xx}$	Deformação normal na direção x
$\epsilon_{yy}$	Deformação normal na direção y
$\epsilon_{zz}$	Deformação normal na direção z
$\{\epsilon_0\}$	Vetor de deformações em um ponto genérico da superfície de referência

$\{\kappa\}$	Vetor curvatura da superfície de referência
$[\bar{Q}]$	Matriz de rigidez para um material ortotrópico
$\{N\}$	Vetor de esforços normais resultantes
$\{M\}$	Vetor de momentos resultantes
$[A]$	Matriz de rigidez extensional
$[B]$	Matriz de rigidez de acoplamento
$[D]$	Matriz de rigidez à flexão
$K$	Fator de cisalhamento
$\tau_{xy}$	Tensões cisalhantes na direção x-y
$\psi_j^e$	Função de interpolação do elemento “e”
$U_j^e$	Valor do deslocamento no nó j do elemento “e”
$N$	Forças normais resultantes
$M$	Momentos resultantes
$N(w)$	Termo não linear
$\delta u$	Função de ponderação
$\Omega_e$	Domínio do elemento “e”
$\Gamma_e$	Contorno do domínio do elemento “e”
$\Omega_e$	Domínio do elemento “e”
$\eta_x$	Cosseno diretor da direção x
$\eta_y$	Cosseno diretor da direção y
$C^m$	Grau de continuidade “m” da função

$\psi_i$	Função de interpolação de Lagrange
$\phi_i$	Função de interpolação de Hermite
$m$	massa
$\zeta_i$	Coordena local do nó $i$ do elemento na direção $x$
$\eta_i$	Coordena local do nó $i$ do elemento na direção $y$
$x_c$	Coordena global do centro do elemento na direção $x$
$y_c$	Coordena global do centro do elemento na direção $y$
$[K]$	Matriz de rigidez global
$\{\Delta\}$	Vetor de deslocamentos
$\{F\}$	Vetor de Forças
$U_m$	Energia cinética de uma massa $m$
$v_0$	Velocidade inicial
$w_m$	Deslocamento no ponto de impacto
$P_m$	Carga estática equivalente
$D$	Módulo de rigidez a flexão da placa
$d_i$	Vetor de incógnitas nodais
$\alpha$	Vetor de coeficientes da função de interpolação
$\bar{E}$	Matriz constitutiva
$w_{\max}$	Maior deslocamento na placa
$\sigma_1$	Maior tensão principal
$\sigma_2$	Menor tensão principal

$\sigma_e$  Tensão de escoamento

VM Coeficiente da desigualdade de Von-Mises

# SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	16
1.1	TEMA.....	16
1.2	PROBLEMA.....	16
1.3	OBJETIVOS .....	17
1.4	JUSTIFICATIVA .....	17
1.5	CONTEÚDO DO TRABALHO .....	18
2	METODOLOGIA .....	20
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....	21
3.1	POLÍMEROS .....	21
3.1.1	Policarbonato .....	25
3.2	COMPÓSITOS LAMINADOS.....	27
3.2.1	Mecânica de uma Lâmina.....	29
3.2.2	Transformação de Coordenadas .....	34
3.2.3	Análise de um Laminado.....	39
3.3	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....	51
3.3.1	Conceitos Básicos do MEF .....	52
3.3.2	Modelo de Elementos Finitos da TCL.....	54
3.3.3	Modelo de Elementos Finitos da FSDT .....	63
4	PROPRIEDADES MECÂNICAS .....	68
4.1	ANÁLISE ESTÁTICA EQUIVALENTE .....	71
4.1.1	Norma de Proteção Balística .....	71
4.1.2	Carregamento Estático Equivalente .....	73
5	FORMULAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS .....	75
5.1	DESENVOLVIMENTO COMPUTACIONAL.....	82
6	SIMULAÇÕES E RESULTADOS.....	86
6.1	DESLOCAMENTOS .....	86
6.2	TENSÕES.....	90
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	95
7.1	CONCLUSÃO .....	95
7.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	95
	REFERÊNCIAS .....	97
	APÊNDICE A – CRONOGRAMA .....	99

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 TEMA

O mercado da segurança pública e privada no Brasil têm recebido destaque nos últimos tempos devido ao aumento da violência em todas as regiões, sejam elas pouco ou muito povoadas, com destaque para a última. A procura por serviços e produtos que proporcionem uma sensação de segurança é grande. São itens como câmeras de vigilância para casas, condomínios e estabelecimentos comerciais, tecnologia embarcada para carros, equipamentos sofisticados, sistemas antifurto, enfim, produtos que visam diminuir o risco de perdas materiais ou humanas.

A tecnologia de blindagem é uma ferramenta extremamente útil no quesito segurança, seja ela privada ou pública, sendo que há no mercado diversos produtos que se utilizam dela, com destaque para os carros, a blindagem arquitetônica, películas blindadas e itens pessoais, utilizados principalmente por forças de segurança, como capacetes, coletes e escudos.

Em qualquer aplicação da tecnologia de blindagem, devem-se utilizar materiais que sejam certificados pelo Exército Brasileiro e pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT). As empresas fabricantes de tais materiais, que geralmente são compósitos ou polímeros, são obrigadas por norma a realizar diversos ensaios para garantir a qualidade do material e determinar seu prazo de validade.

O profissional responsável pelo projeto, especificação e fabricação dos materiais balísticos é o Engenheiro Mecânico, devido a seus conhecimentos nas áreas de materiais e estruturas, representando um mercado que gera grandes oportunidades de trabalho e de pesquisa científica para os profissionais da área.

## 1.2 PROBLEMA

A realização de ensaios destrutivos para avaliar a qualidade estrutural de um material requer a disponibilidade de diversos equipamentos e recursos financeiros. Os ensaios realizados geralmente são o de tração, Charpy, dureza e outros, que necessitam de equipamentos de alto custo de aquisição e necessitam manutenção constante.



Atualmente a caracterização dos materiais blindados quanto a sua qualidade estrutural é feita na sua maioria através de ensaios destrutivos, como por exemplo, na dissertação de Weber (2004) e no artigo de Álvaro JR. *et al.* (2006). Realizar ensaios destrutivos requer uma série de recursos, como os citados anteriormente, além disso, nem sempre estão à disposição do projetista. A modelagem numérica permite diminuir o número de ensaios realizados para o projeto, além de permitir uma avaliação do comportamento do material sob diversos aspectos antes mesmo da sua fabricação. Por isso, é de fundamental importância que se conheça o comportamento do material através de sua modelagem numérica, assunto que será abordado neste trabalho.

### **1.3 OBJETIVOS**

Este trabalho tem como objetivo modelar numericamente, por meio do Método dos Elementos Finitos, o impacto provocado por um projétil em uma placa laminada de policarbonato, específica para aplicação balística, verificando se ela está apta a resistir tal solicitação. O impacto dinâmico será convertido em uma força equivalente, ou seja, será realizado um estudo estático equivalente do problema dinâmico. Para a verificação da qualidade do modelo numérico, o resultado obtido será comparado com os dados experimentais apresentados por Weber (2004).

### **1.4 JUSTIFICATIVA**

O desempenho de um material blindado anti-projétil é de fundamental importância para a segurança de quem necessita dele para proteger sua vida. Estudos que visam avaliar e aperfeiçoar este desempenho, analisando regiões críticas e possíveis pontos de falha são de fundamental interesse. Como a modelagem numérica permite tal estudo de forma aprofundada, ela é de suma importância em relação à questão de desempenho técnico.

Com relação ao aspecto econômico, a modelagem numérica diminui a necessidade de ensaios, o que reflete diretamente nos custos com material e com o tempo de utilização das máquinas de ensaio. Outro aspecto relevante em termos econômicos é a possibilidade de diminuição da quantidade de material utilizado na fabricação dos produtos decorrente da análise feita através da modelagem matemática da estrutura.

Além de proporcionar um ganho no quesito técnico e econômico supracitados, que são relativos à indústria e produção, o estudo do tema proposto tem grande importância acadêmica para o desenvolvedor do projeto. Para realizá-lo, deve-se ter domínio sobre diversas áreas da Engenharia Mecânica, como por exemplo, materiais, cálculo estrutural e métodos numéricos. Tem-se a oportunidade de estudar os materiais compósitos laminados, geralmente um assunto não abordado na graduação de Engenharia Mecânica. Os conhecimentos sobre o Método dos Elementos Finitos devem ser aprofundados em um nível no qual se estará apto a escrever programas computacionais para resolver diversos tipos de problemas da mecânica estrutural. A programação de computadores é outra área do conhecimento a ser utilizada.

## **1.5 CONTEÚDO DO TRABALHO**

A ordem adotada para o trabalho visa a estruturação do mesmo de forma clara e sequencial, assim, o Capítulo 1 especifica o tema, caracteriza o problema de forma breve e apresenta as justificativas para o desenvolvimento do trabalho.

O Capítulo 2 apresenta a metodologia utilizada para o desenvolvimento do trabalho, definindo as diversas etapas a serem seguidas.

No Capítulo 3 são definidas as bases teóricas para o desenvolvimento do trabalho. Uma apresentação breve sobre polímeros é realizada, com ênfase no policarbonato, já que é o material em estudo. A seguir os materiais compósitos são estudados e caracterizados matematicamente através das diversas relações matriciais. Para finalizar o capítulo apresentam-se as bases necessárias do método dos elementos finitos para poder escrever o programa computacional necessário para resolver o problema proposto.

As propriedades mecânicas do material e os aspectos relativos à construção da placa são abordados no Capítulo 4. O módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e tensão de escoamento são especificados, assim como as características construtivas da placa que permitem estabelecer o seu modelo físico. A norma de proteção balística utilizada como referência é apresentada. Nesta norma são especificados os critérios para fabricação e testes de produtos balísticos, assim como os níveis de proteção considerados. Este capítulo também é destinado à avaliação da força estática equivalente do projétil em movimento,

consequentemente, é calculada a força estática que provocaria a mesma deformação que o impacto dinâmico do projétil provoca na placa.

O problema começa a ser modelado matematicamente no Capítulo 5, ou seja, começa-se efetivamente a formulação em elementos finitos. O elemento de placa utilizado é especificado, e dele são derivados os diversos componentes de elementos finitos que serão utilizados, como as funções de forma e a matriz de rigidez elementar. O desenvolvimento computacional é esquematizado através da criação de um fluxograma que permitirá a escrita do código em alguma linguagem computacional. As principais etapas do programa proposto são esclarecidas, assim como a sequência lógica para resolvê-las.

As simulações realizadas e os resultados obtidos são apresentados no Capítulo 6. São realizadas simulações com malhas de 4, 16 e 64 elementos quadrados, permitindo a avaliação da convergência do método. Os resultados também são apresentados através da solução analítica, o que permite a comparação dos resultados, permitindo assim a avaliação da consistência do método. Após a análise dos deslocamentos e da energia de deformação, as tensões são calculadas e um critério de ruptura é verificado, permitindo-se avaliar a integridade da placa.

O Capítulo 7 é destinado às conclusões finais e sugestões para a continuidade de futuros trabalhos relacionados ao tema.

## 2 METODOLOGIA

O problema proposto envolve diversas áreas da engenharia, como polímeros, compósitos, métodos numéricos. Para se ter domínio sobre estes assuntos e poder resolver o problema em questão, será realizada uma revisão bibliográfica com ênfase no método dos elementos finitos, pois é ele quem permitirá a resolução do problema efetivamente.

Após a revisão bibliográfica já se têm condições de analisar o problema sob o aspecto matemático, sendo o primeiro passo a obtenção das propriedades mecânicas do material e as características construtivas da placa.

A etapa de desenvolvimento do código computacional será a atividade principal do trabalho, assim, um diagrama de blocos ou fluxograma será elaborado para orientar o desenvolvimento do código. É este código que permitirá a resolução do problema proposto, sendo que todas as análises obtidas posteriormente dependerão dele.

A última etapa será a análise dos resultados, podendo-se formular então conclusões e observações à cerca do modelo proposto.

A seqüência proposta para o desenvolvimento das atividades segue a seguinte ordem:

- I. Revisão Bibliográfica
- II. Propriedade mecânicas do material;
- III. Formulação em elementos finitos;
- IV. Criação do fluxograma do código computacional.
- V. Montagem do código computacional para resolução do problema;
- VI. Realização da simulação através do código computacional escrito;
- VII. Análise dos resultados e conclusões.

### 3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

#### 3.1 POLÍMEROS

Os polímeros naturais já vêm sendo utilizados pela humanidade há séculos. Dentre os principais polímeros naturais pode-se citar a madeira, a borracha, o algodão, a lã, o couro e a seda. A tecnologia moderna permitiu a determinação das estruturas moleculares deste grupo de materiais, os quais são sintetizados a partir de moléculas orgânicas pequenas.

Conforme Canevarolo Jr. (2002), a palavra polímero origina-se do grego *poli* (muitos) e *mero* (unidade de repetição). O termo polímero então significa uma macromolécula composta por muitas unidades de repetição denominadas meros, ligadas por ligação covalente. Dá-se o nome de monômero à matéria-prima para a produção de um polímero, ou seja, o monômero é uma molécula com uma unidade de repetição. Copolímero é um polímero que apresenta mais de um mero diferente na cadeia polimérica.

As cadeias de polímeros podem se dobrar, espiralar e se contorcer de diversas formas (CALLISTER Jr., 1997). Isso produz um intenso entrelace e embaraço entre as moléculas de cadeias vizinhas, conforme a Figura 1, sendo que esses espirais e embaraços moleculares aleatórios são responsáveis por uma grande quantidade das características importantes para os polímeros, incluindo as grandes extensões elásticas demonstradas pelos materiais como a borracha.

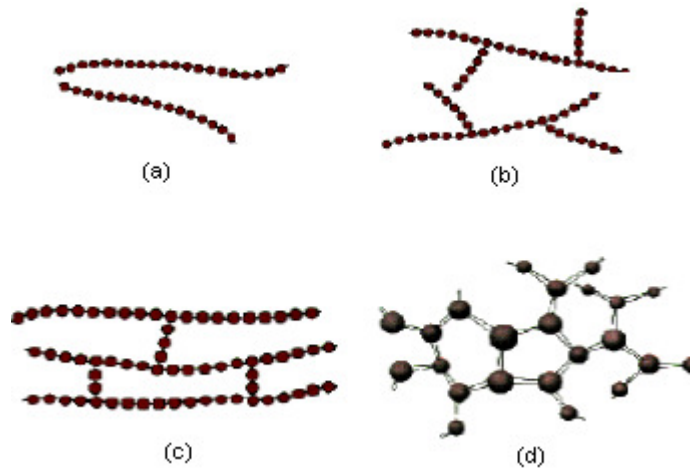


**Figura 1 – Representação esquemática de uma cadeia de polímeros.**  
**Fonte: Callister Jr., 1997.**

As características físicas macroscópicas de um polímero dependem de vários fatores, entre eles o peso molecular, sua forma e a estrutura da cadeia. Callister Jr (1997) propõem a seguinte classificação em função da estrutura molecular:

- a) Polímeros lineares: as unidades estão unidas ponta a ponta em cadeias únicas, sendo que essas cadeias são flexíveis, Figura 2a. São exemplos de polímeros que se formam como estruturas lineares o polietileno, o cloreto de polivinila, o poliestireno, o polimetil, metacrilato, o náilon e os fluorocarbonos.
- b) Polímeros ramificados: as cadeias de ramificações laterais encontram-se conectadas as cadeias principais, como indicado esquematicamente na Figura 2b. A eficiência de compactação da cadeia é reduzida com a formação de ramificações laterais, o que resulta em uma diminuição da densidade do polímero.
- c) Polímeros com ligações cruzadas: as cadeias lineares adjacentes estão unidas umas às outras em várias posições através de ligações covalentes, como está representado na Figura 2c. Muitos dos materiais elásticos com características de borracha apresentam ligações cruzadas.
- d) Polímeros em rede: as unidades mero possuem três ligações covalentes ativas, formando redes tridimensionais, Figura 2d. Esses materiais possuem propriedades mecânicas e térmicas distintas.

Os polímeros geralmente não são de um único tipo estrutural, como por exemplo, um polímero predominantemente linear pode possuir uma quantidade limitada de ramificações e de ligações cruzadas.



**Figura 2 – Representação esquemática de estruturas moleculares (a) lineares, (b) ramificadas, (c) com ligação cruzada e (d) em rede.**

Fonte: Callister Jr., 1997.

Em um projeto é de fundamental importância que o engenheiro conheça o comportamento mecânico do material empregado. Conforme Mano (1994), as propriedades mecânicas compreendem a totalidade das propriedades que determinam a resposta dos materiais às influências mecânicas externas, sendo manifestado pela capacidade desses materiais desenvolverem deformações reversíveis e irreversíveis, além de resistirem à fratura. A seguir serão apresentadas algumas propriedades e características termomecânicas de grande importância.

- a) **Comportamento Tensão-Deformação:** basicamente são encontrados três tipos de comportamento tensão-deformação, como mostrado na Figura 3. O comportamento da Curva A corresponde ao comportamento de um polímero frágil, sendo que sua deformação antes da ruptura é pequena. A Curva B representa o comportamento do material plástico parecido com aqueles apresentados pelos metais, a deformação inicial é elástica, a qual é seguida por escoamento e por uma região de deformação plástica. A deformação apresentada pela Curva C é totalmente elástica, é típica das borrachas, sendo que os polímeros que apresentam este comportamento são conhecidos como elastômeros.

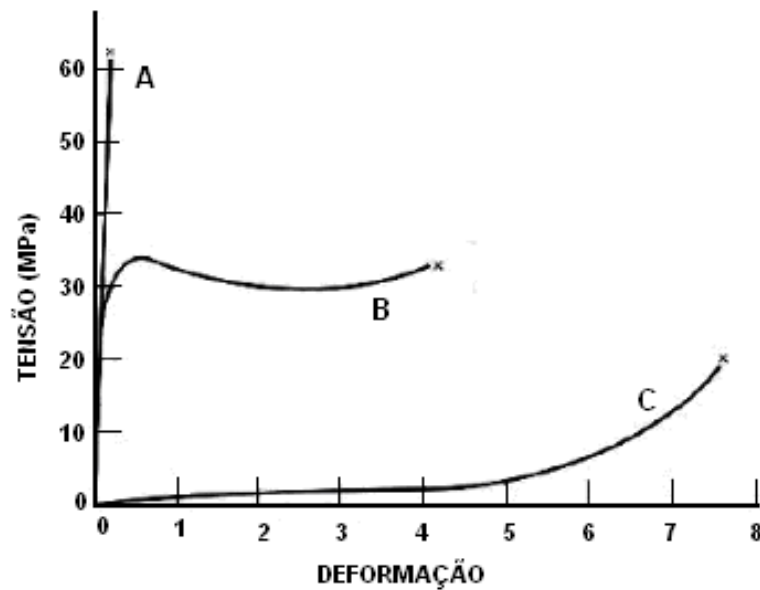


Figura 3 – Comportamento tensão deformação para polímeros frágeis (curva A), plásticos (curva B) e altamente elásticos (curva C).

Fonte: Callister Jr., 1997.

- b) **Resistência ao Impacto:** a resistência ao impacto geralmente é avaliada pelo ensaio Charpy. Podem apresentar fraturas dúcteis e frágeis quando submetidos a carregamento de impacto. Tanto os polímeros cristalinos como os amorfos são frágeis a baixas temperaturas, e ambos possuem resistência ao impacto relativamente baixa. Apresentam uma transição dúctil-frágil ao longo de uma faixa de temperaturas relativamente estreitas, semelhante à apresentada pelo aço. A temperatura alta a resistência ao impacto sofre uma diminuição gradual à medida que o polímero começa a amolecer.
- c) **Fadiga:** Semelhantemente aos metais, os polímeros podem apresentar falha por fadiga, sendo que ela ocorre em níveis de tensão que são baixos em comparação com o limite de escoamento. Alguns polímeros possuem um limite de fadiga (um nível de tensão no qual a tensão no momento da falha se torna independente do número de ciclos); outros polímeros não apresentam o limite de fadiga. O comportamento de fadiga dos polímeros é muito mais sensível à frequência de carregamento do que o dos metais. Quando submetidos a ciclos de alta frequência e/ou tensões relativamente grandes, pode ocorrer um aquecimento localizado, conseqüentemente, as falhas

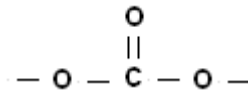


podem ser devidas a um amolecimento do material, e não um resultado de processos típicos de fadiga.

- d) **Resistência à Ruptura e Dureza:** a habilidade para resistir a ruptura é uma propriedade importante para polímeros que são aplicados em blindagens. Para se estudar a resistência a ruptura, o parâmetro mecânico que é medido é a energia exigida para romper uma amostra seccionada que possua uma geometria padrão. Já a dureza, como nos metais, representa a resistência de um material ao risco, à penetração e à marcação. Os ensaios Rockwell são usados com frequência para os polímeros.

### 3.1.1 Policarbonato

Os policarbonatos são um tipo particular de poliéster, formados por grupos funcionais de carbonato, como mostra a Figura 4.



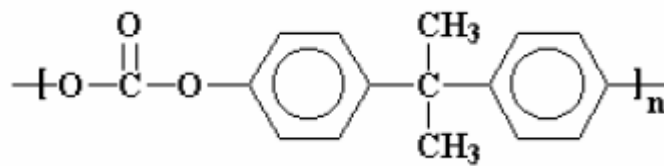
**Figura 4 – Grupo funcional carbonato.**

**Fonte: Callister Jr., 1997.**

Existem basicamente dois tipos de policarbonato: o alifático e aromático. A seguir serão apresentados as características básicas de cada um.

- a) **Policarbonato alifático:** são estruturas de cadeias abertas, sendo que o policarbonato alifático é preparado a partir de dois dióis e carbonatos, sendo que seu peso molecular varia entre 500 e 5000 g/mol. Em geral tem ponto de fusão menor que os aromáticos, sendo que o grupo carbonato pode ser decomposto pelo calor tendo então uma estabilidade térmica menor que os aromáticos. Devido ao seu baixo ponto de fusão e baixa estabilidade térmica, não são muito utilizados como termoplásticos.
- b) **Policarbonato aromático:** são estruturas que possuem anéis aromáticos e grupos carbonatos na estrutura, sendo a estrutura mais conhecida o Bisfenol-A, que pode ser vista na Figura 5. Um policarbonato pode ser composto por vários grupos Bisfenol-A, formando uma estrutura amorfa, insolúvel em água e ácido orgânicos, apresentando excelentes propriedades mecânicas

relacionadas a tração e ao impacto, podendo ser empregados até temperaturas da ordem de 140°C. As propriedades apresentadas pelo policarbonato de Bisfenol-A o fazem um dos materiais mais empregados na engenharia, sendo que essas propriedades são: transparência, alta resistência ao impacto, excelente estabilidade dimensional ao calor, excelentes propriedades elétricas e é auto-extinguível à chama.



**Figura 5 – Estrutura do Bisfenol-A.**  
**Fonte: Shackelford, 2008.**

Os policarbonatos são moldáveis quando aquecidos, sendo por isso chamados termoplásticos. Devido a todas as características apresentadas acima e a sua facilidade de moldagem, Shackelford (2008) cita várias áreas e segmentos da indústria onde são utilizados, tais como:

- área médica
- indústria automotiva;
- indústria de construção;
- produção de artefatos para instalações elétricas;
- produção de embalagens diversas;
- indústria de equipamentos óticos e fotográficos;
- indústria nuclear;

- indústria de material bélico (blindagens balísticas transparentes para proteção pessoal e para veículos de uso civil e militar).

### **3.2 COMPÓSITOS LAMINADOS**

A busca por materiais que proporcionem uma elevada relação desempenho/peso é contínua na engenharia, culminando atualmente com os compósitos estruturais. Esta busca é antiga, sendo que os primeiros compósitos produzidos pelo homem foram tijolos feitos à base de colmo e lama usados em construções primitivas. A natureza proporciona também diversos compósitos naturais, como por exemplo, a madeira, que é constituída por fibras de celulose dispostas numa matriz de lignina e os ossos que consistem em proteínas de colágeno dispostas numa matriz mineral formada essencialmente por cálcio.

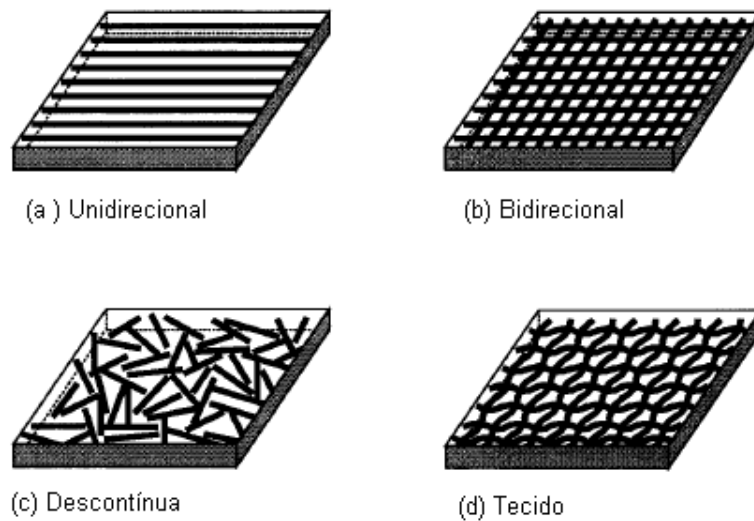
A aplicação dos materiais compostos é diversa, tendo destaque principalmente na indústria aeronáutica e aeroespacial, sendo utilizados, por exemplo, na fabricação de asas, fuselagens, estabilizadores e outros componentes, havendo em determinados casos aviões essencialmente constituídos por esses materiais. Visando usufruir das qualidades proporcionadas pelos compósitos, diversos setores industriais têm utilizado cada vez em seus projetos esses materiais, como por exemplo, a indústria automobilística, a construção civil, materiais esportivos e a indústria de segurança, com destaque para os materiais blindados.

Mendonça (2005) define os compósitos como materiais combinados que apresentam juntos propriedades que nenhum dos componentes individualmente apresentaria.

As características de desempenho de um material associado dependem basicamente dos elementos constituintes, que genericamente são a matriz e as fibras. As lâminas são constituídas por fibras dispersas numa matriz, formando um material contínuo, que combinados em camadas para se alcançar uma determinada resistência ou espessura formam os materiais laminados. Segundo Reddy (1997), as fibras podem ser contínuas ou descontínuas, quanto a sua disposição podem ser unidirecionais, bidirecionais, na forma de tecidos, ou distribuídas aleatoriamente, como apresentado na Figura 6. Já Mendonça (2005) ainda define os “compostos

reforçados por partículas ou compostos particulados”, onde a partícula não possui uma dimensão predominante e não é tão efetiva no incremento da resistência da matriz. Mendonça (2005) justifica o emprego de tal compósito pelo incremento de outras propriedades, como:

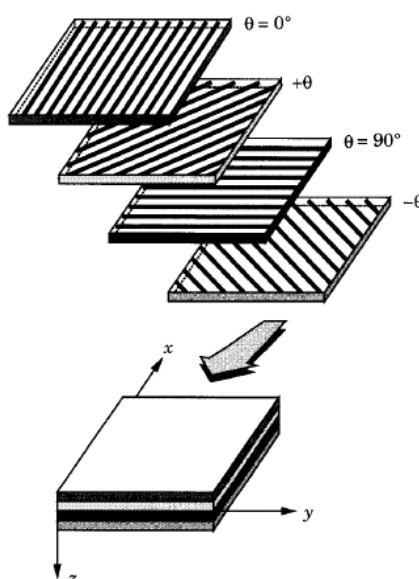
- Condutividade ou isolamento térmico e elétrico;
- Resistência a altas temperaturas;
- Redução do atrito;
- Resistência ao desgaste superficial;
- Melhoria na usinabilidade;
- Aumento da dureza superficial;
- Redução de custos.



**Figura 6 – Diferentes tipos de fibras.**  
**Fonte: Reddy, 1997.**

No empilhamento das lâminas, as fibras de cada lâmina podem estar orientadas na mesma ou em diferentes direções, denominando-se seqüência de empilhamento. A Figura 7 apresenta um exemplo de empilhamento onde as orientações das fibras variam conforme a lâmina. Uma seqüência de empilhamento tem como objetivo atender a um determinado requisito de projeto ou fabricação que

não seria alcançado caso as fibras de todas as lâminas estivessem na mesma direção.



**Figura 7 – Placa laminada com fibras orientadas em diferentes direções**  
**Fonte: Reddy, 1997.**

Existe uma grande diversidade de materiais utilizados atualmente para fibras e matrizes, caracterizando uma variedade enorme de propriedades mecânicas que podem ser obtidas com a combinação das mesmas. As principais fibras utilizadas pela indústria moderna são a fibra de vidro, de carbono e grafite, de kevlar, de monocristais, o asbesto e fibras cerâmicas. Já as matrizes mais utilizadas são de materiais metálicos, cerâmicos ou resinas poliméricas.

### 3.2.1 Mecânica de uma Lâmina

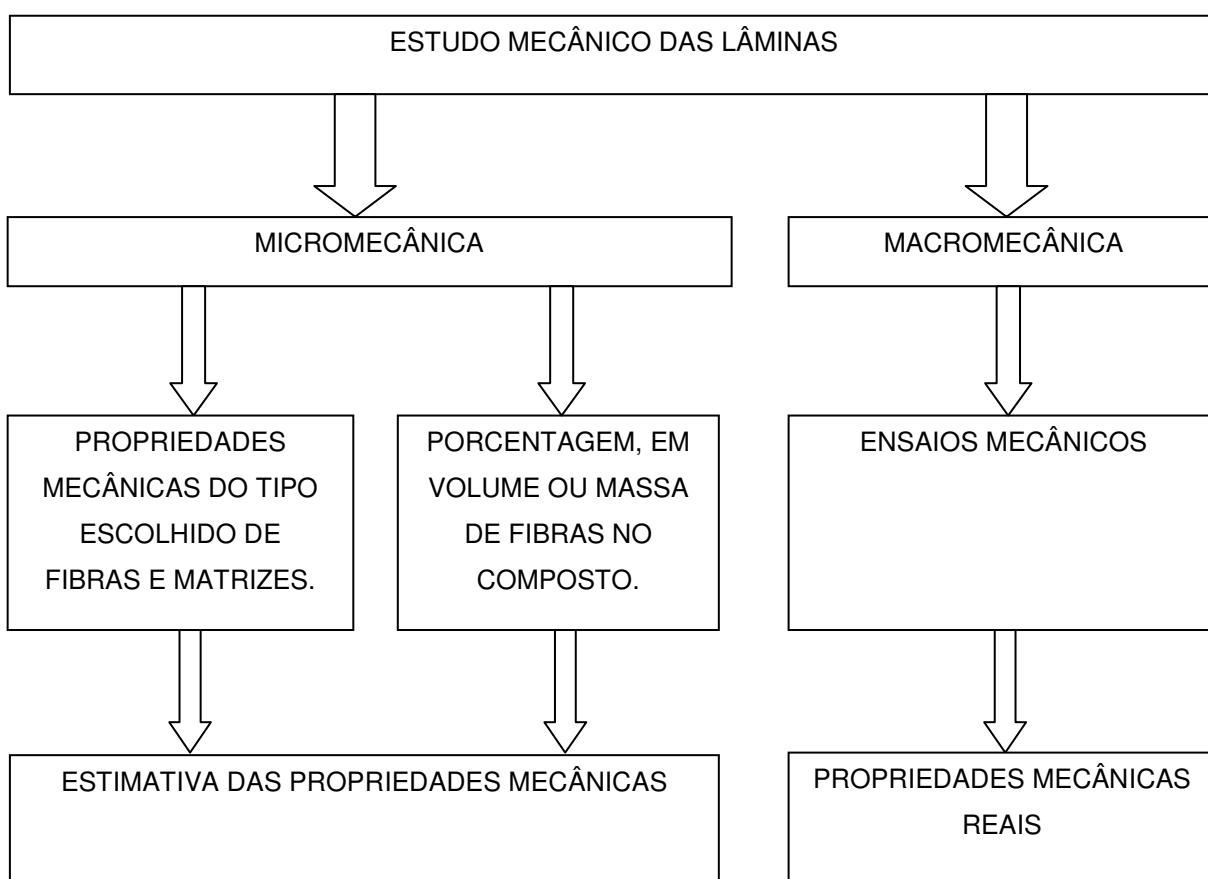
O estudo do comportamento mecânico de uma lâmina se divide basicamente em duas vertentes: a micromecânica e a macromecânica.

Para se avaliar as propriedades mecânicas de uma lâmina, devem-se realizar ensaios experimentais da mesma. Entretanto, quando o material ainda não foi fabricado não há esta possibilidade, sendo útil então a avaliação microscópica do elemento. As propriedades mecânicas obtidas sob este ponto de vista consideram a resistência individual de cada componente (fibra e matriz) e ainda a sua interação, fazendo uma estimativa das principais propriedades elásticas, térmicas e de resistência. Já o comportamento macromecânico tem como premissas básicas a

lâmina como meio contínuo e o comportamento elástico da mesma, podendo então ser considerada a lei de Hooke generalizada para avaliar seu comportamento sob um determinado estado de tensão ou deformação.

No trabalho de Weber (2004) foram realizados diversos ensaios para determinar as propriedades macromecânicas do material, não sendo necessário então estudo micromecânico do mesmo. O fluxograma apresentado na

Figura 8 representa uma visão geral do estudo mecânico das lâminas, baseado em Mendonça (2005).



**Figura 8 – Fluxograma para avaliação das propriedades mecânicas de uma lâmina.<sup>1</sup>**

Os ensaios mecânicos visam determinar as constantes de engenharia que representam as propriedades elásticas do material. São geralmente os módulos de Young  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_3$ , os coeficientes de Poisson ( $\nu_{12}$ ,  $\nu_{23}$ ,  $\nu_{31}$ ,) e os módulos de

<sup>1</sup> As figuras e tabelas sem indicação de fonte foram compiladas pelo próprio autor.

elasticidade cisalhante ( $G_{12}$ ,  $G_{23}$  e  $G_{31}$ ), avaliados no sistema de coordenadas principal do material, conforme a Figura 9, onde o eixo 1 é colocado paralelamente as fibras, o eixo 2 é transversal as fibras e o eixo 3 é mutuamente ortogonal aos outros dois eixos.

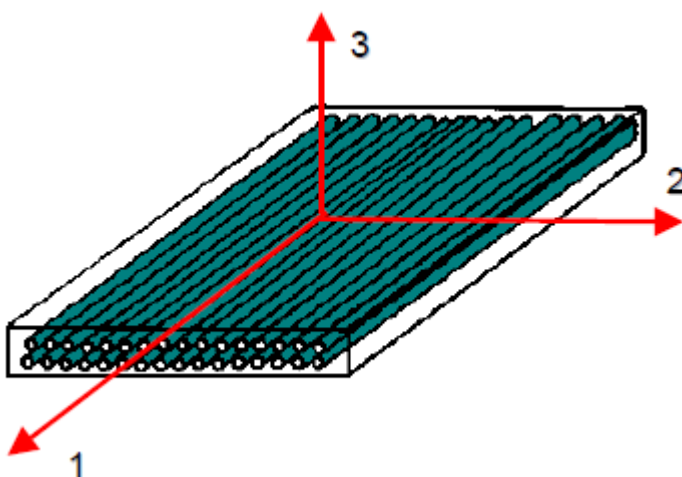


Figura 9 – Sistema de coordenadas principal do material.  
Fonte: Pereira, 2003.

Para um material elástico-linear sobre condições isotérmicas, a relação entre tensão-deformação é dada pela lei de Hooke generalizada, representada na forma matricial por:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad \text{Eq. 1}$$

ou na forma expandida dada pela Eq. 2, em que a matriz de rigidez é a matriz com os coeficientes  $C_{ij}$  e “sim” indica uma matriz simétrica.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 2}$$

*sim.*

A matriz  $[C]$  é não-singular, ou seja, ela pode ser invertida, originando a matriz de flexibilidade  $[S]$  da Eq. 3, que relaciona a deformação com a tensão, na sua forma matricial representada por:

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} \quad \text{Eq. 3}$$

ou na forma expandida:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & & & S_{45} & S_{45} & S_{46} \\ & & & & S_{55} & S_{56} \\ & \text{sim.} & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 4}$$

Com relação à direção preferencial das propriedades mecânicas, pode-se classificar um material como isotrópico, ortotrópico ou anisotrópico. Os isotrópicos apresentam as mesmas propriedades em todas as direções, ou seja, não há direção preferencial, já os ortotrópicos são aqueles onde existem dois planos ortogonais de simetria de propriedades do material, sendo que necessariamente existirá simetria relativa ao terceiro plano mutuamente ortogonal aos outros dois, conforme Mendonça (2005). Já um material anisotrópico apresenta a variação de suas propriedades em todas as direções estudadas.

Para um material isotrópico as seguintes relações entre as constantes de engenharia são verificadas:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_2 = E_3 = E \\ \nu_{12} &= \nu_{23} = \nu_{13} = \nu \\ G_{23} &= G_{31} = G_{12} = G \end{aligned} \quad \text{Eq. 5}$$

resultando nos coeficientes da matriz de rigidez:



$$\begin{aligned}
C_{11} = C_{22} = C_{33} &= \frac{E}{1-\nu^2} \\
C_{12} = C_{13} = C_{21} = C_{23} = C_{31} = C_{32} &= \frac{\nu E}{1-\nu^2} \\
C_{44} = C_{55} = C_{66} &= \frac{E}{2(1+\nu)}
\end{aligned}
\tag{Eq. 6}$$

ou nos coeficientes da matriz de flexibilidade:

$$\begin{aligned}
S_{11} = S_{22} = S_{33} &= \frac{1}{E} \\
S_{12} = S_{13} = S_{21} = S_{23} = S_{31} = S_{32} &= -\frac{\nu}{E} \\
S_{44} = S_{55} = S_{66} &= \frac{1}{G}
\end{aligned}
\tag{Eq. 7}$$

sendo que os coeficientes não informados valem zero.

A matriz de flexibilidade para um material isotrópico em termos das constantes elásticas de engenharia é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}
\tag{Eq. 8}$$

Para um material ortotrópico, devido à simetria da matriz, obtém-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
 \frac{\nu_{21}}{E_2} &= \frac{\nu_{12}}{E_1} \\
 \frac{\nu_{31}}{E_3} &= \frac{\nu_{13}}{E_1} \\
 \frac{\nu_{32}}{E_2} &= \frac{\nu_{23}}{E_2}
 \end{aligned}
 \tag{Eq. 9}$$

resultando em uma matriz de flexibilidade em termos das constantes elásticas de engenharia:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}
 \tag{Eq. 10}$$

*sim.*

### 3.2.2 Transformação de Coordenadas

O sistema de coordenadas utilizado no estudo de um problema específico frequentemente não coincide com o sistema de coordenadas principal do material, com isso, tem-se que estabelecer relações de transformações entre tensões e deformações entre um sistema de coordenadas e outro. A Figura 10 representa a uma rotação plana de um determinado ângulo genérico  $\theta$  em torno do eixo 3 do material  $(x_1, x_2, x_3)$ , originando um novo sistema de coordenadas  $(x, y, z)$ .

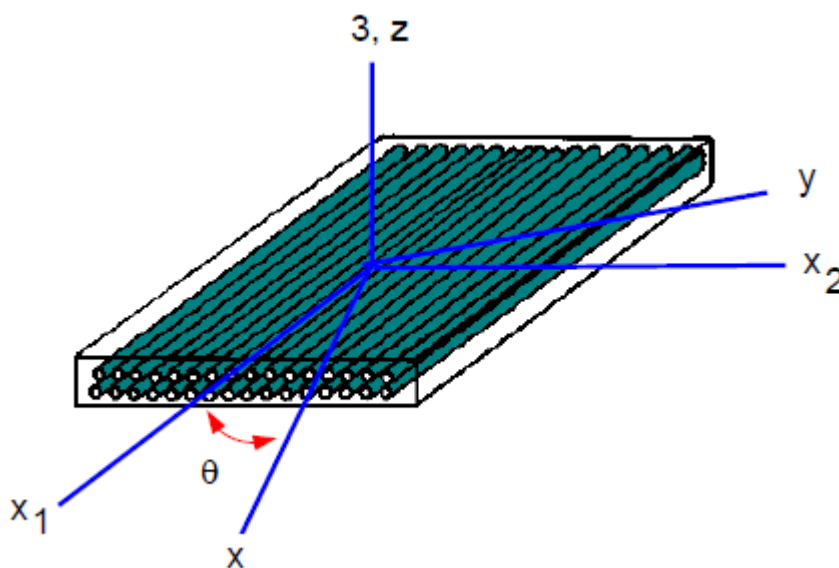


Figura 10 – Sistema de referência global e principal do material.  
Fonte: Pereira, 2003.

Os sistemas de coordenadas da Figura 10 podem ser relacionados por:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta & 0 \\ -\text{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [L] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 11}$$

onde  $[L]$  é a matriz de transformação do sistema de coordenadas  $(x, y, z)$  em  $(x_1, x_2, x_3)$ . A matriz inversa  $[L]^{-1}$  representa a transformação de coordenadas de  $(x_1, x_2, x_3)$  em  $(x, y, z)$ , sendo que ela possui a seguinte propriedade:  $[L]^{-1} = [L]^T$ , ou seja, a matriz inversa é igual a transposta (matriz ortogonal).

Para transformar as componentes de tensões de um sistema de coordenadas em outro, Reddy (1997) propõem as relações da Eq. 12 e Eq. 14, onde as tensões no sistema principal do material são designadas como  $\sigma_m$  (sistema  $x_1, x_2, x_3$ ) e as tensões no sistema de referência do problema são  $\sigma_p$  (sistema  $x, y, z$ ).

$$\{\sigma\}_p = [L]^T \{\sigma\}_m [L] = [T] \{\sigma\}_m \quad \text{Eq. 12}$$

Realizando-se as multiplicações matriciais na Eq. 12, obtém-se a matriz de transformação [T]:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \text{sen}^2\theta & 0 & 0 & 0 & -\text{sen}2\theta \\ \text{sen}^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & \text{sen}2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ \frac{\text{sen}2\theta}{2} & -\frac{\text{sen}2\theta}{2} & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 13}$$

A relação inversa origina a transformação de tensões do sistema de referência do material no sistema de referência do problema,

$$\{\sigma\}_m = [L]\{\sigma\}_p [L]^T = [R]\{\sigma\}_m \quad \text{Eq. 14}$$

sendo que a matriz [R] na forma expandida é dada pela por:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \text{sen}^2\theta & 0 & 0 & 0 & \text{sen}2\theta \\ \text{sen}^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & -\text{sen}2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ -\frac{\text{sen}2\theta}{2} & \frac{\text{sen}2\theta}{2} & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 15}$$

Para a transformação de deformações, o processo é o mesmo apresentado para a transformação de tensões,

$$\{\varepsilon\}_p = [L]^T \{\varepsilon\}_m [L] = [R]^T \{\varepsilon\}_m \quad \text{Eq. 16}$$

$$\{\varepsilon\}_m = [L]\{\varepsilon\}_p [L]^T = [T]^T \{\varepsilon\}_p \quad \text{Eq. 17}$$

sendo que  $[T]^T$  e  $[R]^T$  são as matrizes transposta da Eq. 13 e Eq. 15, respectivamente.

Até agora foi apresentada a transformação de coordenadas entre tensões e entre deformações, entretanto, para a formulação de um problema de compósitos laminados necessita-se transformar as componentes da matriz de rigidez e de flexibilidade do material.

Partindo-se da transformação de tensões do sistema de coordenadas do material para o sistema de coordenada do problema, Eq. 12, da relação entre tensão e deformação, Eq. 1, e da transformação de deformações, Eq. 17, obtém-se:

$$\{\sigma\}_p = [T]\{\sigma\}_m = [T][C]_m\{\varepsilon\}_m = [T][C]_m[T]^T\{\varepsilon\}_p = [C]_p\{\varepsilon\}_p \quad \text{Eq. 18}$$

onde  $[C]_m$  é matriz de rigidez no sistema de coordenadas do material e  $[C]_p$  é a matriz de rigidez do material no sistema de coordenadas do problema, ou matriz de rigidez transformada. Essa matriz pode ser dada então por:

$$[\bar{C}] = [T][C][T]^T \quad \text{Eq. 19}$$

A notação utilizada a para a matriz de rigidez do material no sistema de referência do problema é  $[C]_p = [\bar{C}]$  e para o sistema do material é  $[C]_m = [C]$ .

Realizando-se as multiplicações matriciais na Eq. 19, chega-se aos coeficientes da matriz  $[\bar{C}]$ :

$$\begin{aligned}
\bar{C}_{11} &= C_{11} \cos^4 \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + C_{22} \sin^4 \theta \\
\bar{C}_{12} = \bar{C}_{21} &= C_{12} \cos^4 \theta + (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + C_{12} \sin^4 \theta \\
\bar{C}_{13} = \bar{C}_{31} &= C_{13} \cos^2 \theta + C_{23} \sin^2 \theta \\
\bar{C}_{16} = \bar{C}_{61} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta + (2C_{66} + C_{12} - C_{22}) \cos \theta \sin^3 \theta \\
\bar{C}_{22} &= C_{22} \cos^4 \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + C_{11} \sin^4 \theta \\
\bar{C}_{23} = \bar{C}_{32} &= C_{23} \cos^2 \theta + C_{13} \sin^2 \theta \\
\bar{C}_{26} = \bar{C}_{62} &= (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta + (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta \\
\bar{C}_{33} &= C_{33} \\
\bar{C}_{36} = \bar{C}_{63} &= (C_{13} - C_{23}) \cos \theta \sin \theta \\
\bar{C}_{44} &= C_{44} \cos^2 \theta + C_{55} \sin^2 \theta \\
\bar{C}_{45} = \bar{C}_{54} &= (C_{55} - C_{44}) \cos \theta \sin \theta \\
\bar{C}_{55} &= C_{55} \cos^2 \theta + C_{44} \sin^2 \theta \\
\bar{C}_{66} &= (C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 2C_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + C_{66} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)
\end{aligned} \tag{Eq. 20}$$

sendo que os coeficientes da matriz  $[C]$  estão relacionados com as constantes de engenharia pela Eq. 6.

Para a matriz de flexibilidade  $[S]$ , o processo é o mesmo apresentado para a transformação da matriz de rigidez, isto é,

$$\{\varepsilon\}_p = [R]^T \{\varepsilon\}_m = [R]^T [S]_m \{\sigma\}_m = [R]^T [S]_m [R] \{\sigma\}_p = [S]_p \{\sigma\}_p \tag{Eq. 21}$$

A matriz transformada de flexibilidade pode ser dada por:

$$[\bar{S}] = [R]^T [S] [R] \tag{Eq. 22}$$

A notação utilizada para a matriz de flexibilidade do material no sistema de referência do problema é  $[S]_p = [\bar{S}]$  e para o sistema do material é  $[S]_m = [S]$ .

Realizando-se as multiplicações matriciais na Eq. 22, chega-se aos coeficientes da matriz  $[\bar{S}]$ :

$$\begin{aligned}
\bar{S}_{11} &= S_{11} \cos^4 \theta + 2(S_{12} + 2S_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + S_{22} \sin^4 \theta \\
\bar{S}_{12} &= \bar{S}_{21} = S_{12} \cos^4 \theta + (S_{11} + S_{22} - 4S_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + S_{12} \sin^4 \theta \\
\bar{S}_{13} &= \bar{S}_{31} = S_{13} \cos^2 \theta + S_{23} \sin^2 \theta \\
\bar{S}_{16} &= \bar{S}_{61} = (S_{11} - S_{12} - 2S_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta + (2S_{66} + S_{12} - S_{22}) \cos \theta \sin^3 \theta \\
\bar{S}_{22} &= S_{22} \cos^4 \theta + 2(S_{12} + 2S_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + S_{11} \sin^4 \theta \\
\bar{S}_{23} &= \bar{S}_{32} = S_{23} \cos^2 \theta + S_{13} \sin^2 \theta \\
\bar{S}_{26} &= \bar{S}_{62} = (S_{12} - S_{22} + 2S_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta + (S_{11} - S_{12} - 2S_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta \\
\bar{S}_{33} &= S_{33} \\
\bar{S}_{36} &= \bar{S}_{63} = (S_{13} - S_{23}) \cos \theta \sin \theta \\
\bar{S}_{44} &= S_{44} \cos^2 \theta + S_{55} \sin^2 \theta \\
\bar{S}_{45} &= \bar{S}_{54} = (S_{55} - S_{44}) \cos \theta \sin \theta \\
\bar{S}_{55} &= S_{55} \cos^2 \theta + S_{44} \sin^2 \theta \\
\bar{S}_{66} &= (S_{11} + S_{22} - 2S_{12} - 2S_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + S_{66} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)
\end{aligned} \tag{Eq. 23}$$

sendo que os coeficientes da matriz  $[S]$  estão relacionados com as constantes de engenharia pela Eq. 7.

### 3.2.3 Análise de um Laminado

Laminados multicamadas apresentam um comportamento diferente daquele apresentado por uma lâmina individualmente, isso devido às várias combinações possíveis de orientações, empilhamento, espessuras e materiais. Faz-se necessário então conhecer as teorias mais usadas na análise de placas compósitas laminadas. As teorias mais aceitas atualmente são:

- a) Teoria Clássica da Laminação - (TCL);
- b) Teoria de Primeira Ordem de Mindlin ou Teoria da Deformação por Cisalhamento - (FSDT).

Segundo Reddy (1997), a TCL e a FSDT são teorias derivadas da elasticidade 3-D, sendo que podem ser analisadas como um problema 2-D através de algumas considerações em relação à cinemática da deformação ou do estado de tensão através da espessura do laminado, conhecidas como teoria da lâmina equivalente. A teoria da lâmina equivalente considera que uma placa laminada heterogênea pode

ser estudada como uma lâmina estática equivalente, reduzindo o problema de uma análise 3-D para 2-D.

### 3.2.3.1 Teoria Clássica da Laminação (TCL)

Na TCL, as hipóteses de Kirchhoff são válidas para o estudo de placas e as hipóteses de Kirchhoff-Love são válidas no estudo de cascas. Segundo Mendonça (2005), essas hipóteses juntamente com outras próprias a materiais compostos laminados são:

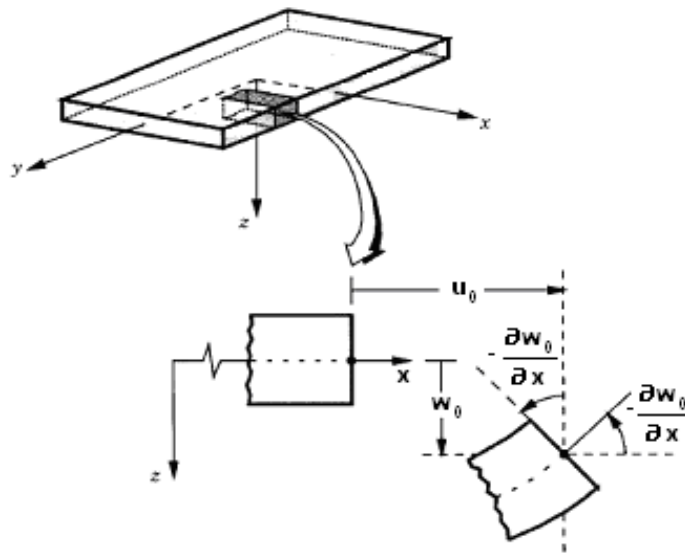
1. O laminado consiste de lâminas perfeitamente coladas, isto é, sem deslizamento ou descolamento (delaminação).
2. A camada de resina que é usada para unir as lâminas é infinitesimalmente fina e não deformável por cisalhamento. Isso significa que os deslocamentos são contínuos através das lâminas.
3. O laminado é considerado delgado, ou seja, é uma placa de parede relativamente fina ( $a/h \geq 100$ ) em relação a uma das dimensões da superfície.
4. A hipótese das seções planas é válida, ou seja, uma linha originalmente reta e perpendicular à superfície que define a geometria da estrutura permanece reta e perpendicular a essa superfície quando o laminado for estendido e flexionado. Como consequência as deformações cisalhantes na direção da espessura são nulas ( $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ).
5. Os segmentos normais à superfície de referência são considerados inextensíveis, isto é, têm comprimento constante. Isso significa que a deformação normal na direção da espessura é nula em qualquer ponto ( $\epsilon_z = 0$ ).

A hipótese das seções planas implica que os deslocamentos de um ponto genérico do laminado, Figura 11, nas direções  $x$  e  $y$ , são dados por:



$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) \\
 w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t)
 \end{aligned}
 \tag{Eq. 24}$$

onde  $\phi_x$  e  $\phi_y$  são as inclinações da normal à superfície média nas direções x e y no ponto (x,y) da superfície de referência.



**Figura 11 – Geometria e deformação de uma placa.**  
**Fonte: Reddy, 1997.**

Como a seção permanece plana e sofre apenas uma rotação, pode-se representar as inclinações por:

$$\begin{aligned}
 \phi_x &= -\frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 \phi_y &= -\frac{\partial w_0}{\partial y}
 \end{aligned}
 \tag{Eq. 25}$$

Devido às hipóteses de Kirchhoff, podem-se deduzir as relações entre os deslocamentos (campo de deslocamentos):

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x}(x, y) \\
v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y}(x, y) \\
w(x, y, z) &= w_0(x, y)
\end{aligned}
\tag{Eq. 26}$$

sendo que  $u, v$  e  $w$  são os deslocamentos de um ponto qualquer e as componentes  $u_0, v_0$  e  $w_0$  são os deslocamentos de um ponto situado na superfície de referência da placa, como mostra a Figura 11.

Assumindo-se que as deformações e rotações são relativamente pequenas, as relações entre deslocamentos e deformações são:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
\varepsilon_z &= \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0
\end{aligned}
\tag{Eq. 27}$$

Substituindo-se os deslocamentos dados pela Eq. 26 na Eq. 27, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x(x, y, z, t) &= \frac{\partial u_0(x, y, t)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial^2 x} \\
\varepsilon_y(x, y, z, t) &= \frac{\partial v_0(x, y, t)}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial^2 y} \\
\gamma_{xy}(x, y, z, t) &= \frac{\partial u_0(x, y, t)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x, y, t)}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x \partial y}
\end{aligned}
\tag{Eq. 28}$$

Podem-se dividir as deformações da Eq. 28 em duas componentes. A primeira é conhecida como deformação de membrana,  $\{\varepsilon_0\}$ , e representa as deformações coplanares da superfície de referência, sendo que estas deformações se relacionam com os deslocamentos de membrana por:

$$\{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \varepsilon_{0y} \\ \gamma_{0,xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 29}$$

A segunda componente é conhecida como curvatura da superfície de referência,  $\{k\}$ , e reflete a flexão da superfície de referência, sendo representada por:

$$\{k\} = \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 30}$$

As deformações da Eq. 28 podem ser representadas simbolicamente como a soma da Eq. 29 com a Eq. 30 resultando em:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \varepsilon_{0y} \\ \gamma_{0,xy} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 31}$$

Para um laminado qualquer, a Eq. 31 é válida para a k-ésima lâmina no sistema de coordenadas do problema, Figura 12. Para um laminado ortotrópico, sobre o estado plano de tensões (EPT), as tensões na k-ésima lâmina podem ser expressas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \left( \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \varepsilon_{0y} \\ \gamma_{0,xy} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \right) \quad \text{Eq. 32}$$

Analisando-se a Eq. 32, percebe-se que cada lâmina desenvolve tensões próprias, diferentes das demais lâminas, devido às suas propriedades elásticas e à sua cota  $z$ . Já as deformações variam de forma contínua ao longo de  $z$ . Ainda, as tensões podem ter variações descontínuas através das interfaces entre as lâminas, isso devido à variação brusca das propriedades elásticas entre uma lâmina e outra, sendo que dentro de cada lâmina as tensões variam linearmente.

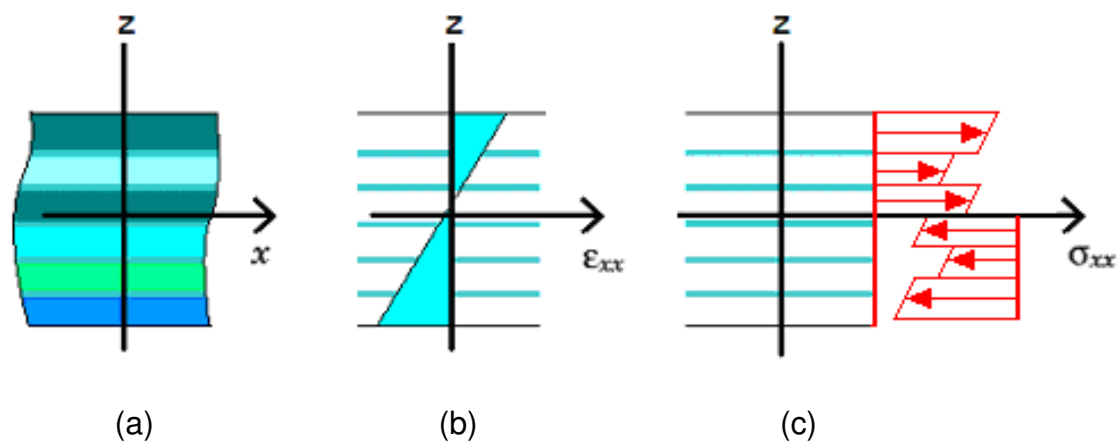


Figura 12 – Variação da deformação (b) e tensão (c) através de um laminado (a) e da espessura de uma lâmina.

Para determinação dos esforços no laminado, integram-se as tensões em cada lâmina através da espessura, originando-se as seguintes equações em notação matricial:

$$\{N\} = \int_{-H/2}^{H/2} \{\sigma\} dz \quad \text{Eq. 33}$$

$$\{M\} = \int_{-H/2}^{H/2} \{\sigma\} z dz \quad \text{Eq. 34}$$

sendo que os vetores  $\{N\}$  e  $\{M\}$  representam os esforços normais e momentos resultantes por unidade de comprimento da placa, paralela aos eixos  $x$  e  $y$ . As orientações positivas são representadas na Figura 13.

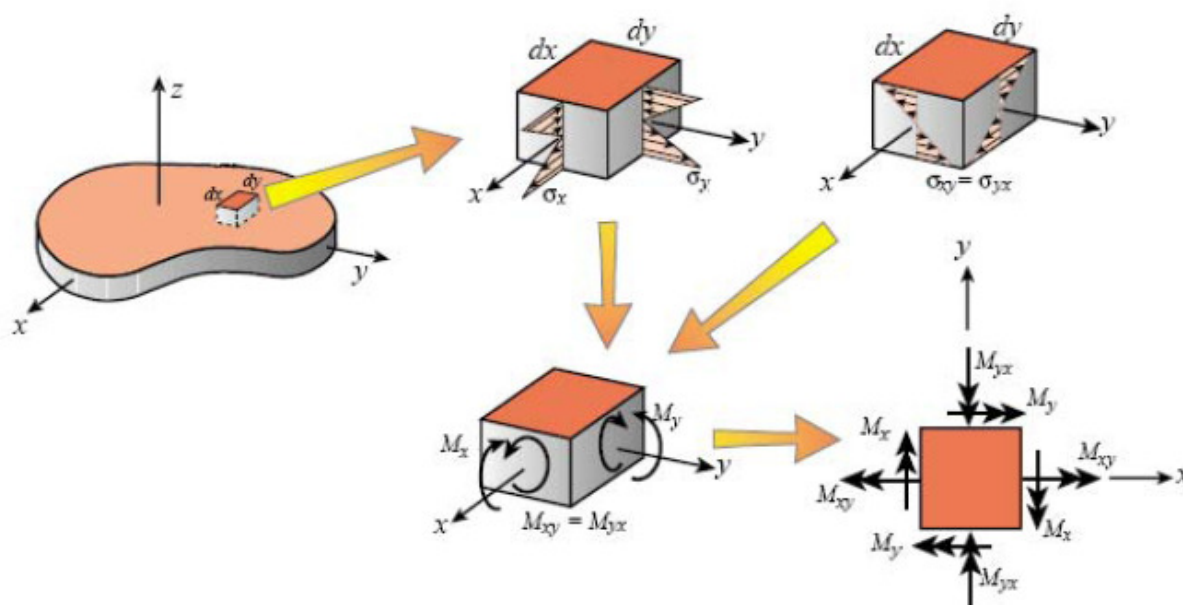


Figura 13 – Orientações, forças e momentos em um placa.

Fonte: Guimarães, 2006.

As integrais ao longo da espessura da Eq. 33 e Eq. 34 podem ser substituídas por um somatório de integrais ao longo da espessura de cada lâmina, resultando em:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad \text{Eq. 35}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad \text{Eq. 36}$$

As tensões podem ser eliminadas pela utilização das relações tensões-deformações, Eq. 32, obtendo-se:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \left[ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left( \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \varepsilon_{0y} \\ \gamma_{0,xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} z \right) dz \right] \quad \text{Eq. 37}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \left[ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \epsilon_{0x} \\ \epsilon_{0y} \\ \gamma_{0xy} \end{Bmatrix} z + \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} z^2 \right] dz \quad \text{Eq. 38}$$

Após a realização das integrações e dos somatórios, a matriz resultante é a seguinte:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_x \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{0x} \\ \epsilon_{0y} \\ \gamma_{0xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 39}$$

sendo que:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (z_k - z_{k-1}) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right] \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \left[ \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \right] \end{aligned} \quad \text{Eq. 40}$$

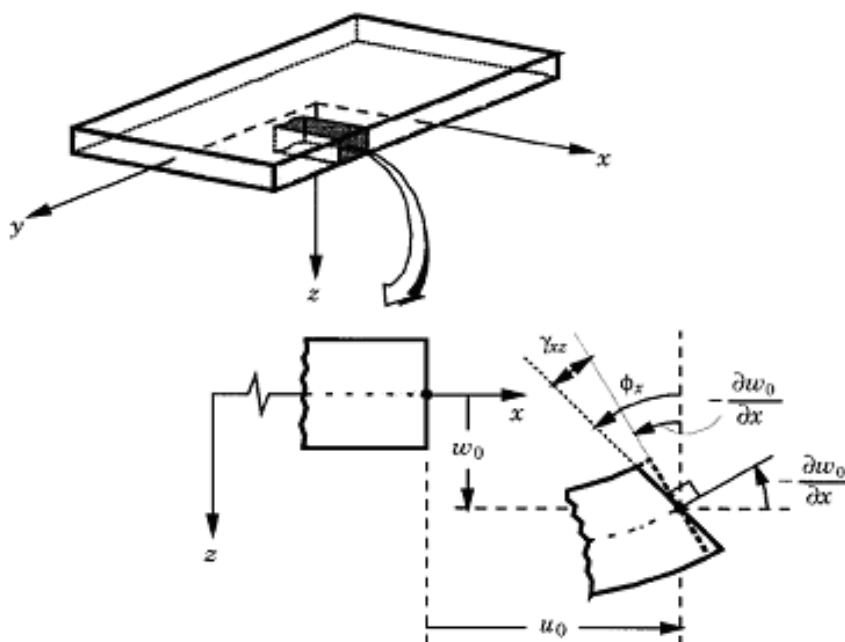
onde os índices i e j valem 1,2 ou 6. A matriz [A] é chamada de matriz de rigidez extensional, [B] é a matriz de rigidez de acoplamento entre flexão e extensão e [D] é a matriz de rigidez à flexão do laminado. A Eq. 39 pode ser escrita na forma reduzida por:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ k \end{Bmatrix} = [C]_{6 \times 6} \begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ k \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 41}$$

A matriz [C] é a matriz de rigidez completa do laminado.

### 3.2.3.2 Teoria de Primeira Ordem (FSDT)

Na TCL, considera-se que a seção transversal após a deformação é perpendicular à superfície neutra. Na FSDT, essa consideração não é válida, conforme a Figura 14, o que resulta na inclusão do cisalhamento transversal na análise.



**Figura 14 – Configuração deformada segundo a Teoria de Primeira Ordem.**  
**Fonte: Reddy, 1997.**

Como se trata de uma teoria de primeira ordem, a FSDT supõe que os deslocamentos variem linearmente ao longo da espessura, o campo de deslocamento é dado pela Eq. 24. Realizando-se as derivadas parciais da Eq. 24, obtém-se:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \phi_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \phi_y$$
Eq. 42

onde  $\phi_x$  é a rotação da seção transversal em torno do eixo-y e  $\phi_y$  a rotação em torno do eixo-x.

As quantidades ( $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ ,  $\phi_x$  e  $\phi_y$ ) são conhecidas como deslocamentos generalizados. As relações deformação-deslocamento lineares resultam em:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\
 \gamma_{xz} &= \phi_x - \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 \gamma_{yz} &= \phi_y - \frac{\partial w_0}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{Eq. 43}$$

Observando-se a Eq. 43 percebe-se que as deformações  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$  variam linearmente ao longo da espessura, enquanto  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$  são constantes, o que representa uma aproximação para o modelo.

Agrupando-se na forma matricial as deformações da Eq. 43, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0,xx} \\ \varepsilon_{0,yy} \\ \gamma_{0,yz} \\ \gamma_{0,xz} \\ \gamma_{0,xy} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ 0 \\ 0 \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \phi_y - \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \phi_x - \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{Eq. 44}$$

A Teoria da Elasticidade estabelece que a tensão cisalhante transversa varia parabolicamente ao longo da espessura, entretanto, na FSDT ela é considerada



constante. Para corrigir esta discrepância, considera-se um fator  $K^2$  de correção de cisalhamento no cálculo das forças cisalhantes resultantes,

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = K \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad \text{Eq. 45}$$

Para um laminado qualquer, a relação constitutiva para a análise via FSDT é obtida utilizando-se a Eq. 32 e as seguintes relações:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{54} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \gamma_{0,yz} \\ \gamma_{0,xz} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 46}$$

onde:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{44} &= Q_{44} \cos^2 \theta + Q_{55} \sin^2 \theta \\ \bar{Q}_{45} &= \bar{Q}_{54} = (Q_{55} - Q_{44}) \cos \theta \sin \theta \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{44} \sin^2 \theta + Q_{55} \cos^2 \theta \end{aligned} \quad \text{Eq. 47}$$

As equações constitutivas para a TCL, Eq. 35 e Eq. 36, são válidas também para a análise FSDT, juntamente com o seguinte complemento:

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = K \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^k dz \quad \text{Eq. 48}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = K \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{54} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{0,yz} \\ \gamma_{0,xz} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 49}$$

sendo que os coeficientes  $A_{44}$ ,  $A_{45}$  e  $A_{55}$  são dados por:

---

<sup>2</sup> Diversos valores para K têm sido apresentados na literatura, variando conforme o carregamento, tipo de laminado, método de cálculo, etc. Alguns valores para K são apresentados em Mendonça (2005), sendo que para placas laminadas sob carregamento estático ele considera  $K=1,20$ .

$$\begin{aligned}
A_{44} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{44} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{Q}_{44}^k dz = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{44} (z_k - z_{k-1}) \\
A_{45} = A_{54} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{45} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{Q}_{45}^k dz = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{45} (z_k - z_{k-1}) \\
A_{55} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{55} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{Q}_{55}^k dz = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{55} (z_k - z_{k-1})
\end{aligned} \tag{Eq. 50}$$

Para uma lâmina isotrópica de espessura  $h$  com constantes de engenharia  $E$  e  $\nu$  (sendo que  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ), os coeficiente não nulos da Eq. 39 e Eq. 49 valem:

$$\begin{aligned}
A_{11} = A_{22} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \\
A_{12} = A_{21} &= \nu A_{11} \\
A_{66} &= \frac{1-\nu}{2} A_{11} \\
A_{44} = A_{55} &= \frac{1-\nu}{2} A_{11} \\
D_{11} = D_{22} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \\
D_{12} = D_{21} &= \nu D_{11} \\
D_{66} &= \frac{1-\nu}{2} D_{11}
\end{aligned} \tag{Eq. 51}$$

sendo que as equações constitutivas para a TCL e para a FSDT ficam:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \nu A_{11} & 0 \\ \nu A_{11} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} A_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0xx} \\ \varepsilon_{0yy} \\ \gamma_{0xy} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 52}$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & \nu D_{11} & 0 \\ \nu D_{11} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} D_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 53}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = K \frac{1-\nu}{2} \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{0yz} \\ \gamma_{0xz} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 54}$$

### 3.3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Durante muito tempo, a única forma de resolver as equações diferenciais parciais que governam os problemas de placas e cascas, isotrópicas ou não, era através de soluções analíticas. Os métodos de Rayleigh-Ritz e de Galerkin podem também ser utilizados para determinar uma solução analítica aproximada, entretanto, são limitados a problemas de geometria simples, devido à dificuldade de construção das funções aproximadoras em problemas de geometria complicada.

A partir da década de 1960, com o advento da computação, o uso de métodos numéricos facilitou a solução de diversas equações que governam problemas práticos de engenharia, entre eles os problemas de placas e cascas. Dentre os métodos numéricos disponíveis para solução de equações diferenciais parciais, o método dos elementos finitos é um dos mais eficazes.

Existem muitos modelos de elementos finitos para a teoria de placas. Eles podem ser divididos em três grandes grupos: (i) modelo compatível, (ii) modelo misto e híbrido, e (iii) modelo de equilíbrio. A seguir é apresentado as características de cada modelo de forma resumida. O modelo compatível é o mais utilizado em programas comerciais de elementos finitos.

- i. Modelo compatível: é baseado no princípio da Energia Potencial Mínima. Sobre cada elemento é adotado um campo de deslocamento, escolhido de tal maneira que haja compatibilidade de deslocamentos e, eventualmente, de

suas derivadas, entre os elementos. As incógnitas são os deslocamentos nos pontos nodais.

- ii. Modelo misto e híbrido: são baseados em princípios variacionais, onde tanto os deslocamentos como as tensões são aproximados independentemente.
- iii. Modelo de equilíbrio: baseia-se no princípio da Energia Complementar Mínima. Sobre cada elemento é adotado um campo de tensões em equilíbrio. As incógnitas são as tensões nos pontos nodais.

O modelo compatível é o mais utilizado em programas comerciais de elementos finitos, sendo conhecido também como método dos elementos finitos baseado em deslocamentos. O desenvolvimento seguinte do trabalho será baseado no modelo de deslocamentos.

### 3.3.1 Conceitos Básicos do MEF

Segundo Reddy (1992), as características do MEF que proporcionam a modelagem e simulação de diversos problemas práticos de engenharia são:

1. O domínio do problema é formado como uma coleção de subdomínios mais simples, conhecidos como elementos finitos, sendo que este processo é conhecido como discretização em elementos finitos. A coleção dos elementos subdivididos é conhecida como malha de elementos finitos, representando geralmente uma aproximação para o domínio.
2. Para cada elemento finito, a solução da equação que governa o problema é aproximada por uma combinação linear de funções pré-escolhidas, muitas vezes funções polinomiais.

Para um elemento, representando a solução como o seu valor nos nós, identifica-se a solução como uma interpolação polinomial apropriada, podendo-se escrever:

$$u(x) \approx U_e(x) = \sum_{j=1}^n U_j^e \psi_j^e(x) \quad \text{Eq. 55}$$

onde  $U_e$  representa a interpolação de  $u$  em um elemento de domínio  $\Omega^e$ ,  $U_j^e$  é o valor de  $U_e$  no nó  $j$ , e  $\psi_j^e(x)$  é a função interpoladora.

Generalizando, o MEF é um método numérico onde uma dada equação diferencial é reescrita em uma forma equivalente, conhecida como integral de ponderação ou formulação variacional, sendo que os parâmetros  $U_j^e$  são determinados de tal forma que a formulação variacional seja atendida em cada elemento. A satisfação da formulação variacional conduz a um conjunto de equações algébricas entre os parâmetros  $U_j^e$  de um elemento. Como o domínio é dividido entre um conjunto de elementos, eles são agrupados nas suas posições originais baseando-se na continuidade do elemento na interface.

Para se obter uma solução adequada utilizando-se o MEF, devem-se conhecer aspectos importantes sobre a geometria dos elementos, refinamento de malha, representação das cargas e outros.

A geração de uma malha de elementos finitos de uma dada estrutura deve seguir as seguintes recomendações, conforme Reddy (1992):

1. A malha deve representar a geometria do domínio e as cargas envolvidas de forma precisa.
2. A malha deve ser de tal forma que grande variações de tensões ou de deformações sejam adequadamente representadas.
3. A malha não deve conter elementos com grandes razões de aspectos (i.e., razão entre o lado maior e o menor do elemento), especialmente em regiões de grandes variações de tensões e/ou deformações.

O refino da malha pode ser feito de diversas formas. Subdividindo-se os elementos já existentes em duas ou mais partes do mesmo tipo, substituindo-se elementos existentes por elementos de ordem maior. Deve-se ter o cuidado para não se ter elementos muito pequenos conectados com elementos muito grandes. Quando se utiliza elementos com diferentes graus de liberdade, devem-se construir elementos de transição para conectar esses elementos.

As cargas no problema real em uma determinada fronteira são substituídas por cargas nodais equivalentes. Isto é feito de tal forma que o trabalho realizado pelas cargas nodais no modelo de elementos finitos é o mesmo que o realizado pelas cargas distribuídas do problema.

Para cada uma das teorias de placas existe uma formulação em elementos finitos, assim, a seguir será desenvolvida a formulação para a TCL e a FSDT, que são as teorias de placas laminadas já apresentadas.

### 3.3.2 Modelo de Elementos Finitos da TCL

Como já visto anteriormente, a TCL é uma extensão da teoria de placas isotrópicas de Kirchhoff. A origem das equações de equilíbrio que governam a TCL podem ser encontradas em Reddy (1997) ou Mendonça (2005), sendo que neste trabalho elas são apenas apresentadas e não deduzidas. Para o caso estático, essas equações são:

$$-\left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_6}{\partial y}\right) = 0 \quad \text{Eq. 56}$$

$$-\left(\frac{\partial N_6}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y}\right) = 0 \quad \text{Eq. 57}$$

$$-\left(\frac{\partial^2 M_1}{\partial^2 x} + 2\frac{\partial^2 M_6}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial^2 y} + N(w) + q\right) = 0 \quad \text{Eq. 58}$$

onde  $(N_1, N_2$  e  $N_6)$  e  $(M_1, M_2$  e  $M_6)$  são as forças e momentos resultantes, conforme a Figura 15, e o termo  $N(w)$  é o termo não linear.

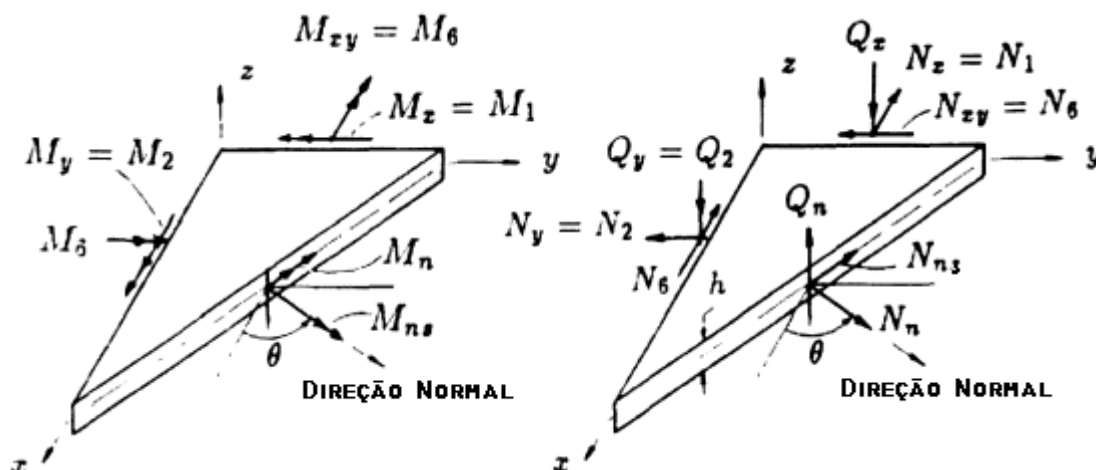


Figura 15 – Orientações de forças e momentos.  
Fonte: Reddy, 1992

As equações de equilíbrio podem ser escritas em termos dos deslocamentos ( $u$ ,  $v$  e  $w$ ), utilizando-se as relações constitutivas das lâminas, resultando nas seguintes equações:

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} dz, \quad \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} z dz$$

$$N(w) = \frac{\partial}{\partial x} \left( N_1 \frac{\partial w}{\partial x} + N_6 \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( N_6 \frac{\partial w}{\partial x} + N_2 \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

Eq. 59

Para se escrever o modelo de elementos finitos das equações de movimento deve-se construir a sentença de resíduos ponderados das equações e a aproximação dos deslocamentos.

A sentença de resíduos ponderados é necessária para se encontrar um conjunto de relações algébricas entre os deslocamentos e as forças, sendo que pode ser obtida diretamente através da equação que governa o problema ou do princípio dos trabalhos virtuais. As duas formas de se obter a sentença de resíduos ponderados levam ao mesmo resultado, conhecida como forma fraca.

A aproximação dos deslocamentos é realizada por interpolação conforme a Eq. 55, sendo então substituída na forma fraca da equação para se obter as relações algébricas entre os deslocamentos e as forças nodais.

Para se obter a forma fraca, cada equação é multiplicada por função de ponderação (ou função peso) e integrada no domínio de um elemento. A função de ponderação significa uma variação virtual na componente de deslocamento. A Eq. 56, Eq. 57 e Eq. 58 representam o equilíbrio das forças nas direções x, y, z. As funções de ponderação para elas tem o significado de variações virtuais ( $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$ ), respectivamente.

Multiplicando-se a Eq. 56 por uma função de ponderação  $\delta u$  e integrando-se ao longo do domínio do elemento ( $\Omega^e$ ), obtém-se:

$$\int_{\Omega^e} \delta u \left[ -\frac{\partial N_1}{\partial x} \quad -\frac{\partial N_6}{\partial y} \right] dx dy = 0 \quad \text{Eq. 60}$$

Para se reduzir o grau de diferenciabilidade necessário da função de interpolação, utiliza-se a integração por partes:

$$\int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \delta u}{\partial x} N_1 + \frac{\partial \delta u}{\partial y} N_6 \right) dx dy - \int_{\Gamma^e} (N_1 \eta_x + N_6 \eta_y) \delta u ds = 0 \quad \text{Eq. 61}$$

onde  $(\eta_x, \eta_y)$  são os cossenos diretores do vetor unitário normal no contorno  $\Gamma^e$  do elemento  $\Omega^e$ . A expressão entre parênteses na integral do contorno representa a força normal no plano:

$$N_1 \eta_x + N_6 \eta_y = N_n \quad \text{Eq. 62}$$

Inserindo-se a Eq. 62 na Eq. 61, resulta a seguinte expressão:

$$\int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \delta u}{\partial x} N_1 + \frac{\partial \delta u}{\partial y} N_6 \right) dx dy - \int_{\Gamma^e} \delta u N_n ds = 0 \quad \text{Eq. 63}$$



A Eq. 63 é conhecida como forma fraca da Eq. 56 porque requer um grau de diferenciabilidade menor das variáveis dependentes ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ) do que aquele necessário na equação diferencial original, Eq. 56.

O mesmo procedimento é realizado para a Eq. 57 e Eq. 58, obtendo-se as seguintes formas fracas:

$$\int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \delta v}{\partial x} N_6 + \frac{\partial \delta v}{\partial y} N_2 \right) dx dy - \int_{\Gamma^e} \delta v N_{ns} ds = 0 \quad \text{Eq. 64}$$

$$\int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial^2 x} M_1 + 2 \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} M_6 + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial^2 y} M_2 + \delta w q \right) dx dy + \int_{\Gamma^e} \left( \delta w V_n + \frac{\partial \delta w}{\partial n} M_n \right) ds = 0 \quad \text{Eq. 65}$$

onde  $\delta v$  e  $\delta w$  são as variações virtuais dos deslocamentos  $v$  e  $w$ , respectivamente.

Com relação aos deslocamentos ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ), eles são aproximados por interpolação através da seguinte forma:

$$u = \sum_{j=1}^n u_j \psi_j(x, y) \quad \text{Eq. 66}$$

$$v = \sum_{j=1}^n v_j \psi_j(x, y) \quad \text{Eq. 67}$$

$$w = \sum_{j=1}^m \Delta_j \phi_j(x, y) \quad \text{Eq. 68}$$

Os coeficientes ( $u_j$ ,  $v_j$ ) representam o valor nodal de ( $u$ ,  $v$ ) e  $\Delta_j$  representa o valor nodal de  $w$  e sua derivada. Todos os deslocamentos nodais e rotações estão associados com o elemento  $\Omega^e$ .

As funções de interpolação basicamente podem ser de dois tipos: de Lagrange e de Hermite. A interpolação de Lagrange é aquela onde apenas a função é interpolada, sendo que os elementos são conhecidos como de continuidade  $C^0$ , já a de Hermite é aquela onde tanto a função como a sua derivada são interpoladas, conhecida como elementos de continuidade  $C^m$ , onde  $m > 0$  é a ordem da

derivada presente na interpolação. Através das Eq. 66, Eq. 67 e Eq. 68, percebem-se que as funções de interpolação  $\psi_i$  são Lagrangeanas, já  $\phi_i$  é Hermitiana.

Para uma interpolação de Lagrange linear de  $(u, v)$  e cúbica de Hermite para  $w$  utilizando-se um elemento retangular de 4 nós, tem-se  $n=4$  e  $m=16$ . Os 4 valores nodais associados com  $w$  são:

$$w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \text{Eq. 69}$$

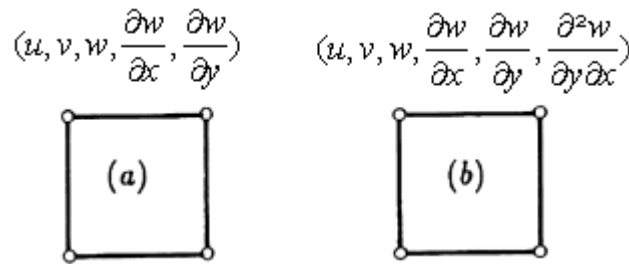
A função de interpolação de Lagrange ( $\psi_i$ ) e de Hermite ( $\phi_i$ ) são apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Função de interpolação de Lagrange e Hermite.

Fonte: Adaptada de Reddy 1992.

Elemento	Função de Interpolação	Considerações
Lagrangeano linear	$\frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)$	Nó i= 1...4
Hermitiano cúbico:		
Variável u:	$\frac{1}{16}(\xi + \xi_i)^2(\xi\xi_i - 2)(\eta + \eta_i)^2(\eta\eta_i - 2)$	
Derivada $\partial u / \partial \xi$ :	$-\frac{1}{16}\xi_i(\xi + \xi_i)^2(\xi\xi_i - 1)(\eta + \eta_i)^2(\eta\eta_i - 2)$	
Derivada $\partial u / \partial \eta$ :	$-\frac{1}{16}(\xi + \xi_i)^2(\xi\xi_i - 2)\eta_i(\eta + \eta_i)^2(\eta\eta_i - 1)$	
Derivada $\partial^2 u / \partial \eta \partial \xi$ :	$\frac{1}{16}\xi_i(\xi + \xi_i)^2(\xi\xi_i - 1)\eta_i(\eta + \eta_i)^2(\eta\eta_i - 1)$	
Função de Interpolação para:		Nó i=1...4
Variável u:	$\frac{1}{2}(\xi_0 + 1)(\eta_0 + 1)(2 + \xi_0 + \eta_0 - \xi^2 - \eta^2)$	
Derivada $\partial u / \partial \xi$ :	$\frac{1}{2}\xi_i(\xi_0 + 1)^2(\xi_0 - 1)(\eta_0 + 1)$	
Derivada $\partial u / \partial \eta$ :	$\frac{1}{2}\eta_i(\xi_0 + 1)^2(\eta_0 + 1)(\eta_0 - 1)$	
	$\xi = (x - x_c) / a, \quad \eta = (y - y_c) / b$ $\xi_0 = \xi\xi_i, \quad \eta_0 = \eta\eta_i$	2a e 2b são os lados da placa
$\xi_i$ e $\eta_i$ representam as coordenadas do nó i do elemento e $x_c$ e $y_c$ são as coordenadas globais do centro do elemento.		

A continuidade de  $(u, v, w, \frac{\partial w}{\partial n})$  na interface dos elementos é garantida através da escolha da interpolação de  $(u, v, w)$ , sendo então chamados esses elementos de conformes. Se a derivada  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$  não é incluída na interpolação, a continuidade do elemento é violada, sendo conhecida então como elemento não conforme. Os elementos não conformes tem um total de 5 graus de liberdade por nó, já os conformes tem um total de 6, com indicado na Figura 16.



**Figura 16 – Elemento quadrado de placa da TCL. (a) Elemento não conforme. (b) Elemento conforme.**

Fonte: Reddy, 1992.

O modelo de elementos finitos completo é obtido substituindo-se a Eq. 66, Eq. 67 e Eq. 68 para  $(u, v, w)$ , e  $\delta u = \psi_i$ ,  $\delta v = \psi_i$  e  $\delta w = \phi_i$  na Eq. 63 a Eq. 65, resultando num sistema de equações algébricas. Há um total de  $(2n+m)$  graus de liberdade por elemento, sendo que a substituição resulta em:

$$\int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} N_1 + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} N_6 \right) dx dy - \int_{\Gamma^e} N_n \psi_i ds = 0 \quad \text{Eq. 70}$$

$$\int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} N_6 + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} N_2 \right) dx dy - \int_{\Gamma^e} N_{ns} \psi_i ds = 0 \quad \text{Eq. 71}$$

$$\int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial^2 x} M_1 + 2 \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} M_6 + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial^2 y} M_2 + \phi_i q \right) dx dy + \int_{\Gamma^e} \left( \phi_i V_n + \frac{\partial \phi_i}{\partial n} M_n \right) ds = 0 \quad \text{Eq. 72}$$

Essas equações podem ser reescritas na forma,

$$\sum_{\beta=1}^3 \sum_{j=1}^{n(\beta)} K_{ij}^{\alpha\beta} \Delta_j^\beta - F_i^\alpha = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n(\alpha) \quad \text{Eq. 73}$$

ou

$$[K^e] \{\Delta^e\} - \{F^e\} = \{0\} \quad \text{Eq. 74}$$

onde  $\alpha = 1, 2, 3$ ;  $n(1) = n(2) = 4$  e  $n(3) = 16$ . As variáveis  $\Delta_j^\beta$  e coeficientes de rigidez  $K_{ij}^{\alpha\beta}$  são definidos por:

$$\Delta_j^1 = u_j, \quad \Delta_j^2 = v_j, \quad \Delta_j^3 = w_j \quad \text{Eq. 75}$$

e

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{1\alpha} &= \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} N_{1j}^\alpha + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} N_{6j}^\alpha \right) dx dy \\
N_{1j}^1 &= A_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, \quad N_{1j}^2 = A_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \\
N_{1j}^3 &= - \left( B_{11} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial^2 x} + 2B_{16} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} + B_{12} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial^2 y} \right), \\
K_{ij}^{2\alpha} &= \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} N_{6j}^\alpha + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} N_{2j}^\alpha \right) dx dy \\
N_{6j}^1 &= A_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, \quad N_{6j}^2 = A_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \\
N_{6j}^3 &= - \left( B_{16} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial^2 x} + 2B_{66} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial^2 y} \right) \\
N_{2j}^1 &= A_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, \quad N_{2j}^2 = A_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \\
N_{2j}^3 &= - \left( B_{12} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial^2 x} + 2B_{26} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial^2 y} \right) \\
K_{ij}^{3\alpha} &= - \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial^2 x} M_{1j}^\alpha + 2 \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} M_{6j}^\alpha + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial^2 y} M_{2j}^\alpha \right) dx dy \\
M_{1j}^1 &= B_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, \quad M_{2j}^2 = B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \\
M_{1j}^3 &= - \left( D_{11} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial^2 x} + 2D_{16} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} + D_{12} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial^2 x} \right) \\
M_{6j}^1 &= B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, \quad M_{6j}^2 = B_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \\
M_{6j}^3 &= - \left( D_{16} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial^2 x} + 2D_{66} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial^2 y} \right) \\
M_{2j}^1 &= B_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, \quad M_{2j}^2 = B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \\
M_{2j}^3 &= - \left( D_{12} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial^2 x} + 2D_{26} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial^2 y} \right) \\
F_i^1 &= \int_{\Gamma^e} N_n \psi_i ds, \quad F_i^2 = \int_{\Gamma^e} N_{ns} \psi_i ds \\
F_i^e &= \int_{\Gamma^e} \left( \phi_i V_n + \frac{\partial \phi_i}{\partial n} M_n \right) ds - \int_{\Omega^e} \phi_i q dx dy
\end{aligned}$$

Eq. 76

Os demais coeficientes valem zero.

A Eq. 74, de um elemento, é conectada aos demais se utilizando a continuidade do deslocamento nodal e balanço de forças. As condições de forças e deslocamentos externos são impostas no sistema global e as equações são resolvidas para os deslocamentos da malha total. A Eq. 66 a Eq. 68 podem ser utilizadas para se determinar os deslocamentos em um ponto arbitrário  $(x, y, 0)$ , e o campo de deslocamentos dado pela Eq. 26 pode ser utilizado para se determinar o deslocamento total em um ponto  $(x, y, z)$ . As deformações e as tensões podem ser obtidas utilizando-se o campo de deslocamentos, podendo ser transformados para o sistema de coordenadas das lâminas utilizando-se as relações de transformações de coordenadas.

### 3.3.3 Modelo de Elementos Finitos da FSDT

O procedimento para se obter o modelo de elementos finitos da FSDT é o mesmo utilizado para se obter o da TCL. As equações de equilíbrio são as seguintes:

$$\begin{aligned}
 -\left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_6}{\partial y}\right) &= 0 \\
 -\left(\frac{\partial N_6}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y}\right) &= 0 \\
 -\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + N(w) + q\right) &= 0 \\
 -\left(\frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial M_6}{\partial y} - Q_1\right) &= 0 \\
 -\left(\frac{\partial M_6}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} - Q_2\right) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{Eq. 77}$$

A força e o momento resultante contêm apenas a primeira derivada das variáveis  $(u, v, w, \phi_1, \phi_2)$ , podendo então ser aproximados por funções de interpolação de Lagrange, ou seja, são elementos de continuidade  $C^0$ . Os deslocamentos  $(u, v, w, \phi_1, \phi_2)$  são aproximados por:

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{j=1}^n u_j \psi_j(x, y) \\
v &= \sum_{j=1}^n v_j \psi_j(x, y) \\
w &= \sum_{j=1}^n w_j \psi_j(x, y) \\
\phi_1 &= \sum_{j=1}^n S_j^1 \psi_j(x, y) \\
\phi_2 &= \sum_{j=1}^n S_j^2 \psi_j(x, y)
\end{aligned}$$

Eq. 78

onde  $\psi_j$  são as funções de interpolação de Lagrange, podendo ser linear, quadráticas ou funções de ordem superiores.

Para o caso linear, a forma fraca da Eq. 77 para o domínio de um elemento  $\Omega^e$  fica:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} N_1 + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} N_6 \right) dx dy - \int_{\Gamma^e} N_n \psi_i ds = 0 \\
&\int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} N_6 + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} N_2 \right) dx dy - \int_{\Gamma^e} N_{ns} \psi_i ds = 0 \\
&\int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} Q_1 + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} Q_2 + \psi_i q \right) dx dy - \int_{\Gamma^e} Q_n \psi_i ds = 0 \\
&\int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} M_1 + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} M_6 + \psi_i Q_1 \right) dx dy - \int_{\Gamma^e} M_n \psi_i ds = 0 \\
&\int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} M_6 + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} M_2 + \psi_i Q_2 \right) dx dy - \int_{\Gamma^e} M_{ns} \psi_i ds = 0
\end{aligned}$$

Eq. 79

Substituindo-se a Eq. 78 na Eq. 79, obtém-se o modelo de elementos finitos da FSDT:

$$\sum_{\beta=1}^5 \sum_{j=1}^n K_{ij}^{\alpha\beta} \Delta_j^\beta - F_i^\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, 5$$

Eq. 80



ou

$$[K^e]\{\Delta^e\} - \{F^e\} = \{0\} \quad \text{Eq. 81}$$

onde os coeficientes de rigidez e de força são definidos para ( $\alpha = 1, 2, \dots, 5$ )

$$\begin{aligned} K_{ij}^{1\alpha} &= \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} N_{1j}^\alpha + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} N_{6j}^\alpha \right) dx dy \\ K_{ij}^{2\alpha} &= \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} N_{6j}^\alpha + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} N_{2j}^\alpha \right) dx dy \\ K_{ij}^{3\alpha} &= \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} Q_{1j}^\alpha + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} Q_{2j}^\alpha \right) dx dy \\ K_{ij}^{4\alpha} &= \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} M_{1j}^\alpha + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} M_{6j}^\alpha + \psi_i Q_{1j}^\alpha \right) dx dy \\ K_{ij}^{5\alpha} &= \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} M_{6j}^\alpha + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} M_{2j}^\alpha + \psi_i Q_{2j}^\alpha \right) dx dy \end{aligned} \quad \text{Eq. 82}$$

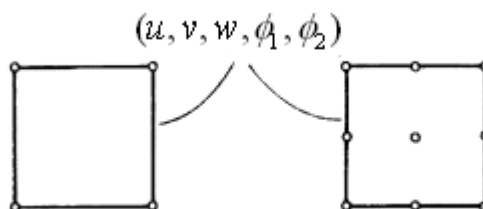
Os coeficientes  $N_{ij}^\alpha$ ,  $M_{ij}^\alpha$  e  $Q_{ij}^\alpha$  para  $\alpha = 1, 2, \dots, 5$  e  $I = 1, 2, 6$  são dados por:

$$\begin{aligned}
N_{1j}^1 &= A_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, & N_{1j}^2 &= A_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + A_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
N_{1j}^4 &= B_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, & N_{1j}^5 &= B_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
N_{2j}^1 &= A_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, & N_{2j}^2 &= A_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + A_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
N_{2j}^4 &= B_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, & N_{2j}^5 &= B_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
N_{6j}^1 &= A_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, & N_{6j}^2 &= A_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + A_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
N_{6j}^4 &= B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + B_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial x}, & N_{6j}^5 &= B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + B_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
M_{1j}^1 &= B_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, & M_{1j}^2 &= B_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
M_{1j}^4 &= D_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + D_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x}, & M_{1j}^5 &= D_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + D_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
M_{2j}^1 &= B_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, & M_{2j}^2 &= B_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
M_{2j}^4 &= D_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, & M_{2j}^5 &= D_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + D_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
M_{6j}^1 &= B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, & M_{6j}^2 &= B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + B_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
M_{6j}^4 &= D_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + D_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, & M_{6j}^5 &= D_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + D_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
Q_{1j}^4 &= A_{55} \psi_j, & Q_{2j}^4 &= A_{45} \psi_j, & Q_{1j}^5 &= A_{45} \psi_j, & Q_{2j}^5 &= A_{44} \psi_j \\
Q_{1j}^3 &= A_{55} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{45} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, & Q_{2j}^3 &= A_{45} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{44} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \\
F_i^1 &= \int_{\Gamma^e} \psi_i N_n ds, & F_i^2 &= \int_{\Gamma^e} \psi_i N_{ns} ds, & F_i^3 &= \int_{\Omega^e} q \psi_i dx dy + \int_{\Gamma^e} \psi_i Q_n ds \\
F_i^4 &= \int_{\Gamma^e} \psi_i M_n ds, & F_i^5 &= \int_{\Gamma^e} \psi_i M_{ns} ds
\end{aligned}$$

Eq. 83

Todos os demais coeficientes valem zero.

Quando se utiliza o elemento de placa de 4 nós, a matriz de rigidez do elemento é de ordem 20x20. Quando se utiliza o elemento de 9 nós a matriz é de ordem 45x45, conforme a Figura 17.



**Figura 17 – Elemento de placa para a FSDT.**  
**Fonte: Reddy, 1992.**

Tendo-se as equações de elementos finitos para cada elemento, eles são agrupados utilizando-se da continuidade do deslocamento nodal e o balanço de forças nodais. As condições de contorno de deslocamento e de força são aplicadas no sistema global e o sistema é então resolvido para o valor nodal dos deslocamentos.

## 4 PROPRIEDADES MECÂNICAS

O trabalho experimental realizado por Wéber (2004), visando estudar o envelhecimento de placas blindadas de policarbonato, utilizou uma placa laminada fabricada pelo Grupo Inbra, para emprego como blindagem Nível I, segundo a norma NIJ 0108.01. A placa consiste de um quadrado de 300 mm de lado e com espessura de 12,7 mm, sendo que existem 3 (três) camadas de policarbonato intercaladas por um filme de poliuretano, fabricadas por moldagem a vácuo em um autoclave. A Figura 18 mostra um esquema representativo da placa estudada por Weber (2004) e que será também modelada de forma numérica neste trabalho.

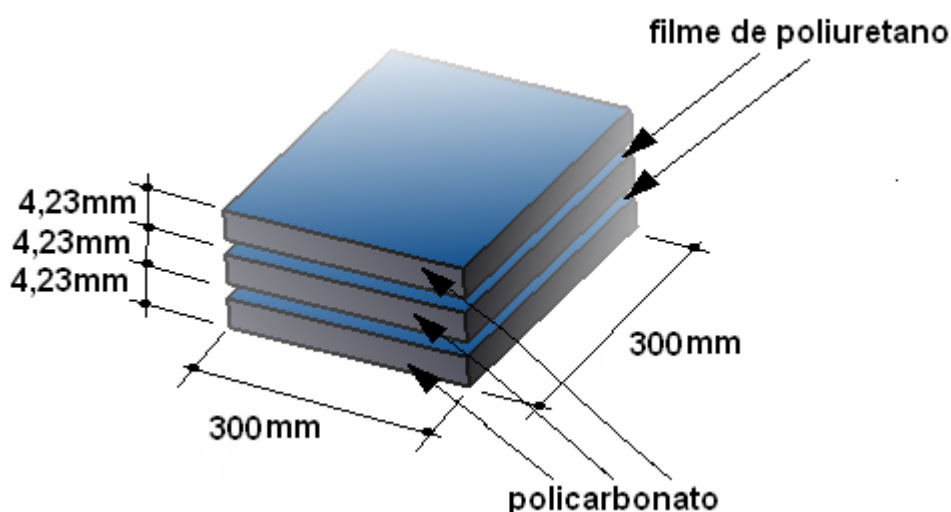


Figura 18 – Placa utilizada nos ensaios.

O policarbonato utilizado na fabricação é o bisfenol-A, sendo que a placa foi obtida por injeção a partir da resina termoplástica, produzida pela Lexan Resin Section da General Electric, sendo que as propriedades mecânicas se encontram na Tabela 2, obtidas por Wéber (2004) através de ensaios mecânicos.

**Tabela 2 – Propriedades mecânicas do policarbonato de bisfenol-A.**

Limite de Escoamento (MPa)	Módulo de Elasticidade (MPa)	Resistência ao impacto Izod <sup>3</sup> à 23°C (J/m)	Coefficiente de Poisson
65	1585	854	0,37

O filme de poliuretano utilizado para a união das lâminas de policarbonato é da marca Krystalflex, tipo PE 399, fabricado por Huntsman Polyurethanes, e possui as propriedades apresentadas na Tabela 3, fornecidas pelo fabricante.

**Tabela 3 – Propriedades mecânicas do poliuretano.**

Resistência à tração (MPa)	Alongamento (%)	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )
65	500	854

A montagem da placa de policarbonato no dispositivo onde vai ser utilizada é de fundamental importância para o seu desempenho. Dependendo do tipo de montagem, a placa apresentará uma vinculação com o anteparo, sendo a mais comum a placa ter um apoio simples ou ser engastada no anteparo. A Figura 19 apresenta um esquema representativo destes dois tipos de apoios.

---

<sup>3</sup> O teste Izod é um ensaio de impacto semelhante ao ensaio Charpy. Entretanto, a fixação do corpo de prova é diferente, sendo fixado na vertical por um par de agarras.

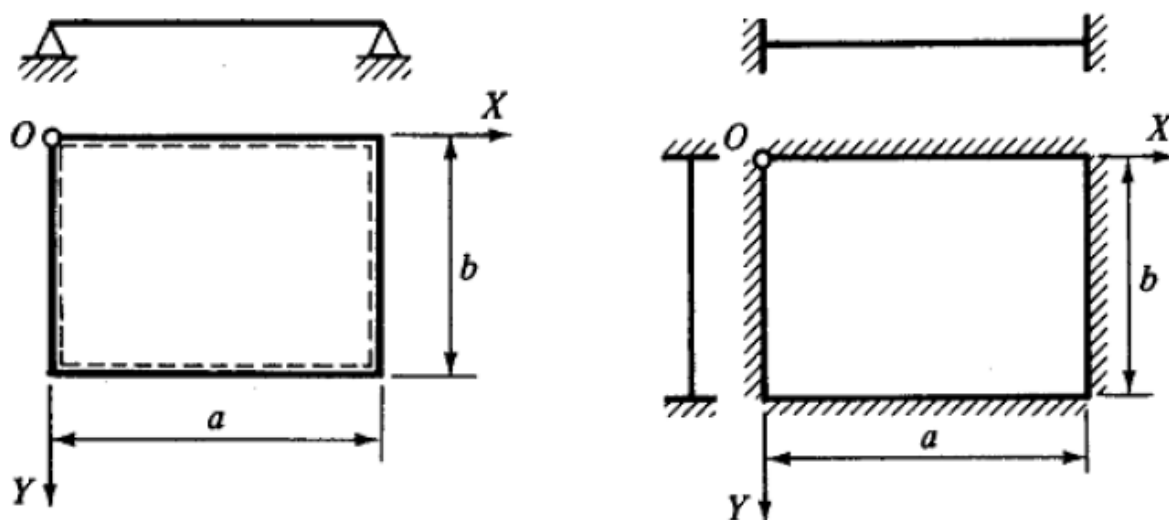


Figura 19 – Tipos de apoios: (a) apoio simples e (b) apoio engastado.

Para escudos de proteção individual, a fabricante Lexan Resin recomenda a montagem com uma vinculação simplesmente apoiada, pois este tipo de montagem impõe uma menor rigidez ao conjunto, permitindo à placa uma deformação maior antes da ruptura, absorvendo assim uma maior quantidade de energia. A Figura 20 apresenta o esquema de montagem recomendado pela Lexan Resin.

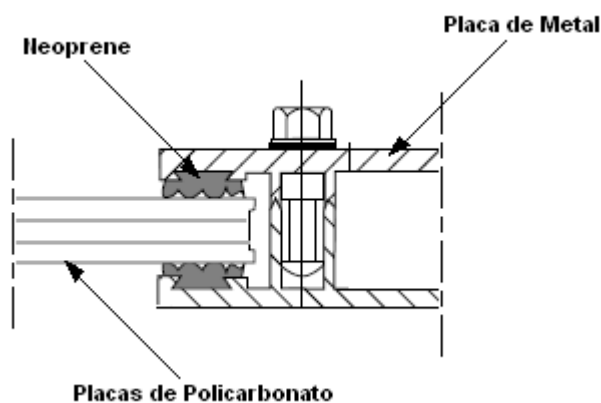


Figura 20 – Montagem da placa anti-projétil.  
Fonte: Lexan Resin Manual, 2008.

As lâminas de policarbonato utilizadas para o sistema anti-projétil são de um material isotrópico, e como é feita uma união das mesmas através do policarbonato, pode-se então tratar o problema da placa laminada de forma simplificada, considerando-se o seu comportamento estrutural como o de uma placa simples

isotrópica. Assim, o estudo em questão se resume ao caso de uma placa isotrópica com vinculação simplesmente apoiada nos seus quatro bordos.

A Figura 21 mostra o sistema de coordenada adotado para a resolução do problema. Como se trata de um material isotrópico, não há a necessidade de transformação de coordenadas do sistema global para o do material.

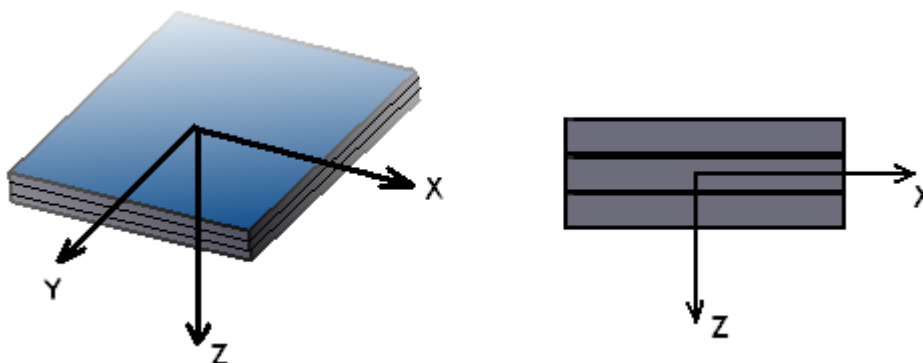


Figura 21 – Sistema de coordenada utilizador para a placa.

## 4.1 ANÁLISE ESTÁTICA EQUIVALENTE

### 4.1.1 Norma de Proteção Balística

As empresas fabricantes de materiais bélicos e de segurança seguem determinadas normas ou regulamentos de fabricação impostos pelos institutos regulatórios do governo. No Brasil, o Exército é a instituição responsável por tal regulamentação.

A norma vigente para proteções balísticas é a NEB/T E-316, do Exército Brasileiro, que recomenda seguir as prescrições da norma americana NIJ-0108.01, que determina as classes de blindagem conforme a Tabela 4.

**Tabela 4 – Nível de proteção do sistema de blindagem quanto ao impacto balístico.**

Fonte: Norma NEB/T E-316.

Nível	Munição	Massa do Projétil (g)	$V_0$ (m/s)	Número de Impactos
I	.22 LRHV Chumbo	$2,6 \pm 0,1$	$320 \pm 10$	5
	.38 Special RN Chumbo	$10,2 \pm 0,1$	$254 \pm 15$	5
II – A	9 FMJ	$8,0 \pm 0,1$	$332 \pm 12$	5
	357 Magnum JSP	$10,2 \pm 0,1$	$381 \pm 12$	5
II	9 FMJ	$8,0 \pm 0,1$	$358 \pm 15$	5
	357 Magnum JSP	$10,2 \pm 0,1$	$425 \pm 15$	5
III – A	9 FMJ	$8,0 \pm 0,1$	$426 \pm 15$	5
	.44 Magnum SWC GG	$15,6 \pm 0,1$	$426 \pm 15$	5
III	7.62X 51 FMJ (0.308 – Winchester)	$9,8 \pm 0,1$	$838 \pm 15$	5
IV	.30 – 06AP	$10,8 \pm 0,1$	$868 \pm 15$	1

Os ensaios realizados por Wéber (2004) utilizaram um nível de proteção I conforme a Tabela 4, com munição .38 *Special* RN Chumbo, o que determina os parâmetros para simulações e ensaios resumidos na Tabela 5.

**Tabela 5 – Parâmetros de simulação utilizados.**

Calibre (polegadas)	Massa do projétil (g)	Velocidade do projétil (m/s)	Energia cinética (J)
0.38	10,2	$259 \pm 15$	342



#### 4.1.2 Carregamento Estático Equivalente

Quando uma massa  $m$ , movendo-se a velocidade  $v_0$ , choca-se contra um determinado corpo qualquer se diz que este corpo sofreu um carregamento produzido por um impacto ou choque. Para poder determinar a força exercida pela massa  $m$  na superfície de choque, Beer e Johnston (1995) propõe algumas considerações:

1. Não ocorre dissipação de energia durante o impacto.
2. O corpo que se choca não deve ricochetear na estrutura e voltar, conservando parte da sua energia. Por sua vez, essa condição exige que a inércia da estrutura possa ser desprezada em face da inércia do corpo.

Levando-se em conta as duas condições, trabalha-se com um dimensionamento a favor da segurança, pois na prática nenhuma das condições é satisfeita plenamente, pois só uma parte da energia do corpo se transfere para a estrutura. Outra consideração é que o diagrama tensão-deformação obtido para um ensaio estático permanece válido para um carregamento de impacto.

A carga estática equivalente é determinada igualando-se o trabalho de deformação máximo da placa com a energia cinética do bloco antes do impacto, sendo que a energia cinética do projétil é dada por:

$$U_m = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad \text{Eq. 84}$$

e o trabalho de deformação por:

$$\bar{U}_m = \frac{1}{2} P_m w_m \quad \text{Eq. 85}$$

onde  $w_m$  é a flecha no ponto de impacto correspondente a carga estática  $P_m$ .

Para avaliar a flecha máxima de uma placa quadrada, simplesmente apoiada e sujeita a uma carga concentrada, Mendonça (2005) propõe a seguinte relação:

$$w_m = \frac{0,0116 P_m a^2}{D} \quad \text{Eq. 86}$$

onde  $a$  é a dimensão do lado da placa e  $D$  é a módulo de rigidez à flexão, dado pela seguinte expressão:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad \text{Eq. 87}$$

Rearranjando a Eq. 84 a Eq. 87 obtém-se a expressão para o cálculo da força estática equivalente provocada por um carregamento dinâmico, sendo dada por:

$$P_m = \frac{9,28v_0}{a} \sqrt{mD} \quad \text{Eq. 88}$$

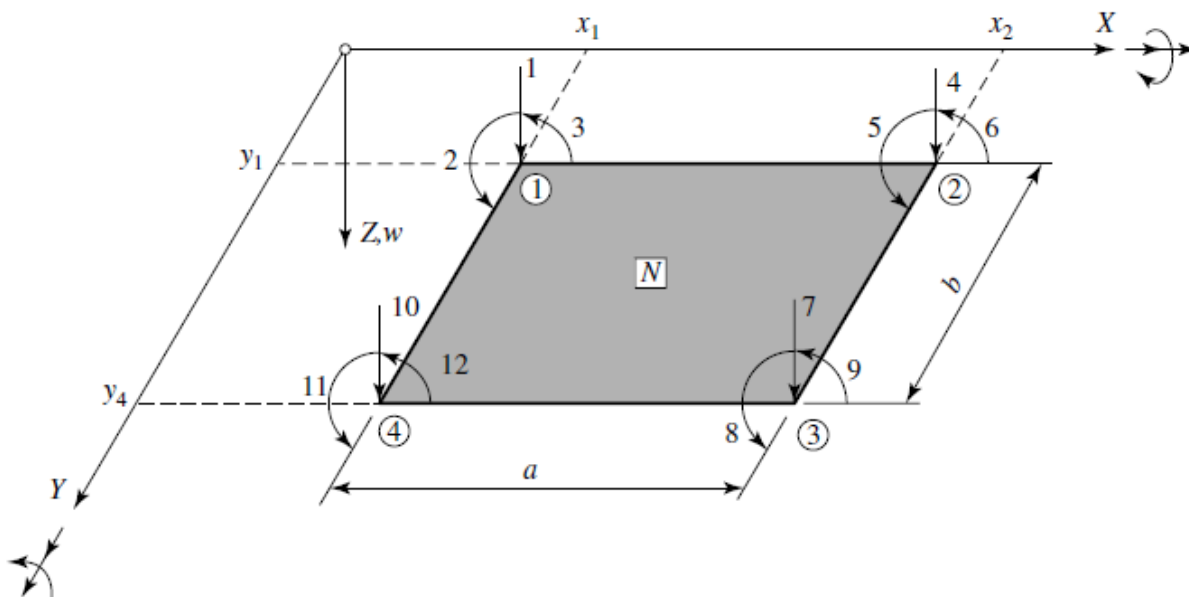
Substituindo-se os valores na Eq. 88, chega-se a uma carga estática equivalente de  $P_m = 14,33kN$ .

## 5 FORMULAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS

Para poder resolver qualquer problema de mecânica do contínuo através do MEF, os seguintes passos já comentados anteriormente são propostos por Szilard (2004):

1. Discretização do domínio;
2. Seleção das funções de forma;
3. Formulação do elemento;
4. Tratamento das condições de contorno e cargas;
5. Montagem global dos elementos discretizados;
6. Solução do sistema de equações algébricas para obtenção dos deslocamentos;
7. Avaliação das tensões resultantes.

Para a discretização do domínio da placa, será utilizado um elemento retangular simples de 4 nós, como pode ser visto na Figura 22. Este elemento apresenta um grau de continuidade  $C^{(0)}$ , e apesar de ser um elemento não conforme, a sua simplicidade tem proporcionado bons resultados práticos, conforme Szilard (2004). Este elemento é baseado na teoria clássica de placas de Kirchoff.



**Figura 22 – Elemento de placa retangular simples.**  
**Fonte: Szilard (2004).**

Para cada nó do elemento, tem-se um deslocamento vertical e duas rotações, podendo-se escrever o vetor deslocamento nodal:

$$d_i = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}_i \quad \text{para } i = 1, 2, 3, 4 \quad \text{Eq. 89}$$

Para a definição do campo de deslocamento, escolhe-se uma função polinomial com 12 coeficientes, pois cada nó do elemento contém três graus de liberdade, totalizando 12 graus de liberdade para o elemento. Os termos escolhidos para a função polinomial são obtidos através do triângulo de Pascal, apresentado na Figura 23, resultando um campo de deslocamento com os seguintes parâmetros:

$$w(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 = w^T \alpha \quad \text{Eq. 90}$$

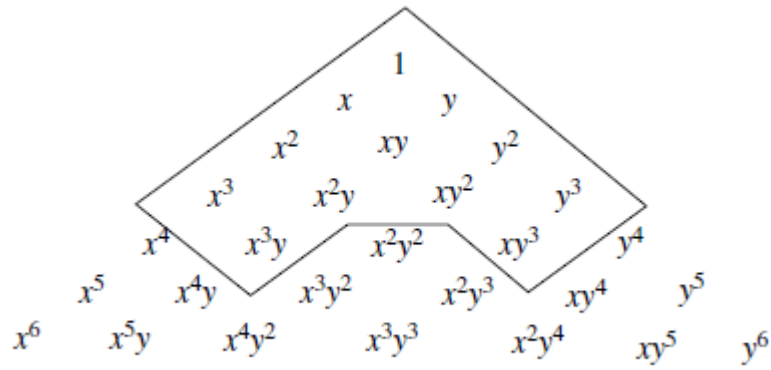


Figura 23 – Termos utilizados do triângulo de Pascal.  
Fonte: Szilard (2004).

A rotação em torno do eixo  $x$  para o nó  $i$  é obtida pela expressão:

$$(\theta_x)_i = \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_i = \alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y + \alpha_8 x^2 + 2\alpha_9 xy + 3\alpha_{10} y^2 + \alpha_{11} x^3 + 3\alpha_{12} xy^2 \quad \text{Eq. 91}$$

Da mesma forma, a rotação em torno do eixo  $y$  é obtida por:

$$(\theta_y)_i = \left( -\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i = -\alpha_2 - 2\alpha_4 x - \alpha_5 y - 3\alpha_7 x^2 - 2\alpha_8 xy - \alpha_9 y^2 - 3\alpha_{11} x^2 y - \alpha_{12} y^3 \quad \text{Eq. 92}$$

Para determinar os parâmetros desconhecidos  $\alpha_i$ , substitui-se as coordenadas nodais  $x_i$  e  $y_i$  na Eq. 90, Eq. 91 e Eq. 92, obtendo-se:

$$d_e = \left\{ w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3} \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4} \right\}^T \quad \text{Eq. 93}$$

$$= A \left\{ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \quad \alpha_7 \quad \alpha_8 \quad \alpha_9 \quad \alpha_{10} \quad \alpha_{11} \quad \alpha_{12} \right\}^T$$

onde a matriz  $A$  na sua forma explícita é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1^3 & x_1^2 y_1 & x_1 y_1^2 & y_1^3 & x_1^3 y_1 & x_1 y_1^3 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_1 & -y_1 & 0 & -3x_1^2 & -2x_1 y_1 & -y_1^2 & 0 & -3x_1^2 y_1 & -y_1^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 & 2y_1 & 0 & x_1^2 & 2x_1 y_1 & 3y_1^2 & x_1^3 & 3x_1 y_1^2 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & x_2^3 & x_2^2 y_2 & x_2 y_2^2 & y_2^3 & x_2^3 y_2 & x_2 y_2^3 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_2 & -y_2 & 0 & -3x_2^2 & -2x_2 y_2 & -y_2^2 & 0 & -3x_2^2 y_2 & -y_2^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 & 2y_2 & 0 & x_2^2 & 2x_2 y_2 & 3y_2^2 & x_2^3 & 3x_2 y_2^2 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & x_3^3 & x_3^2 y_3 & x_3 y_3^2 & y_3^3 & x_3^3 y_3 & x_3 y_3^3 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_3 & -y_3 & 0 & -3x_3^2 & -2x_3 y_3 & -y_3^2 & 0 & -3x_3^2 y_3 & -y_3^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 & 2y_3 & 0 & x_3^2 & 2x_3 y_3 & 3y_3^2 & x_3^3 & 3x_3 y_3^2 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4^3 & x_4^2 y_4 & x_4 y_4^2 & y_4^3 & x_4^3 y_4 & x_4 y_4^3 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_4 & -y_4 & 0 & -3x_4^2 & -2x_4 y_4 & -y_4^2 & 0 & -3x_4^2 y_4 & -y_4^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_4 & 2y_4 & 0 & x_4^2 & 2x_4 y_4 & 3y_4^2 & x_4^3 & 3x_4 y_4^2 \end{bmatrix}$$

Eq. 94

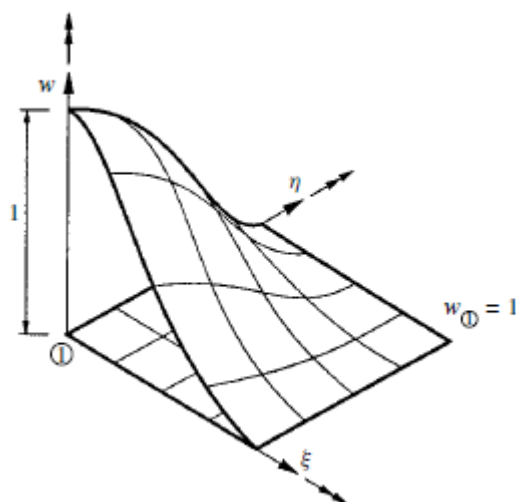
Os coeficientes  $\alpha_i$  são obtidos por:

$$\alpha = A^{-1}d_e \quad \text{Eq. 95}$$

sendo que as funções de interpolação podem então ser obtidas da seguinte maneira:

$$w(x, y) = w^T \alpha = w^T A^{-1}d_e = \{N\}^T d_e \quad \text{Eq. 96}$$

As funções de interpolação referentes à translação têm a propriedade de apresentarem um valor unitário no nó considerado e zero nos demais, conforme mostra a Figura 24.



**Figura 24 – Função de forma.**

**Fonte: Szilard (2004).**

Para se obter a matriz de rigidez elementar, deve-se resolver a seguinte integral:

$$K_e = \int_{\Omega_e} D^T \bar{E} D dA \quad \text{Eq. 97}$$

onde

$$D_i = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial^2 x} \\ -\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial^2 y} \\ -2\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 98}$$

e

$$\bar{E} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 99}$$

Substituindo-se a Eq. 98 e Eq. 99 na Eq. 97, obtém-se a seguinte expressão para o cálculo da matriz de rigidez elementar:

$$k_{ij} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \int_0^b \int_0^a \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial^2 x} \\ \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial^2 y} \\ 2\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial^2 x} \\ \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial^2 y} \\ 2\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} dx dy \quad \text{Eq. 100}$$

Szilard (2004) apresenta a integral da Eq. 99 resolvida no domínio de um elemento, gerando a seguinte matriz de rigidez para o elemento de placa retangular simples:



$$K_e = \frac{Eh}{180(1-\nu^2)}$$

$$\left[ \begin{array}{cccccccccccc} F & G & -H & L & -M & -N & O & -P & -Q & I & J & -K \\ & R & -Z & -M & T & \phi & P & U & \phi & -J & S & \phi \\ & & V & N & \phi & X & Q & \phi & Y & -K & \phi & W \\ & & & F & G & H & I & J & K & O & -P & Q \\ & & & & R & Z & -J & S & \phi & P & U & \phi \\ & & & & & V & K & \phi & W & -Q & \phi & Y \\ & & & & & & F & -G & H & L & M & N \\ & & & & & & & R & -Z & M & T & \phi \\ & & & & & & & & V & -N & \phi & X \\ & & & & & & & & & F & -G & -H \\ & & & & & & & & & & R & Z \\ & & & & & & & & & & & V \end{array} \right]$$

Eq. 101

sendo que os coeficientes valem:

$$\begin{aligned}
F &= \frac{(42-12\nu+60\rho^2+60\rho^{-2})h^2}{ab}, & Q &= \frac{[15\rho^{-1}-3(1-\nu)\rho]h^2}{a}, \\
G &= \frac{(30\rho+3\rho^{-1}+12\nu\rho^{-1})h^2}{b}, & R &= [20\rho+4(1-\nu)\rho^{-1}]h^2, \\
H &= \frac{(30\rho^{-1}+3\rho+12\nu\rho)h^2}{a}, & S &= [10\rho-(1-\nu)\rho^{-1}]h^2, \\
I &= \frac{(-42+12\nu-60\rho^2+30\rho^{-2})h^2}{ab}, & T &= [10\rho-4(1-\nu)\rho^{-1}]h^2, \\
J &= \frac{[30\rho+3(1-\nu^2)\rho^{-1}]h^2}{b}, & U &= [5\rho+(1-\nu)\rho^{-1}]h^2, \\
K &= \frac{(15\rho^{-1}-3\rho-12\nu\rho)h^2}{a}, & V &= [20\rho^{-1}+4(1-\nu)\rho]h^2, \\
L &= \frac{(-42+12\nu-60\rho^{-2}+30\rho^2)h^2}{ab}, & W &= [10\rho^{-1}-4(1-\nu)\rho]h^2, \\
M &= \frac{(-15\rho+3\rho^{-1}+12\nu\rho^{-1})h^2}{b}, & X &= [10\rho^{-1}-(1-\nu)\rho]h^2, \\
N &= \frac{[30\rho^{-1}+3(1-\nu)\rho]h^2}{a}, & Y &= [5\rho^{-1}+(1-\nu)\rho]h^2, \\
O &= \frac{[42-12\nu-30\rho^2-30\rho^{-2}]h^2}{ab}, & Z &= (15\nu h^2), \\
P &= \frac{[-15\rho+3(1-\nu)\rho^{-1}]h^2}{b}, & \phi &= 0, \\
\rho &= \frac{a}{b} & \rho^{-1} &= \frac{b}{a}
\end{aligned}
\tag{Eq. 102}$$

## 5.1 DESENVOLVIMENTO COMPUTACIONAL

Para a resolução do problema em elementos finitos e obtenção dos resultados, desenvolveu-se um programa computacional que resolvesse de forma sistemática os diversos passos da formulação proposta.

O desenvolvimento do programa foi baseado em um fluxograma, apresentado na Figura 25. Para a programação do código, foi utilizada a linguagem MatLab<sup>®</sup>, devido à sua simplicidade e facilidade de programação.

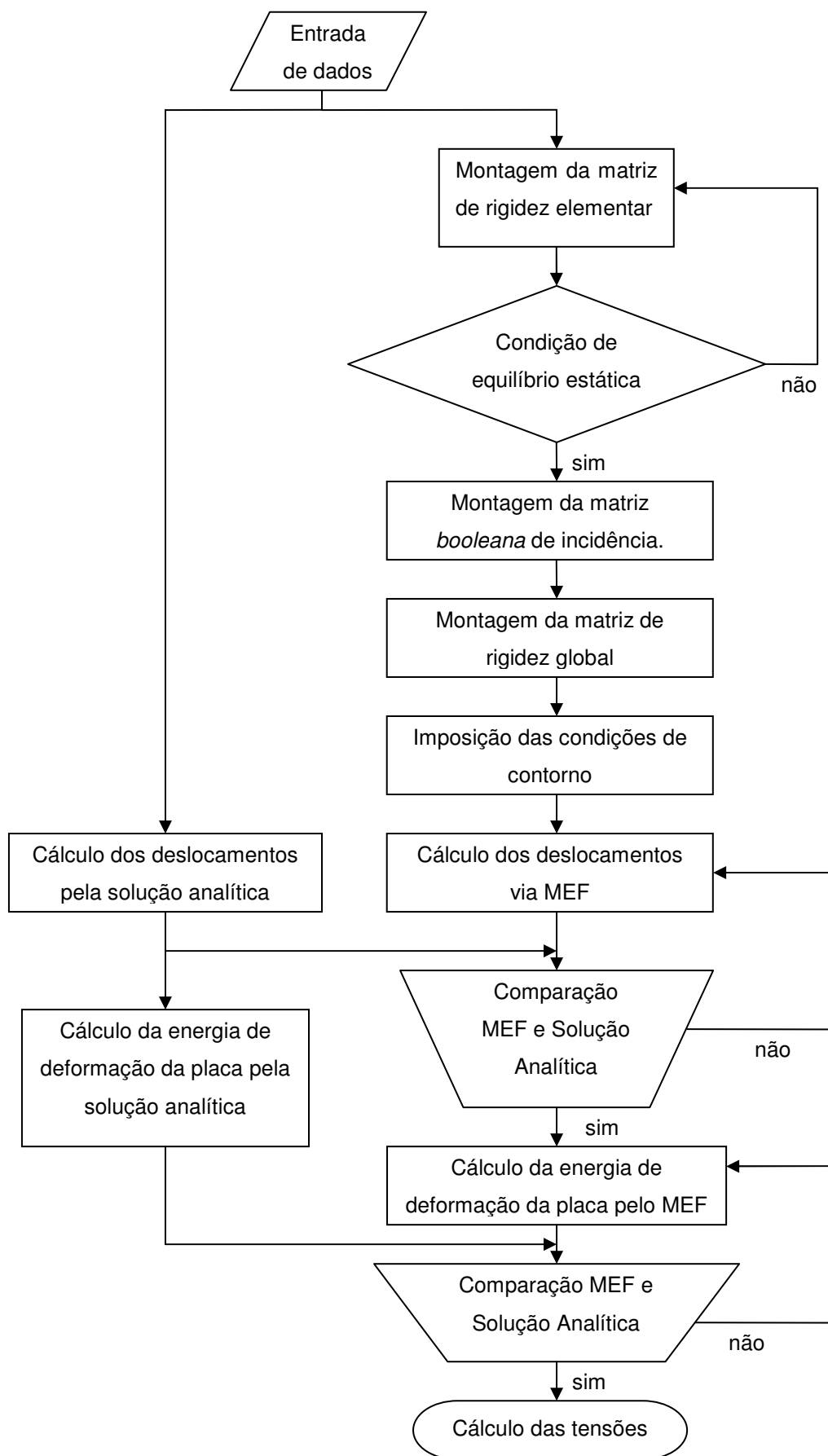


Figura 25 – Fluxograma para resolução do problema proposto.

A seguir são comentadas algumas das etapas mais importantes do fluxograma da Figura 25.

- **Entrada de dados:** são informados os dados relativos à quantidade de elementos, nós com condições de contorno e carga, dimensões da placa, incidência dos elementos, ou seja, o nó que cada elemento finito faz parte.
- **Montagem da matriz de rigidez elementar:** através da Eq. 101 e Eq. 102 são calculadas as matrizes de rigidez para cada elemento. Como no problema proposto a malha é formada por elementos quadrados de igual dimensão e propriedades, calcula-se apenas uma vez a matriz de rigidez elementar.
- **Condições de equilíbrio estático:** para verificar se o cálculo da matriz de rigidez elementar está correto, faz-se uma análise estática da mesma através do cálculo da resultante de forças na direção z, dos momentos na direção x e y, sendo que as resultantes devem ter o valor de zero, significando que a placa está em equilíbrio estático.
- **Montagem da matriz booleana de incidência:** esta matriz é uma forma de auxílio para a montagem da matriz de rigidez global. Contém o valor de 1 nas linhas e colunas onde a matriz elementar será acoplada na matriz global.
- **Montagem da matriz de rigidez global:** cada elemento já está com a dimensão da matriz de rigidez global através do auxílio da matriz de rigidez booleana, bastando-se para a montagem da matriz global realizar um somatório dos diversos elementos.
- **Imposição das condições de contorno:** para a resolução do sistema de equações, devem-se eliminar da matriz global as linhas e colunas correspondentes aos nós com condições de contorno impostas.
- **Cálculo dos deslocamentos via MEF e solução analítica:** o sistema de equações com a matriz global e o vetor de cargas é resolvido obtendo-se os deslocamentos nodais e as respectivas rotações na direção x e y. A solução analítica é calculada através de séries de Navier.
- **Comparação MEF e solução analítica:** os resultados calculados pelo MEF são comparados com os obtidos com a solução analítica e estimado o erro percentual para cada nó da malha.

- **Cálculo da energia de deformação para placa via MEF e solução Analítica:** com os deslocamentos calculados pode-se calcular a energia de deformação e compará-la com a energia cinética do projétil antes do impacto.
- **Comparação MEF e solução analítica:** agora é comparada a energia de deformação, estimando-se o erro da solução pelo MEF quando comparada com a solução analítica.
- **Cálculo das tensões:** com as incógnitas nodais já calculadas, procede-se ao cálculo das tensões, sendo que será calculada apenas a tensão para o elemento mais solicitado, que é aquele que apresenta o maior deslocamento da estrutura.

## 6 SIMULAÇÕES E RESULTADOS

### 6.1 DESLOCAMENTOS

O MEF é um método de solução aproximado, e para ter-se certeza da validade dos dados obtidos tem-se que avaliar a convergência do método. Para se testar a convergência, basicamente trabalha-se com o refino da malha e com a comparação com a solução analítica caso esta esteja disponível, como é o caso do problema proposto.

Para o problema em análise foram testadas três malhas e avaliado o erro, baseado na solução analítica para placas, obtida através de séries de Navier.

A primeira malha proposta para a obtenção dos deslocamentos é a divisão da placa em quatro partes iguais, como pode ser visto na Figura 26.

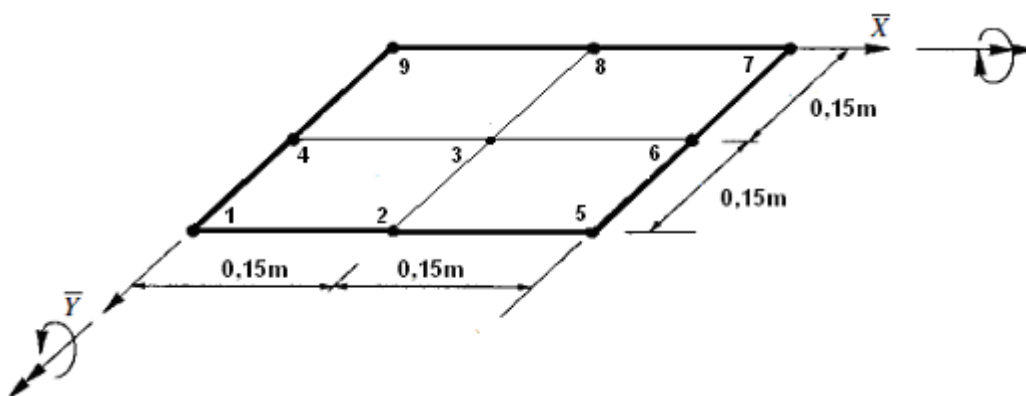


Figura 26 – Malha de 4 elementos.

Os resultados do deslocamento do nó central e da energia de deformação para a malha 2x2 podem ser vistos na Tabela 6 e Tabela 7, respectivamente.

Optou-se para o refinamento seguinte, uma malha 4x4, conforme a Figura 27. Os resultados do deslocamento do nó central e da energia de deformação para esta malha estão apresentados na Tabela 6 e Tabela 7.

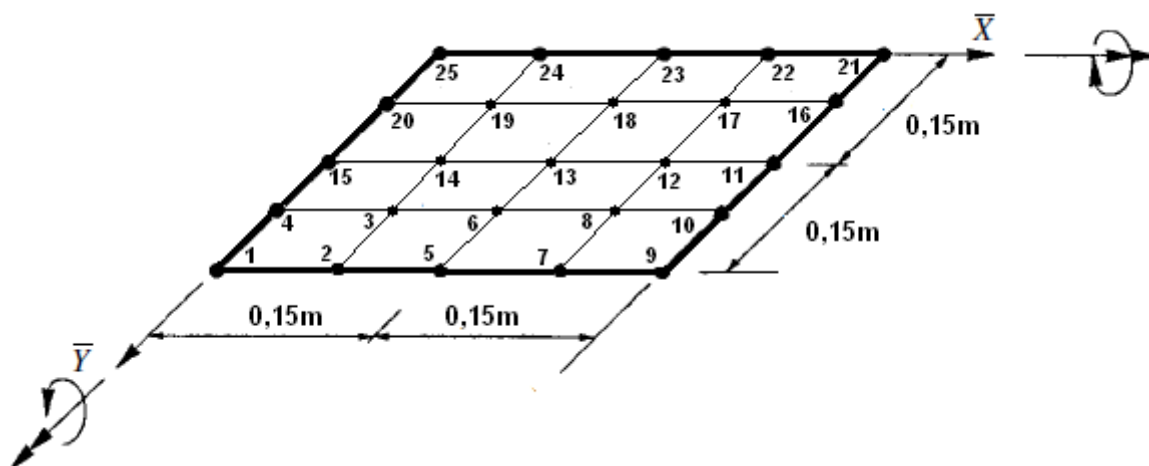


Figura 27 – Malha de 16 elementos.

Para tentar obter um erro ainda menor e avaliar a convergência do método, a última divisão proposta é uma malha 8x8. A Figura 28 é uma representação esquemática da malha de 64 elementos.

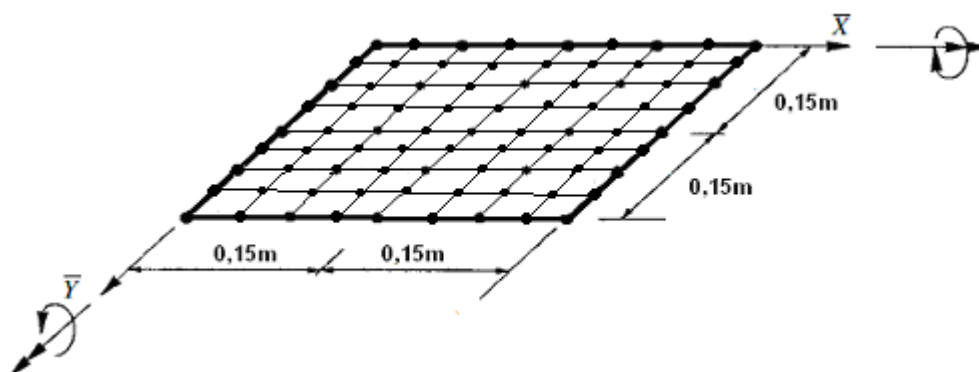


Figura 28 – Malha de 64 elementos.

Os resultados do deslocamento do nó central e da energia de deformação para a malha de 64 elementos também estão apresentados na Tabela 6 e Tabela 7.

**Tabela 6 – Deslocamento no nó central da placa.**

Malha	Solução via MEF (m)	Solução Analítica (m)	Erro Percentual (%)
2x2	0,05778	0,04773	21,05
4x4	0,05092		6,68
8x8	0,04872		2,09

A Tabela 7 apresenta o resultado para a energia de deformação da placa para as diversas malhas consideradas

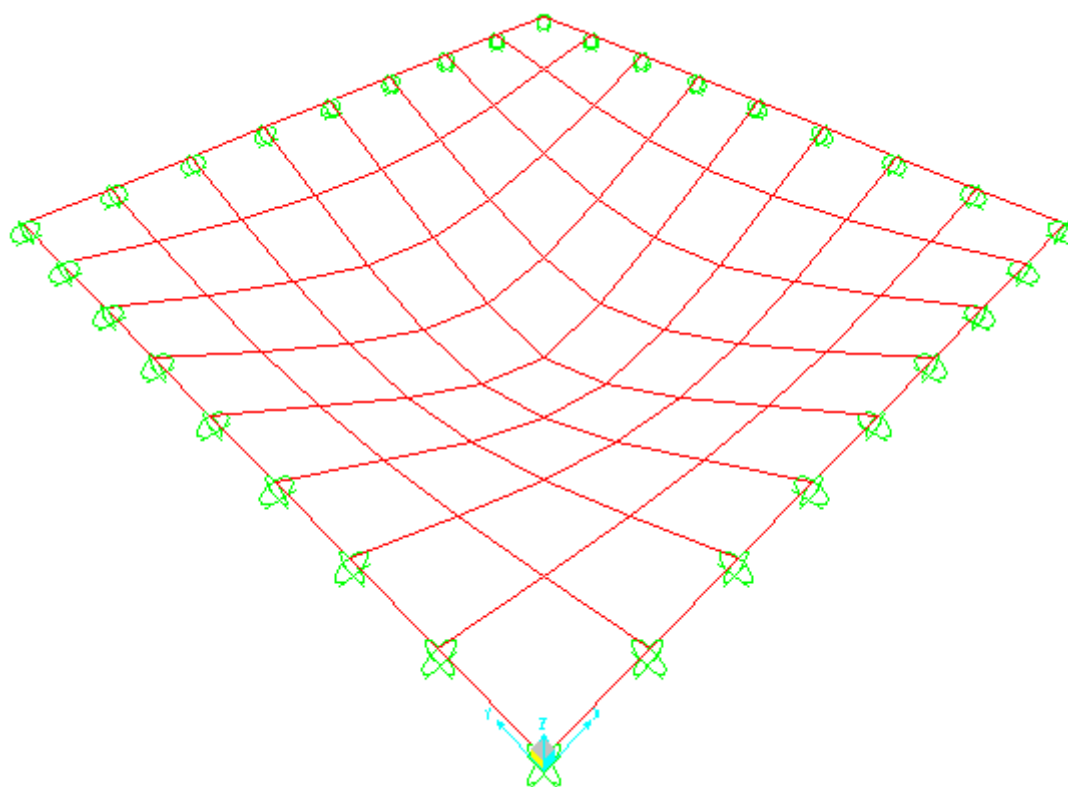
**Tabela 7 – Energia de deformação da placa.**

Malha	Solução via MEF (J)	Solução Analítica (J)	Erro Percentual (%)
2x2	414,04	341,97	21,07
4x4	364,83		6,68
8x8	349,09		2,08

Comparando-se, na Tabela 6 e Tabela 7, os resultados obtidos por elementos finitos com a solução analítica, percebe-se uma diminuição do erro a cada refinamento de malha proposto, indicando que o método proposto está convergindo para a solução analítica.

A Figura 29 apresenta a configuração deformada da placa sob o carregamento considerado.





(a) – Vista em perspectiva.



(b) - Vista Lateral

**Figura 29 – Campo de deslocamento para malha de 64 elementos.**

A Figura 30 apresenta a curva experimental de convergência proposta por Szilard (2004) e a obtida através das simulações realizadas. Analisando-se a Figura 30, o erro no deslocamento máximo quando comparado com a solução analítica fica abaixo dos 2% para malha com mais de 64 elementos, sendo que para uma malha de 144 elementos o erro é praticamente inexistente.

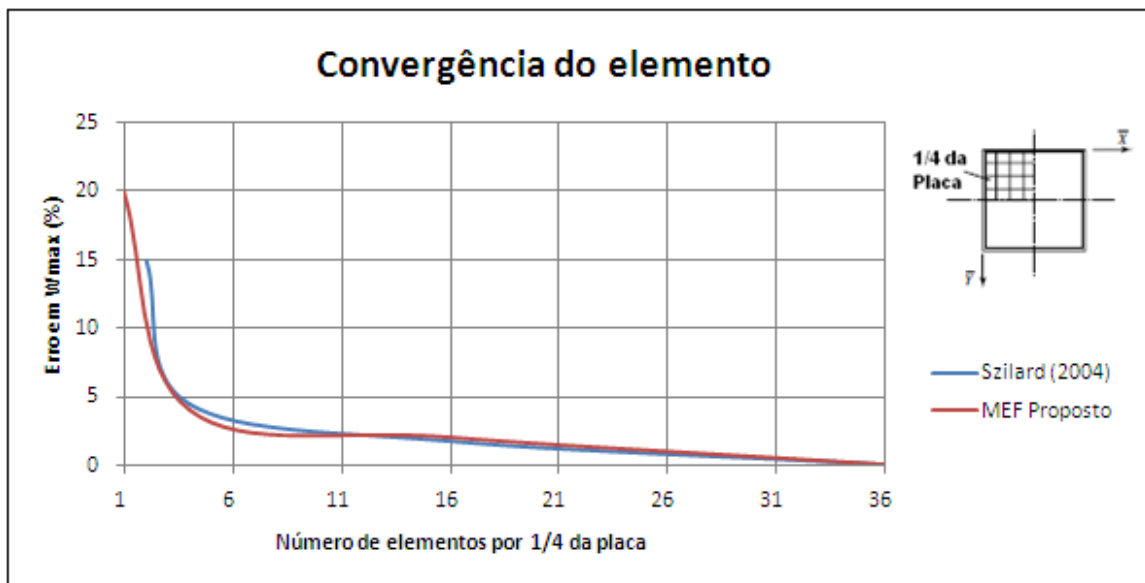


Figura 30 – Convergência do elemento de placa simples.

## 6.2 TENSÕES

A análise da placa sob o aspecto da resistência deve ser feita calculando-se as tensões originadas dos deslocamentos e a aplicação de um critério de resistência.

Seguindo-se a mesma sistemática utilizada para as deformações, de comparar o resultado do modelo de elemento finito proposto com outro modelo, optou-se por realizar a simulação da placa no programa comercial de elementos finitos SAP2000<sup>®</sup>.

O SAP2000<sup>®</sup> é atualmente um programa de elementos finitos de ampla comercialização, utilizado para calcular e projetar grandes obras. Permite realizar análise estática e dinâmica, linear e não-linear, além de proporcionar o dimensionamento das peças, sejam elas de aço, alumínio ou concreto. Devido a todas as características supracitadas o modelo da placa simulado no SAP200 servirá de base de comparação para as tensões

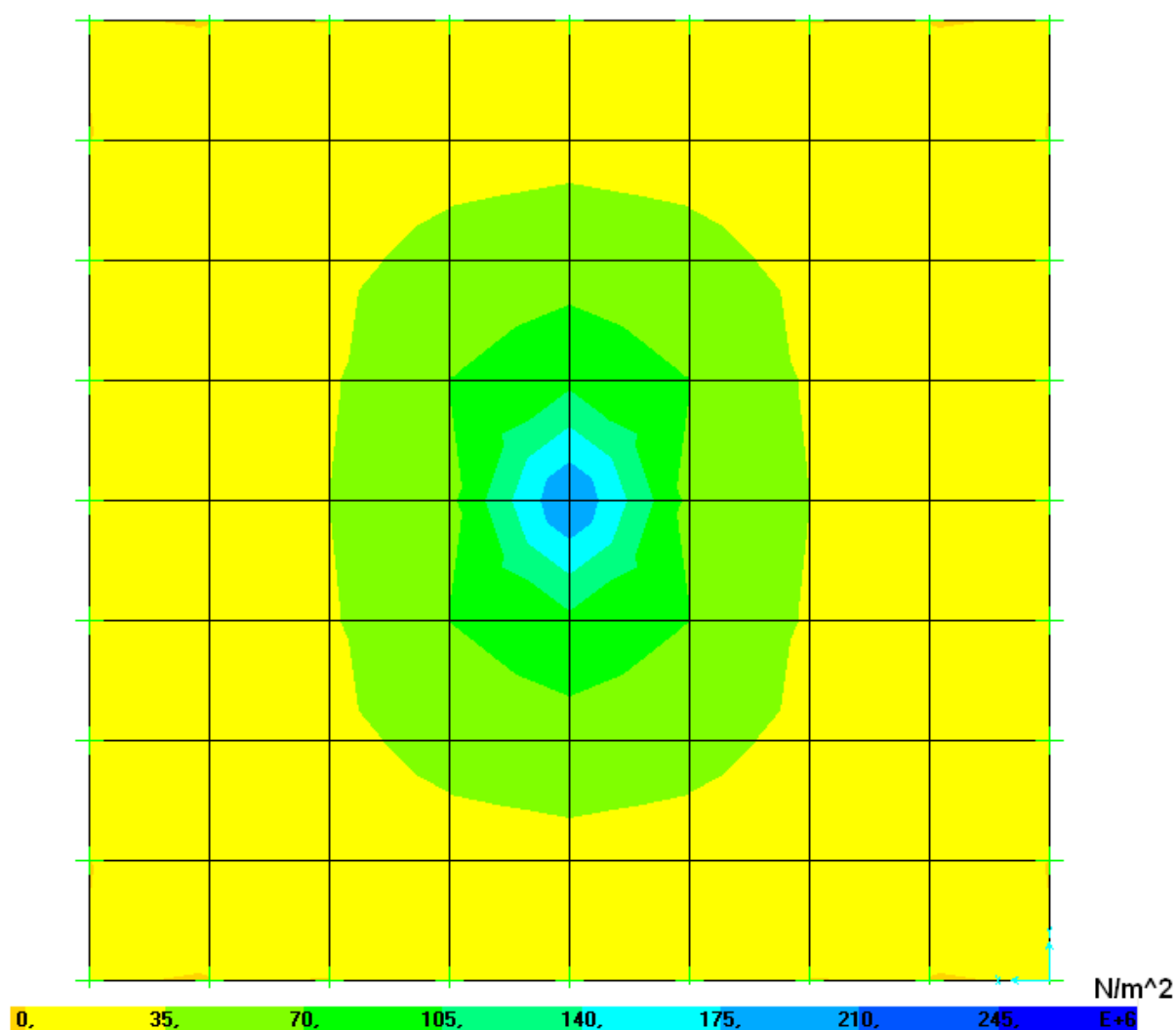
Assim como a deformação, a tensão varia de ponto para ponto na placa. Entretanto, no caso de uma placa quadrada com carga no nó central, este nó apresentará a maior deformação e conseqüentemente a maior tensão devido à flexão, não sendo necessária então a análise das tensões nos demais nós. A Tabela 8 apresenta a tensão no nó central da malha de 64 elementos, comparando o

modelo de MEF proposto com o do SAP2000<sup>®</sup>. Devido à simetria do problema, a tensão  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{yy}$  são iguais neste ponto sob análise.

**Tabela 8 – Tensões no nó central da malha 8x8.**

Tensão $\sigma_{xx}$ no modelo de MEF proposto (MPa)	Tensão $\sigma_{xx}$ no modelo de MEF do SAP2000 <sup>®</sup> (MPa)	Erro percentual (%)
225	245	-8,16

A Figura 31 apresenta a distribuição de tensões obtida através do SAP2000<sup>®</sup> para uma malha com 64 elementos, percebendo-se claramente que a região mais solicitada é a central, onde o carregamento foi considerado.



**Figura 31 – Tensões na placa com 64 elementos.**

Para se avaliar a integridade da placa sob o carregamento considerado, deve-se adotar um critério de resistência para ruptura. Segundo Beer e Johnston (1995), quando um corpo está submetido a um estado uniaxial de tensão (Figura 32a), pode-se estabelecer que o mesmo estará seguro enquanto a tensão uniaxial não atingir a tensão de escoamento ( $\sigma_{xx} < \sigma_e$ ). Entretanto, quando o corpo estiver submetido a um estado plano de tensões (Figura 32b), deve-se estabelecer algum critério que leve em conta o real mecanismo de ruptura do material.

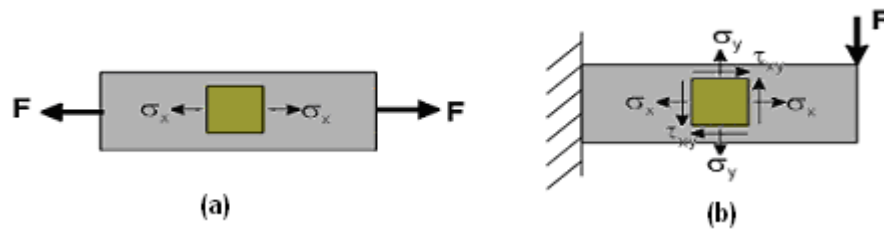


Figura 32 – Estado (a) uniaxial de tensões e (b) plano de tensões.

Um dos critérios de resistência mais utilizados para materiais dúcteis é o critério da máxima energia de distorção, ou critério de Von-Mises. Por este critério, um componente estrutural estará em condições de segurança enquanto o maior valor de energia de distorção por unidade de volume do material permanecer abaixo da energia de distorção por unidade de volume necessária para provocar o escoamento no corpo de prova de mesmo material submetido a ensaio de tração uniaxial (BEER e JOHNSTON, 1995).

O critério de Von-Mises para o EPT pode ser expresso pela seguinte equação:

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 < \sigma_e^2 \quad \text{Eq. 103}$$

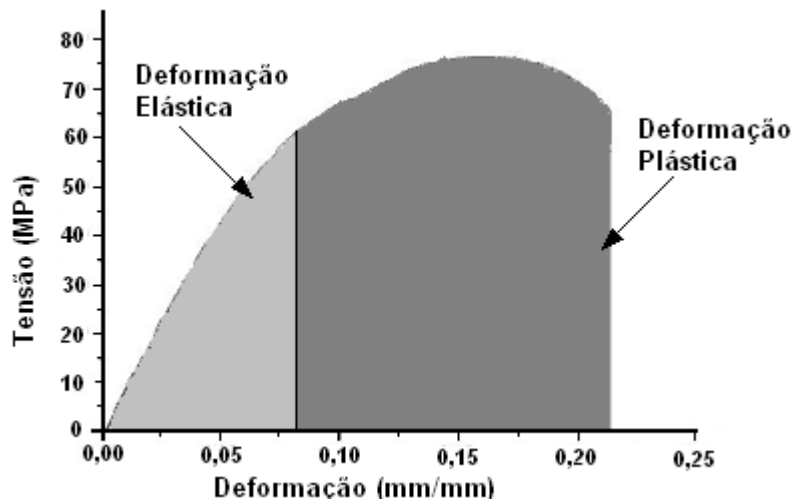
onde  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são as tensões principais do material e  $\sigma_e$  é a tensão de escoamento, cujos valores são  $\sigma_1 = 255MPa$ ,  $\sigma_2 = 235MPa$  e  $\sigma_e = 65MPa$ , resultando no seguinte coeficiente,  $VM = 0,07$ , dado pela Eq. 104,

$$VM = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} \quad \text{Eq. 104}$$

O coeficiente da Eq. 104 permite avaliar se o material está apto a suportar o carregamento imposto ( $VM \geq 1$ ) ou não ( $VM < 1$ ). Como se obteve um número menor que a unidade, há um indicativo que a placa não suportaria o carregamento impostos. Entretanto, algumas considerações devem ser feitas a respeito desta conclusão.

A modelagem em elementos finitos e o estudo com um todo foi baseado numa análise elástico-linear da placa, ou seja, considerando-se apenas a parte de deformação elástica e desconsiderando-se a parcela plástica.

A habilidade de um corpo em absorver energia até a sua fratura é medida através da sua tenacidade. Segundo Callister Jr. (2002), para uma situação estática a tenacidade pode ser determinada a partir de um ensaio tensão-deformação em tração. Ela corresponde a área sob a curva  $\sigma - \varepsilon$  até o ponto de fratura, sendo que a unidade de tenacidade é a energia por unidade de volume do material. A Figura 33 apresenta a curva  $\sigma - \varepsilon$  do material em estudo.



**Figura 33 – Curva tensão-deformação para o policarbonato.**  
Fonte: Weber (2004).

Na Figura 33 pode-se perceber que a parcela elástica corresponde à menor parte da energia de deformação da placa, sendo que a grande maioria é devido à

parcela plástica. Isto justifica o fato da análise realizada resultar em um coeficiente menor que a unidade na Eq. 104, pois apenas a menor parcela de energia de deformação foi considerada, ou seja, se considerarmos a deformação elástica e a plástica, a placa provavelmente irá resistir, como indica os estudos experimentais realizados por Weber (2004).

## **7 CONSIDERAÇÕES FINAIS**

### **7.1 CONCLUSÃO**

A base de conhecimentos necessários para o desenvolvimento das atividades foi estabelecida através da revisão bibliográfica, o que permitiu o prosseguimento das etapas seguintes. A revisão bibliográfica foi realizada de forma extensa e procurando priorizar as obras e autores de destaque no assunto, como Reddy (1997) e Mendonça (2005).

Durante a revisão bibliográfica abordou-se bastante o assunto de compósitos laminados. Entretanto, acabou-se simplificando o estudo para o caso de uma placa isotrópica, inclusive sob orientação da banca de Projeto Final 1, o que acabou facilitando a sequência do trabalho.

O desenvolvimento de um fluxograma para auxílio da montagem do código computacional foi de grande valia, pois a cada etapa testes intermediários puderam ser realizados, possibilitando assim a avaliação da veracidade dos dados computados.

O modelo de elemento finito proposto se mostrou eficaz, porém insuficiente. É eficaz, pois os dados convergiram e quando comparados com a solução analítica apresentaram um erro dentro do esperado. Entretanto, é um modelo insuficiente, pois realiza apenas uma análise elástico-linear da placa, quando para a completa modelagem do problema deveria realizar uma análise não-linear, considerando as deformações plásticas. Assim, devido às limitações do modelo proposto, não se pode afirmar que a placa suportará ou não o carregamento previsto.

### **7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS**

As limitações apresentadas pelo modelo proposto podem ser vistas como um incentivo pra trabalhos futuros, onde o modelo de elementos finitos deve ser aprimorado para realizar análises não-lineares e plásticas da estrutura.

Outro aspecto importante em uma pesquisa posterior é avaliar o modelo dinâmico da placa, levando-se em consideração o carregamento de impacto através

de uma integral Delta de Dirac e os efeitos decorrentes da vibração da mesma, comparando então o modelo estático completo (que leva em consideração as não-linearidade e as deformações plásticas) com o modelo dinâmico.



## REFERÊNCIAS

ÁLVARO JR, W. F.; SANTOS, M. A.; BASTIAN, F. L.; SUAREZ, J. C. M.; CARDOSO, A. L. V.; CHAVES, G. Q. **Comportamento sob impacto balístico de um sistema compósito para blindagem**, Revista Eletrônica de Materiais e Processos; Vol 01, N<sup>o</sup> 01, p. 12-18, 2006. Disponível em: [www.dema.ufcg.edu.br/revista](http://www.dema.ufcg.edu.br/revista).

BEER, Ferdinand Pierre; JOHNSTON JR., E. Russell. **Resistência dos materiais**. 3. ed. São Paulo, SP: Makron, c1995.

CALLISTER JR., William D. **Ciência e engenharia de materiais: uma introdução**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, c2002.

CANEVAROLO JR., Sebastião V. **Ciência dos polímeros: um texto básico para tecnólogos e engenheiros**. 2. ed. rev. e atual. São Paulo: Artliber, 2002

GUIMARÃES, Walisson R. S., **Método dos Elementos Finitos com continuidade C<sup>1</sup> aplicados a placas de Kirchhoff**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. PUC-MG, Belo Horizonte, 2006.

Lexan Resin Manual. **Manual Técnico**. General Electric Structured Products, Pittsfield, 2008. 35 p.

MANO, Eloisa Biasotto. **Introdução aos polímeros**. 5.reimpr. São Paulo: Edgard Blucher, 1994.

MENDONÇA, Paulo de Tarso R. **Materiais compostos e estruturas-sanduíche: projeto e análise**. 1. ed. Barueri: Manole, 2005.

Norma do Exército Brasileiro. **Proteção balística de carros de passeio**. NEB/T E-316. Rio de Janeiro, 2002. 6 p.

Norma do National Institute of Justice. **Ballistic Resistant Protective Materials**. NIJ-0108.01. Department of Justice of the USA. 1985.

PEREIRA, José Carlos. **Curso de projeto estrutural com materiais compostos**. Apostila do curso de Engenharia Mecânica. Florianópolis: UFSC, 2003.

REDDY, J. N. **Finite element analysis of composite laminates**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992.

REDDY, J. N. ***Mechanics of laminated composite plates: Theory and analysis***. CRC PRESS, Boca Raton, 1997.

SHACKELFORD, James F. **Ciência dos materiais**. 6. ed. São Paulo: Pearson, 2008

SZILARD, Rudolph. ***Theories and applications of plate analysis: classical, numerical, and engineering methods***. John Wiley & Sons, New Jersey, 2004.

WEBER, Ricardo Pondé. **Comportamento mecânico e balístico de um compósito laminado de policarbonato**. Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Ciência dos Materiais. Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 2004.

