

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

DIRCT / DIRGRAD / DECEN

CURSO DE ENGENHARIA INDUSTRIAL MECÂNICA

DISCIPLINA PROJETO FINAL II

GUSTAVO VON ZESKA DE FRANÇA

**APLICAÇÃO DO MODELO DE KRIGING NA OTIMIZAÇÃO DE
ESTRUTURAS DE MATERIAIS COMPOSTOS LAMINADOS**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CURITIBA

2011

GUSTAVO VON ZESKA DE FRANÇA

**APLICAÇÃO DO MODELO DE KRIGING NA OTIMIZAÇÃO DE
ESTRUTURAS DE MATERIAIS COMPOSTOS LAMINADOS**

Monografia do Projeto de Pesquisa apresentada à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2 do curso de Engenharia Industrial Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial para aprovação na disciplina.

Orientador: Prof. Marco Antônio Luersen, Dr. Eng.

CURITIBA

2011

TERMO DE APROVAÇÃO

Por meio deste termo, aprovamos a monografia do Projeto de Pesquisa "Aplicação do Modelo de Kriging na Otimização de Estruturas de Materiais Compostos Laminados", realizado pelo aluno Gustavo von Zeska de França, como requisito parcial para aprovação na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2, do curso de Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Prof. Marco Antônio Luersen, Dr. Eng.
Departamento Acadêmico de Mecânica, UTFPR
Orientador

Prof. Ivan Moura Belo, Dr. Eng.
Departamento Acadêmico de Mecânica, UTFPR
Avaliador

Prof. Ana Paula Carvalho da Silva Ferreira, Dr. Eng.
Departamento Acadêmico de Mecânica, UTFPR
Avaliador

Curitiba, 12 de dezembro de 2011.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a minha família que sempre me apoiou ao longo do curso, assim como, durante a realização deste trabalho de conclusão de curso. Também gostaria de agradecer a meus amigos que me deram muita força nestes meses de realização do projeto.

Também gostaria de agradecer ao meu orientador Prof. Marco Antônio Luersen, que além de me auxiliar na realização desta monografia, também me orientou em minha iniciação científica. Sendo ele o responsável pela afinidade que tenho hoje tanto com a área de pesquisa quanto com a análise estrutural por meio de elementos finitos.

E por fim aos alunos de iniciação científica do LaMEs, Elvis Bertoti e Pedro Gabriel de Moura Prestes, pelo auxílio prestado no desenvolvimento da rotina de integração entre o MATLAB e o ANSYS, e no entendimento deste último programa.

“O homem é a medida de todas as coisas”

Protágoras

RESUMO

FRANÇA, Gustavo von Zeska de, Aplicação do modelo de Kriging na otimização de estruturas de materiais compostos laminados. 2011. 81 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Projeto Final II) – Engenharia Industrial Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2011.

Modelos reduzidos (também chamados de modelos substitutos ou metamodelos) são aproximações matemáticas utilizadas para substituir modelos mais detalhados, com o intuito de reduzir o tempo computacional, quando inúmeras análises são necessárias. Os modelos reduzidos são obtidos a partir de funções matemáticas de aproximação e de modelos detalhados previamente calculados. Tais modelos são bastante úteis na otimização de peças e estruturas, visto que, neste caso, é necessário analisar a resposta estrutural do sistema inúmeras vezes, cada uma delas com diferentes configurações para as variáveis de projeto. No presente trabalho uma versão do modelo de Kriging (MK) foi implementada em Matlab. Alguns parâmetros que regem a aproximação foram analisados, a fim de saber as suas influências sobre o modelo reduzido resultante. O modelo de Kriging foi então utilizado para calcular a resposta estrutural de placas retangulares de materiais compostos laminados onde a resposta exata é dada por equações analíticas obtidas através da Teoria Clássica dos Laminados (TCL). As primeiras análises foram realizadas para verificar a aproximação do critério de falha de Tsai-Wu e da carga crítica de flambagem. Os resultados obtidos foram bastante consistentes e demonstram que o modelo de Kriging pode ser utilizado na aproximação do comportamento de materiais compostos laminados. Em seguida, o método de otimização dos Algoritmos Genéticos (AG) foi aliado ao modelo de Kriging com o intuito de se otimizar a sequência de empilhamento de lâminas de material composto de forma a minimizar as possibilidades de falha em relação ao critério de Tsai-Wu e à flambagem. Os resultados obtidos nesses casos demonstraram uma boa convergência das respostas para o ponto ótimo. Em seguida o método foi aliado a um programa comercial de elementos finitos de forma a calcular a resposta estrutural através deste e se poder analisar geometrias mais complexas. Foram comparados os resultados de problemas de otimização com e sem a utilização do modelo de Kriging e constatou-se que com o MK pode-se reduzir significativamente o tempo computacional.

Palavras-chave: Otimização, Modelo de Kriging, Materiais Compostos Laminados, Algoritmos Genéticos.

ABSTRACT

FRANÇA, Gustavo von Zeska de, Kriging model applied to composite material structures optimization. 2011. 81 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Projeto Final II) – Engenharia Industrial Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2011.

Surrogate models (or metamodels) are mathematical approximations used to replace more detailed models, in order to reduce the computational time when many evaluations are necessary. They are obtained from mathematical approximation functions and detailed models previously calculated. Surrogate models are very useful in the optimization process of parts and structures, because in this case it is necessary to analyze the structural response of the system several times, each one with different values for the design variables. In this work, a Kriging model (KM) version was implemented in Matlab. Some parameters that govern the approximation were analyzed, in order to verify their influence on the surrogate model. Then, the Kriging model was applied to estimate the structural response of rectangular plates of laminated composite materials in which the exact response is given by the Classical Lamination Theory (CLT). The first analyses were made to check the approximation of the Tsai-Wu failure criterion and the buckling criterion. The obtained results were very consistent and they show that the Kriging model can be used to approximate the behavior of laminated composite materials. Next, the Genetic Algorithm (GA) optimization method was combined to the Kriging model to find the lay-up sequence of laminated composites aiming to minimize the possibilities of failure according to Tsai-Wu failure criterion and buckling. The results obtained in this cases showed a good convergence of the response to the optimal point. However, the computational time was lower only in the cases with a large number of design variables. Then, a commercial finite element, used to calculate the structural response, was associated with the Kriging model in order to optimize more complex geometries. The results from optimization problems using and not using de Kriging model were compared and it was verified that a significant computational time can be saved in the first case.

Key-Words: Optimization, Kriging Model, Laminated Composite Materials, Genetic Algorithms.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Fluxograma do modelo de aproximação combinado com o método de otimização.	17
Figura 2 – Exemplo de aproximação de um modelo.	21
Figura 3 – Tipos de materiais compostos (Adaptada de VAN BOGGELEN (2006)).	24
Figura 4 – Sistema de referência de uma lâmina de material composto.	25
Figura 5 – Orientação do ângulo de rotação da lâmina.	25
Figura 6 – Representação do laminado e das forças atuantes (FERNANDES, 2009)	31
Figura 7 – Fluxograma do funcionamento do AG.	33
Figura 8 – Representação da operação de cruzamento.	34
Figura 9 – Representação da operação de permutação.	34
Figura 10 – Representação da operação de <i>gene-swap</i> .	35
Figura 11 – Representação da mutação.	35
Figura 12 – Comparação entre a forma distribuição dos pontos experimentais: (a) LHC e (b) Randômico.	39
Figura 13 – Aproximações para diferentes números de experimentos da função representada na equação 15.	40
Figura 14 – Aproximações da função da equação (31) para diferentes números de experimentos.	41
Figura 15 – Aproximações para diferentes valores de θ .	42
Figura 16 – Aproximação para um valor de θ muito baixo.	43
Figura 17 – Comparação entre o modelo de Kriging e a Superfície de Resposta.	44
Figura 18 – Fluxograma para obtenção do modelo de Kriging.	45
Figura 19 – Fluxograma do MK conjugado ao AG	46
Figura 20 – Fluxograma da ligação entre o AG e o MEF.	47

Figura 21 – Fluxograma da ligação entre o Modelo de Kriging (MK) e a análise por elementos finitos (MEF).	48
Figura 22 – Gráfico da função representada na equação (34).	50
Figura 23 – (a) Resultado da aproximação pelo modelo de Kriging e (b) subtração da aproximação com a função real.	50
Figura 24 – Gráfico da função representada na equação (35).	51
Figura 25 – (a) Resultado da aproximação pelo modelo de Kriging e (b) subtração da aproximação com a função real.	52
Figura 26 – Gráfico da função representada na equação (36).	52
Figura 27 – (a) Resultado da aproximação pelo modelo de Kriging e (b) subtração da aproximação com a função real.	53
Figura 28 – Gráfico da função representada na equação (37).	54
Figura 29 – (a) Resultado da aproximação pelo modelo de Kriging e (b) subtração da aproximação com a função real.	54
Figura 30 – (a) Representação do critério de falha de Tsai-Wu e (b) carga crítica de flambagem, em função dos ângulos de orientação das lâminas.	56
Figura 31 – Representação do carregamento.	62
Figura 32 – Representação dos carregamentos para análise de flambagem.	66
Figura 33 – Condições de contorno e elementos utilizados no MEF.	70
Figura 34 – Condições de contorno e malha utilizados no MEF.	72
Figura 35 – Malha de elementos finitos da placa a ser otimizada.	75
Figura 36 – Modo de vibração fundamental correspondente à solução ótima obtida pelo AG.	77
Figura 37 – Representação do elemento <i>shell99</i> (retirado do manual do ANSYS).	81

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros utilizados na aproximação linear da equação (34).....	50
Tabela 2 – Parâmetros utilizados na aproximação linear da equação (35).....	51
Tabela 3 – Parâmetros utilizados na aproximação linear da equação (36).....	53
Tabela 4 – Parâmetros utilizados na aproximação linear da equação (37).....	54
Tabela 5 – Dados utilizados no cálculo da aproximação para materiais compostos laminados.....	55
Tabela 6 – Características mecânicas da lâmina.....	56
Tabela 7 – Resultados da aproximação para o critério de Tsai-Wu.....	58
Tabela 8 – Resultados da aproximação para a carga crítica de flambagem.....	59
Tabela 9 – Propriedades elásticas e densidade do material.....	60
Tabela 10 – Propriedades de falha do material.....	60
Tabela 11 – Parâmetros do AG.....	61
Tabela 12 – Número de soluções para cada problema.....	61
Tabela 13 – Soluções obtidas pelo AG para otimização do critério de falha de Tsai-Wu.....	63
Tabela 14 – Soluções obtidas para o critério de Tsai-Wu pelo MK com função de base do tipo 2.....	63
Tabela 15 – Soluções obtidas para o critério de Tsai-Wu pelo MK com função de base do tipo 4.....	64
Tabela 16 – Erro relativo da aproximação pelo MK com função de base do tipo 2...64	
Tabela 17 – Erro relativo da aproximação pelo MK com função de base do tipo 4...65	
Tabela 18 – Comparação do valor ótimo do critério de falha de Tsai-Wu obtido.....	65
Tabela 19 – Soluções obtidas pelo AG para o critério de flambagem.....	67
Tabela 20 – Soluções obtidas pelo MK para o critério de flambagem com função de base do tipo 2.....	67

Tabela 21 – Soluções obtidas pelo MK para o critério de flambagem com função de base do tipo 4.....	68
Tabela 22 – Erro relativo da aproximação pelo MK com função de base do tipo 2...68	
Tabela 23 – Erro relativo da aproximação pelo MK com função de base do tipo 4...69	
Tabela 24 – Comparação do valor ótimo do λ_{cr} obtido.	69
Tabela 25 – Soluções obtidas pelo AG para o critério de Tsai-Wu.	70
Tabela 26 – Soluções obtidas pelo MK com função de base do tipo 2.	71
Tabela 27 – Valor obtido para o critério de falha.....	72
Tabela 28 – Soluções obtidas pelo AG.	73
Tabela 29 – Soluções obtidas pelo MK com função de base do tipo 2.	73
Tabela 30 – Comparação do valor obtido para o λ_{cr}	74
Tabela 31 – Resultados obtidos pelo MK.....	76
Tabela 32 – Comparação entre o AG e o MK+AG.	76

LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E ACRÔNIMOS

AG: Algoritmos Genéticos

LHC: Latin hypercube (tradução livre: Hipercubo latino)

MEF: Método dos Elementos Finitos

MK: Modelo de Kriging

SR: Superfície de Resposta

TCL: Teoria Clássica dos Laminados

LISTA DE SÍMBOLOS

[A] – Matriz da função de base

[C] – Matriz constitutiva do laminado

[D] – Matriz de rigidez de flexão do material composto laminado

[R] – Matriz de correlação

[T] – Matriz de translação da lâmina

d – Distância entre os pontos experimentais

E – Módulo de Young

$f(\mathbf{x})$ – Função global

$f_b(\mathbf{x})$ – Função de base

G – Módulo de cisalhamento

h_k – Distância da lâmina em relação ao plano médio.

k – Número de experimentos

l_p – Comprimento da placa

m – Modo de vibrar associado ao eixo x

n – Número de variáveis

N_x, N_y – Forças atuantes no laminado nas direções x e y

r – Modo de vibrar associado ao eixo y

$r^T(\bar{x})$ – Correlação entre ponto de interesse e pontos experimentais

$\mathbf{R}(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j)$ – Função de correlação espacial

S_{Lt} – Resistência à tração da lâmina na direção da fibra

S_{Lc} – Resistência à compressão da lâmina na direção da fibra

S_{Tt} – Resistência à tração da lâmina na direção perpendicular à fibra

S_{Tc} – Resistência à compressão da lâmina na direção perpendicular à fibra

S_{LT} – Resistência da lâmina ao cisalhamento

w_p – Largura da placa

\mathbf{x} – Valores utilizados na aproximação

$\bar{\mathbf{x}}$ – Ponto de interesse

\mathbf{y} – Vetor da resposta em função de \mathbf{x}

$y(\bar{\mathbf{x}})$ – Resposta da aproximação

$z(\mathbf{x})$ – Termo referente ao erro

α – Variável para representar ângulos

$\boldsymbol{\beta}$ – Vetor dos coeficientes da função de base

σ_L – Tensão normal na lâmina na direção longitudinal às fibras

σ_T – Tensão normal na lâmina na direção transversal às fibras

τ_{LT} – Tensão normal de cisalhamento na lâmina

σ^2 – Variância

θ – Fator de correlação

λ_{cr} – Fator crítico de flambagem

τ – Tensão de cisalhamento na lâmina

ν – Coeficiente de Poisson

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Tema	16
1.2	Problema	16
1.3	Objetivos	17
1.4	Justificativa	17
1.5	Conteúdo do trabalho	18
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	20
2.1	O modelo de Kriging e sua aplicabilidade	20
2.1.1	Formulação matemática do modelo de Kriging	21
2.2	Materiais Compostos	23
2.2.1	Materiais Compostos Laminados	24
2.2.2	Equações Constitutivas para Materiais Compostos Laminados	26
2.2.3	Critérios de falha e Critério de Flambagem	29
2.3	Otimização	31
2.3.1	Algoritmos Genéticos	32
2.3.2	Otimização em Materiais Compostos Laminados	35
3	ANÁLISE DOS PRINCIPAIS PARÂMETROS DO MODELO DE KRIGING	37
3.1	Funções de base – $f_b(x)$	37
3.2	Análise da influência do número de experimentos - k	38
3.2.1	Avaliação do número de experimentos em uma função de uma variável	40
3.2.2	Avaliação do número de experimentos em uma função de duas variáveis	40
3.3	Análise da influência do fator de correlação - θ	42
3.4	Comparação entre o modelo de Kriging e Superfície de Resposta	43
4	UNIÃO ENTRE MODELO DE KRIGING E ALGORITMOS GENÉTICOS	45
4.1	Modelo de Kriging conjugado com Algoritmos Genéticos	45
4.2	Procedimento de Otimização utilizando o Método dos Elementos Finitos	47
4.3	Procedimento de Otimização utilizando o Modelo de Kriging e o Método dos Elementos Finitos	48
5	RESULTADOS E DISCUSSÃO	49
5.1	Modelagem de funções matemáticas	49
5.2	Modelagem do critério de falha e flambagem em materiais compostos	55
5.3	Otimização de Materiais Compostos Laminados utilizando o Modelo de Kriging combinado com AG	60
5.4	Otimização utilizando interface com o MEF	70
5.5	Otimização de problema sem solução analítica	74
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	78
	REFERÊNCIAS	79
	ANEXO A – CARACTERÍSTICAS DO ELEMENTO FINITO UTILIZADO	81

1 INTRODUÇÃO

1.1 Tema

O tema do trabalho é a aplicação do modelo de Kriging (MK) para a aproximação da resposta estrutural de componentes mecânicos, mais especificamente de estruturas de material composto laminado. Depois de gerado o modelo de Kriging, este é utilizado no processo de otimização de tais estruturas, de forma a reduzir o tempo computacional para obtenção da solução final.

1.2 Problema

A otimização estrutural de determinado componente por diversas vezes é desejada, de forma a reduzir a massa deste, mantendo a resistência mecânica. Ou ainda, pode ser de grande importância aumentar a resistência mecânica, tornando a estrutura menos suscetível à falhas. Os materiais compostos laminados são exemplos de materiais que são comumente otimizados.

Duas características marcantes estão presentes nestes materiais. A primeira delas é a elevada resistência mecânica, quando comparada com sua densidade. E a outra característica é a forte dependência das propriedades em relação à orientação das fibras. Esta última característica propicia aos materiais compostos uma grande versatilidade, sendo possível otimizar tanto a geometria quanto a orientação destas lâminas que o compõem.

Com isso, diversos métodos de otimização têm sido aplicados a esses materiais ao longo dos últimos anos, de forma a se obter uma configuração de empilhamento ótima para determinado carregamento e geometria. Além disso, a utilização desses materiais está em ascensão nas últimas décadas, em grande parte devido à variedade de propriedades que podem ser obtidas com a sua aplicação.

Dentre os diversos algoritmos de otimização existentes e que são aplicados aos materiais compostos, estão os Algoritmos Genéticos (AG). Os AG são baseados em metaheurísticas, que podem realizar a busca pelo ótimo global em problemas de variáveis discretas, como é o caso dos materiais compostos laminados. Entretanto,

tais algoritmos normalmente são lentos, visto que necessitam calcular a função objetivo inúmeras vezes, sendo ela dada normalmente pelo cálculo de um modelo detalhado.

1.3 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é a implementação do modelo de Kriging, em ambiente Matlab, para a aproximação de problemas da mecânica dos materiais compostos laminados. Em seguida, aplicar este modelo, em combinação com os Algoritmos Genéticos (AG), na otimização de estruturas complexas, de forma a se reduzir o tempo de otimização. O fluxograma da Figura 1 apresenta os passos a serem seguidos em um processo de otimização utilizando o modelo de Kriging.

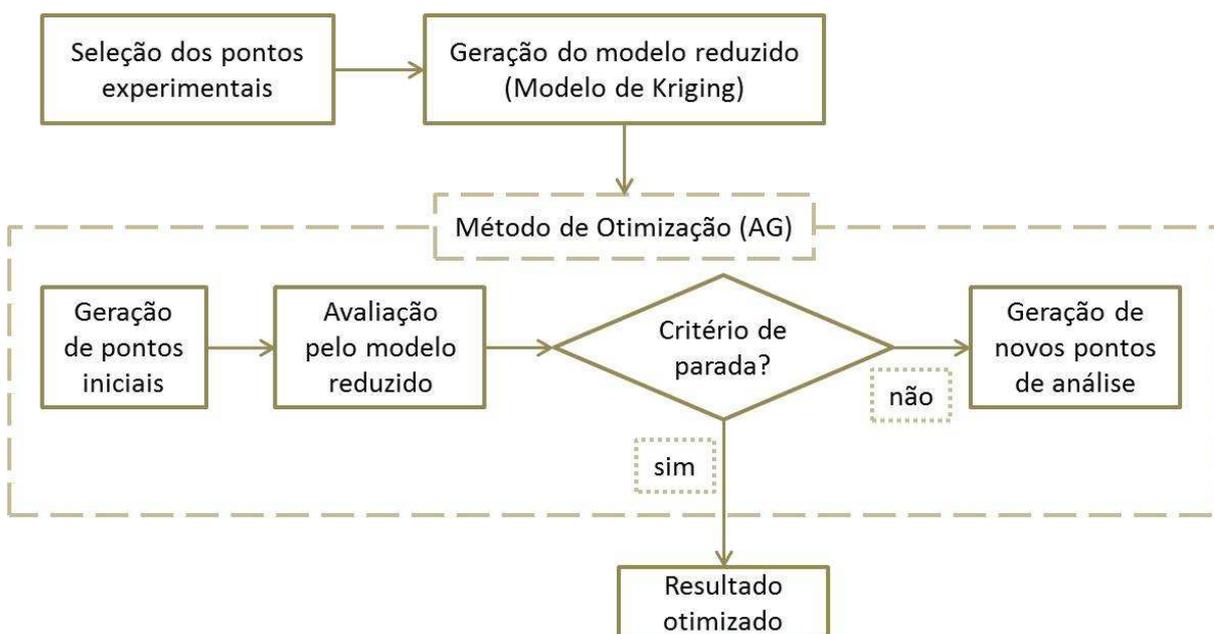


Figura 1 – Fluxograma do modelo de aproximação combinado com o método de otimização.

1.4 Justificativa

O modelo de Kriging aplicado neste trabalho foi desenvolvido inicialmente por geólogos e mineradores. Hoje em dia está sendo aplicado em diferentes áreas da

engenharia, devido à sua grande versatilidade (SIMPSON e MISTREE, 2001; MARTIN e SIMPSON, 2004).

Os materiais compostos laminados foram escolhidos como exemplo para a aplicação do método de otimização conjugado ao modelo de Kriging devido à existência de poucos estudos relatando o comportamento de tal modelo na otimização computacional destes materiais. Além disso, há uma vasta gama de possibilidades na otimização dos materiais compostos, podendo-se variar tanto as orientações das lâminas, dimensões da geometria e até mesmo o critério de falha. Entretanto, o modelo de aproximação foi desenvolvido da forma mais genérica possível, permitindo a posterior utilização deste para a resolução de outros problemas.

Por fim, o tema também é relevante para o meio industrial, visto que otimizações em geometrias e estruturas podem gerar redução significativa nos custos de produtos. Como exemplo pode-se citar a minimização da massa, e conseqüentemente da quantidade de matéria-prima, necessária para a fabricação de um componente.

1.5 Conteúdo do trabalho

Além deste capítulo introdutório, este trabalho de conclusão de curso é composto por mais cinco capítulos com distintos escopos.

O segundo capítulo apresenta uma revisão bibliográfica, portanto nele estão as teorias utilizadas ao longo deste trabalho. Os assuntos revisados no capítulo em questão são o modelo de aproximação de Kriging, a mecânica dos materiais compostos laminados, conceitos de otimização e Algoritmos Genéticos.

Inicialmente é apresentado o modelo de Kriging para aproximação, juntamente com a formulação matemática necessária a sua aplicação. Então uma revisão acerca de materiais compostos laminados é realizada. E por fim, uma pequena introdução sobre otimização é realizada, para em seguida descrever os Algoritmos Genéticos, que é o método de otimização utilizado neste trabalho.

No capítulo seguinte é analisada a influência dos parâmetros utilizados pelo modelo de Kriging. Visto que, é de suma importância entender o funcionamento desses parâmetros no modelo, de forma que o modelo reduzido seja gerado de forma adequada.

No quarto capítulo é descrita a interface criada entre o modelo de Kriging e os Algoritmos Genéticos, de forma a poder utilizar ambos os métodos durante a otimização. Também é descrita a interface criada para utilizar o programa de elementos finitos ao longo da otimização.

Diversas funções analíticas foram aproximadas com o modelo de Kriging, de forma a verificar a qualidade e o comportamento da aproximação obtida. Esta discussão está presente no quinto capítulo, que na sequência apresenta um exemplo de problema com materiais compostos e um estudo sobre as funções de base. Ainda no quinto capítulo, problemas envolvendo otimização de placas retangulares de material composto laminado são apresentados e resolvidos, em que a resposta estrutural é obtida tanto utilizando equações analíticas como através do MEF.

O sexto e último capítulo apresenta uma breve discussão acerca dos resultados, juntamente com as conclusões obtidas. Finalmente, algumas sugestões para o desenvolvimento de trabalhos futuros são citadas.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo é apresentada a fundamentação teórica utilizada para a implementação do modelo de Kriging. As teorias acerca da mecânica dos materiais compostos laminados também são descritas, assim como seu equacionamento e as formulações dos critérios de falha. Ao final, uma introdução sobre otimização é realizada, então os princípios de funcionamento dos Algoritmos Genéticos são apresentados, assim como a lógica que estes utilizam no processo de otimização.

2.1 O modelo de Kriging e sua aplicabilidade

O modelo de Kriging foi inicialmente desenvolvido por geólogos para estimar as propriedades de amostras minerais sobre uma área de interesse a partir de um conjunto de locais amostrados (MARTIN e SIMPSON, 2004). Este modelo se tornou popular na construção de modelos determinísticos, sendo usado em diversas aplicações, incluindo as engenharias aeroespacial e mecânica. Além disso, ele é bastante flexível devido ao grande número de funções de correlação que podem ser utilizadas para a aproximação (SIMPSON e MISTREE, 2001).

VAN BEERS e KLEIJNEN (2004) discorrem que experimentos com simulação de modelos frequentemente requerem muito tempo computacional, e conseqüentemente para realizar a otimização é necessário que se interpolem as relações entre os dados de entrada e saída. Tal interpolação trata o sistema como uma caixa preta, e gera um modelo reduzido como resposta. Diversos métodos podem ser aplicados para geração de modelos reduzidos, dentre eles pode-se citar a técnica de Superfície de Respostas e o modelo de Kriging.

Uma variante do modelo de Kriging foi aplicada no trabalho de XUAN *et al.* (2008), juntamente com um método de otimização baseado em gradiente. Tal método consistiu em criar uma aproximação com a variante do modelo e então utilizá-la no método de otimização para otimizar a geometria de um veículo de reentrada atmosférica. Já TODOROKI e SEKISHIRO (2008) fizeram a combinação do modelo de Kriging com um Algoritmo Genético para otimizar as dimensões e a sequência de empilhamento de uma estrutura de material composto laminado.

Portanto, a função do modelo de Kriging é gerar um modelo reduzido do problema em questão. Assim, durante a otimização, os cálculos da função objetivo são realizados através desta função de aproximação, evitando um número excessivo de avaliações do modelo detalhado. Para gerar esta função são necessários resultados previamente calculados através do modelo detalhado, que podem ser realizados por funções analíticas, ou, para o caso de estruturas complexas, através de uma técnica numérica como, por exemplo, o método dos elementos finitos. A Figura 2 auxilia no entendimento deste processo. A partir de um determinado modelo detalhado, em azul, alguns pontos “experimentais” são calculados, representados pelos triângulos pretos, e então, a partir desses pontos, um modelo reduzido é aproximado, em vermelho.

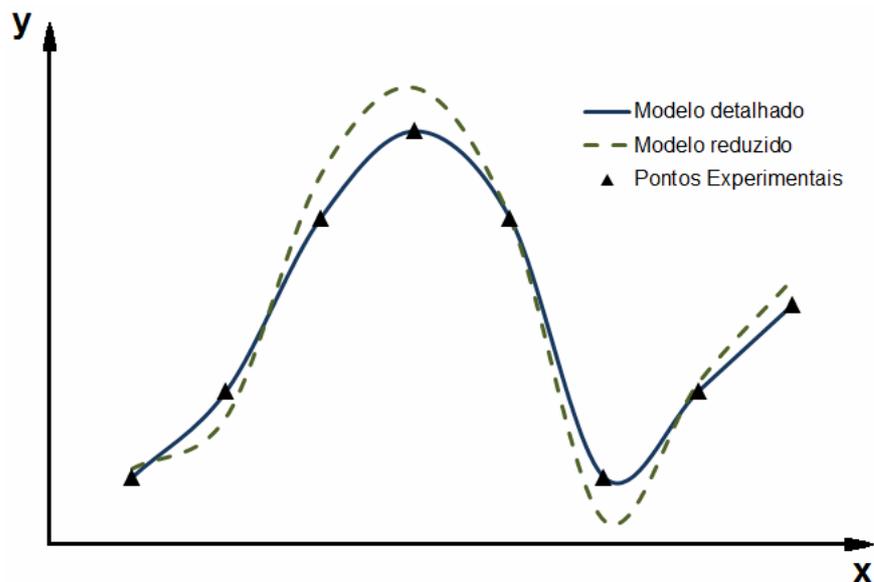


Figura 2 – Exemplo de aproximação de um modelo.

2.1.1 Formulação matemática do modelo de Kriging

O modelo de Kriging é descrito de diversas formas na literatura. Uma das formas mais básicas é descrita por AHMED e QIN (2009), em que o modelo de Kriging é caracterizado como sendo uma função global que interpola os k pontos experimentais, ou também denominados de pontos de “treinamento”, acrescida de um desvio localizado do modelo global. Conseqüentemente a função de aproximação pode ser definida simplesmente por

$$y(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + z(\mathbf{x}) \quad (1)$$

em que $f(\mathbf{x})$ é a função global, que é considerada constante por diversos autores, dentre eles AHMED e QIN (2009), e também TODOROKI e SEKISHIRO (2008). O termo $z(\mathbf{x})$ se refere ao desvio e é dependente dos pontos experimentais. E por fim, $y(\mathbf{x})$ representa a resposta dada pela aproximação. A função $f(\mathbf{x})$ é por vezes definida como (MARTIN e SIMPSON, 2004 e BROWN, 2008)

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \beta_j f_j(\mathbf{x}) \quad (2)$$

sendo que β_j representa os coeficientes da função global, $f_j(\mathbf{x})$ representa os termos em x desta função e, neste caso, n é o número de termos desta função, que será referida como função de base, $f_b(\mathbf{x})$, ao longo deste trabalho.

O segundo termo do modelo, $z(\mathbf{x})$, descrito anteriormente como um desvio, é representado por um processo estocástico com média zero e covariância determinada por

$$\text{cov}(x^i, x^j) = \sigma^2 \mathbf{R}(x^i, x^j), \quad (3)$$

em que σ^2 é a variância do processo, e $R(x^i, x^j)$ é a função de correlação espacial. Existem diversas funções que podem ser utilizadas para quantificar a correlação entre os pontos observados (MARTIN e SIMPSON, 2004). Neste trabalho adotou-se a mesma equação utilizada por AHMED e QIN (2009), e esta é utilizada para calcular a matriz de correlação $[\mathbf{R}]$, que possui dimensões $k \times k$ e os valores da diagonal principal são iguais a um. A seguinte equação é utilizada para realizar-se o cálculo da correlação

$$R(x^i, x^j) = e^{-d(x^i, x^j)} \quad (4)$$

em que

$$d(x^i, x^j) = \sum_{l=1}^n \theta_l \left(\left| x_l^i - x_l^j \right|^2 \right). \quad (5)$$

O valor de d é uma representação da distância entre determinado ponto e os demais pontos do sistema. O parâmetro θ é o fator de correlação, e representa um fator de escala que pode referir-se à cada variável, ou tomar a forma de um valor global atrelado à todas as variáveis. Segundo MARTIN e SIMPSON (2004) este parâmetro controla o raio de influência dos pontos de análise.

Segundo AHMED e QIN (2009) o valor de β é obtido através da minimização da soma dos erros quadráticos, pela equação

$$\beta = \left[\mathbf{A}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \right]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} \quad (6)$$

em que \mathbf{A} representa a matriz da função de base para os pontos experimentais previamente escolhidos e \mathbf{y} a resposta destes pontos experimentais.

Por fim a resposta de determinado ponto $\bar{\mathbf{x}}$ é avaliada através da função

$$y(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}_b(\bar{\mathbf{x}})\beta + \mathbf{r}^T(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{A}\beta) . \quad (7)$$

em que o termo $\mathbf{r}^T(\bar{\mathbf{x}})$ é a correlação entre o ponto que está sendo avaliado e os demais pontos experimentais.

2.2 Materiais Compostos

Conforme JONES (1999), material composto é a combinação de dois ou mais materiais (constituintes), em escala macroscópica, de maneira a formar um terceiro material. Segundo HAFTKA et al. (1999) o material composto poderá possuir características combinadas provenientes dos constituintes, ou mesmo, propriedades distintas destes. Uma das vantagens dos materiais compostos é que comumente eles possuem propriedades de interesse superiores à de seus constituintes (JONES, 1999).

Estes materiais são formados por fibras ou partículas de elevada resistência, os reforços, imersas em uma matriz de um segundo material, que pode ser polimérico, metálico ou mineral (JONES, 1999). Os reforços são responsáveis por conceder resistência mecânica ao material, enquanto que a matriz é a base do

material, sendo responsável pela sua união e também contribuindo para a distribuição da carga que este sofre.

Uma das classificações dos materiais compostos é realizada através do formato e distribuição dos reforços, que podem ser de quatro tipos: particulado, em flocos, reforçado com fibra e laminado, como pode ser visto na Figura 3, adaptada de VAN BOGGELEN (2006).

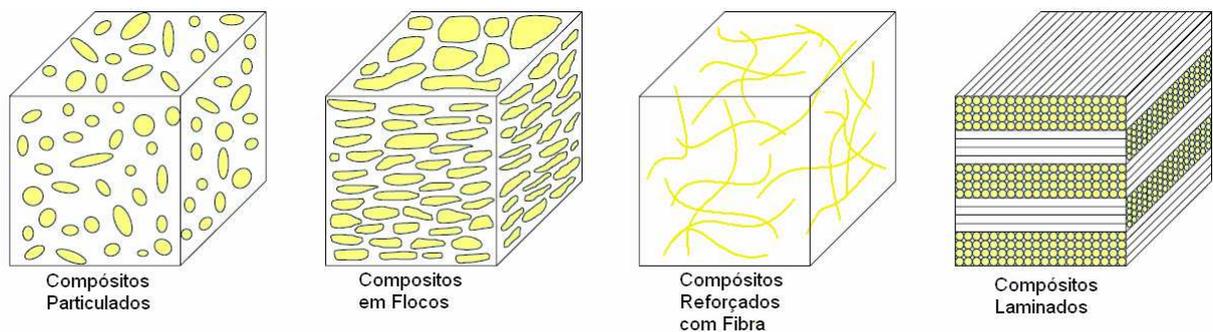


Figura 3 – Tipos de materiais compostos (Adaptada de VAN BOGGELEN (2006)).

2.2.1 Materiais Compostos Laminados

Os materiais compostos laminados, objeto de estudo do presente trabalho, são constituídos de lâminas de fibras orientadas unidirecionalmente em uma matriz. Segundo JONES (1999) essas fibras são responsáveis por suportar as cargas, e normalmente são resistentes e rígidas. Já a matriz, por sua vez, tem a função de suportar e proteger as fibras, além de distribuir as cargas entre elas. As lâminas podem ser empilhadas com diversas orientações de forma a conferir uma maior resistência e/ou rigidez à estrutura. Como descrito por HAFTKA et al. (1999), as camadas são anisotrópicas, ou seja, as propriedades variam conforme a direção da fibra em relação ao sistema de referência global. Havendo neste caso dois planos de simetria para as propriedades, sendo, portanto, caracterizado um caso de ortotropia.

O sistema de coordenadas da lâmina é posicionado conforme a Figura 4. O eixo L é alinhado com a direção longitudinal das fibras, um segundo eixo T é posicionado no plano da lâmina transversalmente às fibras, e, por fim, um terceiro eixo W perpendicular aos anteriores é posicionado.

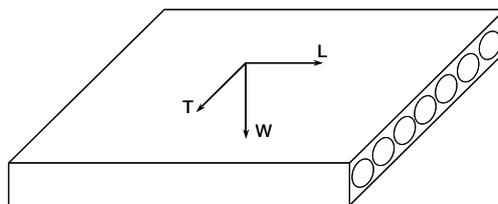


Figura 4 – Sistema de referência de uma lâmina de material composto.

Para descrever a sequência de empilhamento de um laminado, a notação utilizada por JONES (1999) e HAFTKA *et al.* (1998) será adotada, em que um laminado com N lâminas de mesmo material e mesma espessura é representado por $[\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \dots \ \theta_N]$, sendo que θ_1 é a lâmina no topo do laminado e θ é o ângulo de orientação da lâmina, tomado no sentido anti-horário, segundo um sistema de referência global posicionado em relação ao laminado, como representado na Figura 5.

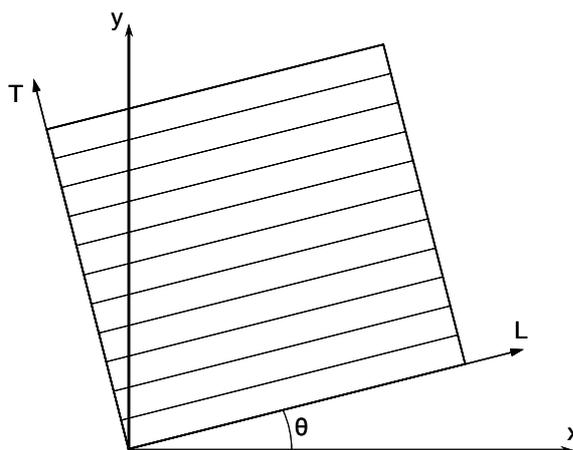


Figura 5 – Orientação do ângulo de rotação da lâmina.

Para os casos em que o laminado é simétrico, ou seja, as lâminas são espelhadas em relação ao plano médio do laminado, opta-se por adicionar um subscrito S ao final da notação e representar apenas metade das lâminas. Como exemplo, para o caso em que tem-se $[90 \ 0 \ 0 \ 90]$, esta sequência de empilhamento pode ser também representada por $[90 \ 0]_S$.

No caso de lâminas adjacentes com mesma orientação, um subscrito é adicionado ao lado direito da orientação, demonstrando o número total de lâminas adjacentes e de mesma orientação. Além disto, quando há uma composição de

lâminas de mesmo ângulo, mas com orientações alternadas um sinal de “±” é adicionado anteriormente ao número. Por exemplo, simplifica-se a seguinte sequência [0 0 45 -45 90 90 90 90 -45 45 0 0] para [0₂ ±45 90₂]_s.

2.2.2 Equações Constitutivas para Materiais Compostos Laminados

Para a determinação das tensões e deformações existentes no material composto laminado e então avaliar se ocorrerá ou não a falha, é necessário inicialmente o estudo do comportamento mecânico de uma lâmina. Esse estudo é aqui realizado através da análise do comportamento macromecânico de uma lâmina, utilizando a Teoria Clássica dos Laminados (TCL) e tendo como base o equacionamento apresentado por JONES (1999).

A lei de Hooke, que relaciona as tensões e as deformações, pode ser escrita de forma generalizada e matricial como

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{C}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad (8)$$

em que $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ é o vetor de tensões e $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ é o vetor de deformações. Para materiais ortotrópicos, como é o caso dos materiais compostos laminados, a matriz constitutiva C_{ij} é formada por nove constantes independentes e a relação entre tensões e deformações, agora em forma expandida, fica

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

sendo que nas tensões e deformações a direção longitudinal (L) é representada pelo índice 1, enquanto a transversal (T) pelo índice 2.

Para uma lâmina, considera-se que ela seja fina e esteja em um estado plano de tensões, conseqüentemente têm-se apenas três tensões não nulas, assim

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}. \quad (10)$$

Tomando-se como base um sistema de coordenadas orientado na lâmina, em que a direção 1 se refere à direção paralela e a direção 2 a direção transversal de orientação das fibras, tem-se que a matriz constitutiva Q_{ij} do material é composta por quatro termos distintos, dados por

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (11)$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (12)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (13)$$

$$Q_{66} = G_{12} \quad (14)$$

Portanto, são necessários apenas os dois módulos de elasticidade, E_1 (paralelo) e E_2 (transversal), o módulo de cisalhamento G_{12} e um dos coeficientes de Poisson no plano 1-2. O segundo coeficiente de Poisson pode ser obtido através da relação

$$\nu_{21} = \frac{E_2}{E_1} \nu_{12} \quad (15)$$

Entretanto, a lâmina é orientada em relação ao sistema de coordenadas do laminado 1-2, como pode ser visto na Figura 5, e nem sempre as direções de ortotropia coincidem com as direções do sistema global x-y. O que torna necessário transformar as tensões deformações do sistema da lâmina para o global. Para tanto a matriz $[T]$ é utilizada, ela é definida da seguinte forma

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta \cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta \cos\theta \\ \sin\theta \cos\theta & -\sin\theta \cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (16)$$

em que θ é o ângulo em que a lâmina se encontra em relação ao eixo de referência. Consequentemente a relação entre tensão e deformação, pode ser obtida através de

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{32} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} [R][T][R]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Em que

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Por fim obtém-se a relação entre a tensão e a deformação como sendo

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{21} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Onde \overline{Q}_{ij} é a matriz constitutiva, e é relacionada com a matriz Q por meio do seguinte grupo de equações

$$\begin{aligned} \overline{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ \overline{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \overline{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \overline{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \overline{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \overline{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned} \quad (20)$$

De forma a obter a relação entre o carregamento e as tensões-deformações geradas no laminado, a Teoria Clássica dos Laminados (TCL) será utilizada. Como descrito por JONES (1999), nessa teoria o laminado possui lâminas perfeitamente unidas, por uma camada infinitesimalmente fina em que não ocorre cisalhamento. Consequentemente, as deformações são contínuas nos contornos das lâminas e não há separação entre as lâminas. Portanto o laminado poderá ser tratado como uma única lâmina. Além do mais, a relação tensão-deformação na k-ésima lâmina pode ser obtida pelas equações (19) e (20) anteriormente definidas, visto que o estado plano de tensões foi considerado.

Considerando uma linha reta e perpendicular ao plano médio, de acordo com a TCL, esta linha permanecerá reta e perpendicular ao plano médio quando o laminado for deformado. Isto é equivalente a ignorar as deformações cisalhantes nos planos perpendiculares ao plano médio. Com isto, a deformação é considerada linear entre as lâminas, entretanto as tensões dependerão da orientação das lâminas.

As forças e momentos resultantes podem ser obtidos pela integração da tensão em cada lâmina em relação a sua espessura e ao plano médio do laminado. De onde se obtém a seguinte relação

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

Em que os elementos A_{ij} , B_{ij} e D_{ij} são obtidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k - h_{k-1}) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (22)$$

Onde h é a distância da lâmina em relação ao plano médio e n é o número de lâminas. A matriz $[A]$ é por vezes chamada de matriz de rigidez da membrana, enquanto $[B]$ é a matriz membrana-flexão e $[D]$ a matriz de rigidez de flexão.

2.2.3 Critérios de falha e Critério de Flambagem

Para os materiais laminados, o critério de falha é normalmente baseado no campo de tensões apresentado em cada uma das lâminas, visto que o ângulo de cada uma influenciará neste campo. Além disto, a posição de cada lâmina em relação ao centro da placa também influencia nas propriedades resultantes.

O critério de falha de Tsai-Wu utiliza as solicitações presentes em cada lâmina do material e as tensões de falha em tração, compressão e cisalhamento do material para obter o valor do critério, que é então aplicado para cada lâmina em separado. Segundo este critério, para o caso de uma lâmina ortotrópica em estado plano de tensões, para não ocorrer a falha, a seguinte desigualdade deve ser satisfeita:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{S_{Lt}} - \frac{1}{S_{Lc}} \right) \sigma_L + \left(\frac{1}{S_{Tt}} - \frac{1}{S_{Tc}} \right) \sigma_T + \left(\frac{1}{S_{Lt}S_{Lc}} \right) \sigma_L^2 + \\ & + \left(\frac{1}{S_{Tt}S_{Tc}} \right) \sigma_T^2 + \frac{1}{S_{LT}^2} \tau_{LT}^2 + 2 \left(-\frac{1}{2} \sqrt{f_{11}f_{22}} \right) \sigma_L \sigma_T < 1 \end{aligned} \quad (23)$$

em que S representa a resistência da lâmina, a primeira letra do índice indica a direção desta resistência, L para direção longitudinal e T para transversal, e a segunda letra refere se à tração t ou a compressão c , por fim, S_{LT} representa a resistência ao cisalhamento. As tensões presentes na lâmina são representadas por σ_L para a tensão normal na lâmina na direção longitudinal e σ_T para a direção transversal e τ_{LT} representa a tensão cisalhante no plano da lâmina. E o último termo do critério, que representa o acoplamento entre as tensões normal e transversal, com os termos f_{11} e f_{22} foi desconsiderado, visto que não é o objetivo de estudo do trabalho e não há um consenso sobre o valor das constantes.

No caso da desigualdade ser desrespeitada a lâmina romperá, segundo critério, acarretando uma sobre tensão nas demais, que poderá ocasionar a ruptura total do material. Portanto, caso uma lâmina desrespeite o critério é considerada a falha do laminado.

Já a carga crítica de flambagem é composta por termos da matriz de flexão do laminado, representada pela letra D , assim como pelo número de comprimentos de meia onda, representado pelas letras m e r . Também são termos integrantes da carga crítica o comprimento l_p e a largura da lâmina w_p , a Figura 6 demonstra a situação em questão.

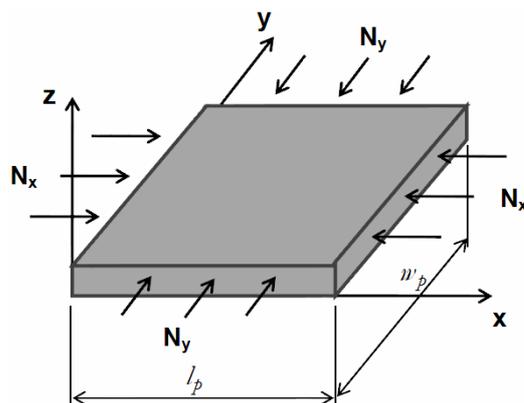


Figura 6 – Representação do laminado e das forças atuantes (FERNANDES, 2009)

Além destes termos, as forças normais N atuantes nas direções x e y também estão presentes no cálculo do critério que é realizado através de

$$\lambda_{cr}(m, r) = \min \left(\frac{\pi \left[D_{11} \left(\frac{m}{l_p} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m}{l_p} \right)^2 \left(\frac{r}{w_p} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{r}{w_p} \right)^4 \right]}{\left(\frac{m}{l_p} \right)^2 N_x + \left(\frac{r}{w_p} \right)^2 N_y} \right) \quad (24)$$

em que λ_{cr} representa a razão entre a carga de flambagem e a carga aplicada. Tal equação é válida apenas para laminados simétricos e balanceados e a flambagem ocorre quando o valor de λ_{cr} for menor que 1.

2.3 Otimização

Segundo a definição utilizada por CASTRO (2009), qualquer alteração em um projeto que gere uma melhoria é uma otimização. Já segundo o dicionário Michaelis da língua portuguesa, otimização é o processo pelo qual se determina o valor ótimo de uma grandeza. A definição utilizada por WIDMAIER (2005) é bastante semelhante a essa, entretanto com a seguinte ressalva: às vezes é mais importante obter uma solução melhorada em um menor tempo, ao invés de obter o ótimo em um tempo muito elevado.

Para se realizar o processo de busca pelo ótimo, diversos métodos foram desenvolvidos. Segundo WIDMAIER (2005) estes podem ser divididos em três classes principais: baseados em cálculo, enumerativos e aleatórios. Os métodos

numéricos são normalmente baseados em gradiente, e dependem tanto da existência de derivadas para as funções quanto de continuidade do domínio. Ainda segundo WIDMAIER (2005), os métodos enumerativos têm como base avaliar a função objetivo em cada ponto de um espaço finito ou discreto, o que pode gerar um elevado custo computacional para o processo de otimização.

Por fim, os métodos heurísticos são baseados em buscas aleatórias pelo domínio. Entretanto diversos algoritmos foram criados com o intuito de direcionar tal busca, de forma a garantir uma melhor convergência do método. Dentre esses algoritmos se destacam o método da Têmpera Simulada (*Simulated Annealing*), Algoritmos Genéticos (*Genetic Algorithm*) e *Particle Swarm*.

2.3.1 Algoritmos Genéticos

O método de otimização denominado de Algoritmos Genéticos (AG) foi desenvolvido por John Holland na década de 1970. Tal algoritmo é inspirado na teoria do evolucionismo proposta por Darwin, na qual o indivíduo melhor adaptado ao meio possui maior probabilidade de transmitir suas características para as próximas gerações.

Segundo LE RICHE e HAFTKA (1995), o AG pode ser caracterizado como uma técnica de busca aleatória guiada. Por isto, este algoritmo é bastante utilizado para a busca do ótimo global em funções de variáveis discretas, que no caso dos materiais compostos laminados se caracterizam por não serem lineares e possuírem diversos pontos de ótimo local.

Alguns termos provenientes da biologia e da genética são utilizados no AG. Cada conjunto de valores necessários para a análise é um indivíduo, o conjunto dos indivíduos analisados a cada iteração é chamado de população, enquanto a iteração é denominada de geração. Os indivíduos são compostos por cromossomos, que descrevem uma característica geral, e os genes que compõem o cromossomo demonstram características localizadas. Para o caso dos materiais compostos, um vetor com os ângulos de empilhamento é um cromossomo, em que cada ângulo é um gene.

Esses algoritmos se dividem em diversas etapas, a primeira delas é a geração da população inicial, usualmente de forma aleatória. Os indivíduos são então analisados, selecionados e através da ação dos operadores genéticos sobre esses uma nova população é gerada. Esta nova população é analisada, se o critério de parada for atingido o algoritmo se encerra, caso contrário, uma nova população é criada, e assim sucessivamente até que o critério seja satisfeito, como demonstrado na Figura 7, entretanto não há como garantir que a solução obtida é a ótima.

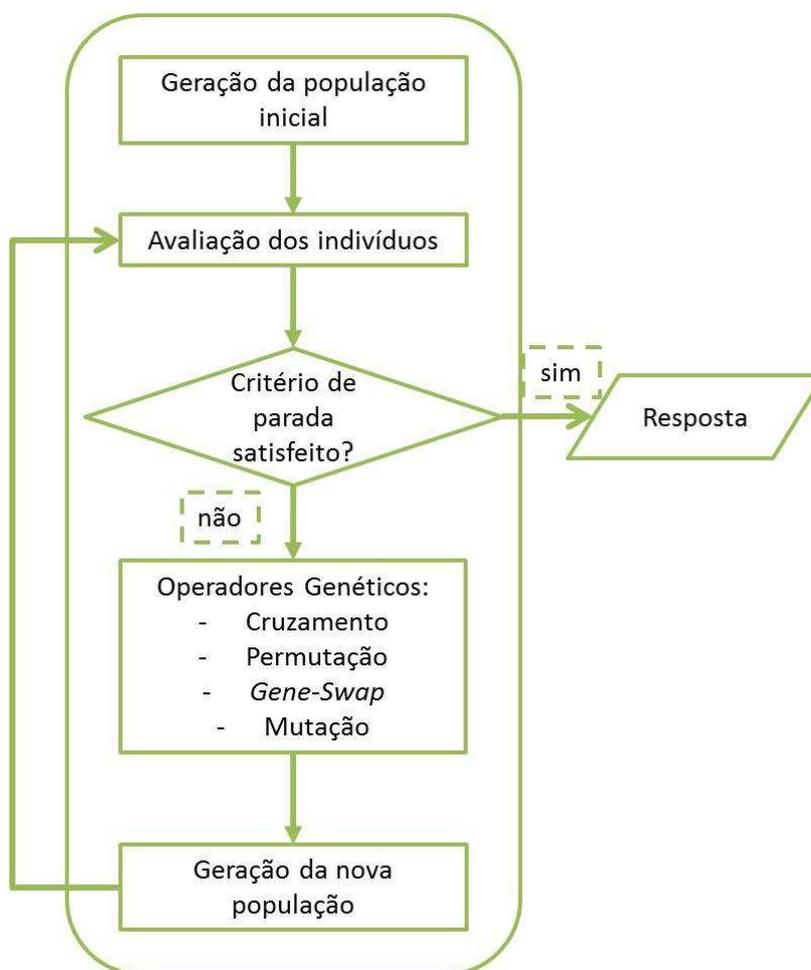


Figura 7 – Fluxograma do funcionamento do AG.

Diversos métodos de seleção de indivíduos são encontrados na literatura. Durante esse processo é importante que todos os indivíduos tenham possibilidade de gerar descendentes, garantindo variabilidade genética aos cromossomos, ou

seja, garantindo que uma mesma variável não ocupe todas as soluções na próxima iteração.

Para tanto, o método do torneio foi utilizado. Nele a população é dividida em castas de acordo com suas avaliações. Primeiramente os indivíduos são ordenados segundo duas avaliações. Então são divididos em castas, e de cada casta alguns indivíduos passam os genes à próxima geração. A seleção de um indivíduo é realizada pela escolha randômica de dois indivíduos dentro de uma mesma casta e comparação direta de suas avaliações.

Os indivíduos selecionados sofrem a ação dos operadores genéticos, cada um deles com uma probabilidade distinta de ocorrer. O primeiro deles é o cruzamento, do inglês *crossover*, em que dois indivíduos trocam genes e geram dois descendentes. Para se realizar esta operação, dois pontos nos cromossomos são escolhidos aleatoriamente e os genes entre estes pontos são trocados entre os indivíduos, como mostrado na Figura 8.

$$\begin{array}{l} [0 \ 45 \ -45 \ 0 \ | \ 90 \ 90 \ 45 \ | \ 90] \\ [45 \ 90 \ 0 \ 90 \ | \ 45 \ -45 \ 0 \ | \ 90] \end{array} \qquad \begin{array}{l} [0 \ 45 \ -45 \ 0 \ 45 \ -45 \ 0 \ 90] \\ [45 \ 90 \ 0 \ 90 \ 90 \ 90 \ 45 \ 90] \end{array}$$

Figura 8 – Representação da operação de cruzamento.

Em seguida ocorre a permutação, neste operador dois pontos são selecionados ao longo do cromossomo, e os genes entre estes pontos são invertidos, como mostra a Figura 9.

$$[0 \ 90 \ | \ 90 \ 45 \ 0 \ | \ 0 \ 90 \ -45] \qquad [0 \ 90 \ 0 \ 45 \ 90 \ 0 \ 90 \ -45]$$

Figura 9 – Representação da operação de permutação.

Outra operação realizada é a de *gene-swap*, em que dois genes são selecionados aleatoriamente e trocados entre si, como mostrado na Figura 10.

[90 45 -45 90 0 0 45 90] [90 45 0 90 0 -45 45 90]

Figura 10 – Representação da operação de *gene-swap*.

A mutação é utilizada para prevenir que haja uma convergência prematura da resposta, o que poderia acarretar na parada em um ponto de ótimo local, ou seja, sempre haverá uma variação mínima na população. Este operador altera um gene aleatoriamente dentro do cromossomo, como demonstrado na Figura 11.

[90 45 -45 90 0 0 45 90] [90 45 -45 45 0 0 45 90]

Figura 11 – Representação da mutação.

A técnica do elitismo consiste em preservar o melhor indivíduo, para que ele não sofra a ação dos operadores, e inseri-lo na próxima geração. Visando uma convergência mais rápida do algoritmo.

2.3.2 Otimização em Materiais Compostos Laminados

Como relatado por ALMEIDA e AWRUCH (2009), nas últimas décadas a aplicação de materiais compostos laminados tem crescido, o que exigiu o desenvolvimento de técnicas de análise. Entretanto, o grande número de variáveis envolvidas no projeto torna-o mais complexo que o projeto com materiais convencionais.

Normalmente as variáveis envolvidas são as direções de empilhamento, podendo-se também variar em alguns casos a espessura das lâminas ou do laminado, o material das lâminas e a quantidade de lâminas. Com o objetivo de reduzir o peso, principalmente visto que estes materiais são normalmente utilizados em estruturas que suportam grandes esforços e requerem pequenas massas, como por exemplo, as asas de aviões.

Segundo ALMEIDA e AWRUCH (2009), os primeiros trabalhos na otimização de materiais compostos laminados utilizavam os mesmos métodos empregados para materiais convencionais. Entretanto, tais trabalhos não obtinham sucesso, visto que

as limitações da manufatura do composto impõem que as variáveis (orientações das lâminas) sejam valores discretos. Para resolver tal problema, diversos autores utilizam métodos heurísticos, principalmente os algoritmos genéticos.

As vantagens da utilização destes algoritmos na solução de problemas de otimização de materiais compostos laminados foram enumeradas por LOPEZ *et al.* (2009). A primeira delas remete ao fato de não ser necessário saber o gradiente, ou mesmo, o gradiente pode não existir. O AG não estagna em um ponto de ótimo local, se utilizado de forma adequada. Além disso, pode ser utilizado em funções descontínuas. Finalmente, como resposta ele pode fornecer um conjunto de soluções quase-ótimas e não apenas uma única solução.

Entretanto LOPEZ *et al.* (2009) também citam as desvantagens do método. Uma delas é que, para que o AG obtenha um melhor resultado seus parâmetros devem ser testados por tentativa e erro. Mas o principal problema do algoritmo é que ele exige um número de cálculos muito elevado da função objetivo para convergir para o ótimo, o que, dependendo do problema, pode tornar sua utilização inadequada devido à um elevado tempo computacional.

3 ANÁLISE DOS PRINCIPAIS PARÂMETROS DO MODELO DE KRIGING

O conhecimento acerca dos parâmetros que compõem o modelo de Kriging é de fundamental importância para que este venha a ser aplicado da melhor maneira possível. Portanto, nesta seção, os principais parâmetros do modelo são discutidos a fim de compreender a influência que estes têm sobre os resultados.

3.1 Funções de base – $f_b(x)$

A equação (2) se refere à função de base, que aproxima a solução do problema através de uma análise dos pontos experimentais previamente conhecidos. Estas aproximações podem assumir diversas formas, como funções constantes, polinomiais e trigonométricas. O produto resultante da função de base e do coeficiente β é referenciado por $f(x)$ na equação (1) e pode tomar diversas formas, que em função do problema proposto o aproximam de melhor ou pior maneira.

Neste trabalho optou-se por utilizar as mesmas funções de base apresentadas por LEE e LIN (2003), as quais foram também utilizadas por FERNANDES (2009). Estas funções sofreram pequenas adaptações, de forma que, os termos de mesma ordem não se repetissem. A essas se somou a função constante que é utilizada por diversos autores em seus estudos sobre o modelo de Kriging, como TODOROKI e SEKISHIRO (2008) e XUAN et al. (2008). Portanto, as seguintes funções de base serão utilizadas ao longo deste trabalho da seguinte forma:

Tipo 0:

$$f_b(x) = C_0 \quad (25)$$

Tipo 1:

$$f_b(x) = C_0 + \sum_{i=1}^n \left(C_i x_i + \sum_{j=i}^n D_{ij} x_i x_j \right) \quad (26)$$

Tipo 2:

$$f_b(x) = C_0 + \sum_{i=1}^n (C_i \text{sen}(x_i) + D_i \text{cos}(x_i) + E_i \text{sen}(2x_i) + F_i \text{cos}(2x_i)) \quad (27)$$

Tipo 3:

$$f_b(x) = C_0 + \sum_{i=1}^n \left(C_i \text{sen}(x_i) + D_i \text{cos}(x_i) + E_i \text{sen}(2x_i) + F_i \text{cos}(2x_i) + \sum_{j=i}^n (G_{ij} \text{sen}(x_i) \text{sen}(x_j) + H_{ij} \text{cos}(x_i) \text{cos}(x_j)) \right) \quad (28)$$

Tipo 4:

$$f_b(x) = C_0 + \sum_{i=1}^n \left(C_i \text{sen}(x_i) + D_i \text{cos}(x_i) + E_i \text{sen}(2x_i) + F_i \text{cos}(2x_i) + \sum_{j=i}^n (G_{ij} \text{sen}(x_i) \text{sen}(x_j) + H_{ij} \text{cos}(x_i) \text{cos}(x_j) + I_{ij} \text{sen}(2x_i) \text{sen}(2x_j) + J_{ij} \text{cos}(2x_i) \text{cos}(2x_j)) \right) \quad (29)$$

Em que, as letras de C_i , D_i , E_i , F_i , G_{ij} , H_{ij} , I_{ij} e J_{ij} representam os coeficientes que aproximam à função de base aos pontos experimentais da função analisada, e compõem o vetor de coeficientes β .

Uma melhor análise do resultado obtido por cada tipo de função de base na aproximação de uma função é feita na Seção 5.2, dois motivos levaram a isto. O primeiro deles é que, devido ao termo estatístico intrínseco ao modelo de Kriging, a diferenciação entre as funções de base para a aproximação de funções de uma variável não é muito visível. Além disto, na referida seção, tais funções são aplicadas para o comportamento de materiais compostos laminados, possibilitando verificar qual destas funções melhor se adapta a tais problemas.

3.2 Análise da influência do número de experimentos - k

O parâmetro a ser avaliado nesta seção é o número de experimentos, definido pela letra k. Cada experimento representa um ponto utilizado para se obter a aproximação, portanto há de se esperar que quanto maior o número de experimentos melhor seja a aproximação.

Uma forma de gerar os pontos experimentais é distribuí-los aleatoriamente ao longo do domínio. Entretanto, é possível que não haja uma distribuição regular destes pontos, o que poderia gerar uma aproximação boa para uma parte do problema, em que os pontos ficassem mais próximos, e ruim para outras, com pontos mais distantes. Outro método seria gerar uma malha regular sobre o domínio do problema, desta forma a aproximação seria semelhante para todo domínio, entretanto muitos pontos seriam necessários para preencher todo o domínio.

Como alternativa a estes métodos, optou-se por utilizar o método do hipercubo latino (tradução livre do inglês *Latin Hypercube* – LHC), que também foi utilizado por TODOROKI e SEKISHIRO (2008). Tal método consiste em dividir cada um dos intervalos do domínio em espaços de mesmo comprimento, e então mesclar os pontos que dividem estes comprimentos de forma aleatória entre as n variáveis. Desta forma nenhuma coordenada irá se repetir e os pontos ficarão espalhados pelo domínio, podendo cobrir até mesmo as regiões de fronteira deste.

A Figura 12 demonstra a diferença entre o método do LHC e uma geração aleatória de pontos, em um domínio de $[-1, 1]$ e dez pontos. Os losangos azuis, que representam os pontos gerados pelo hipercubo latino estão mais distribuídos que os em vermelho, gerados aleatoriamente, que ficam concentrados. Neste exemplo, na Figura 12(b) na região mais negativa de x_1 , nota-se a concentração de quatro dos dez pontos criados de forma aleatória, enquanto que com o LHC apenas dois pontos estão nesta mesma região. Além disto, com a utilização do LHC os pontos experimentais chegaram até a região limítrofe do domínio.

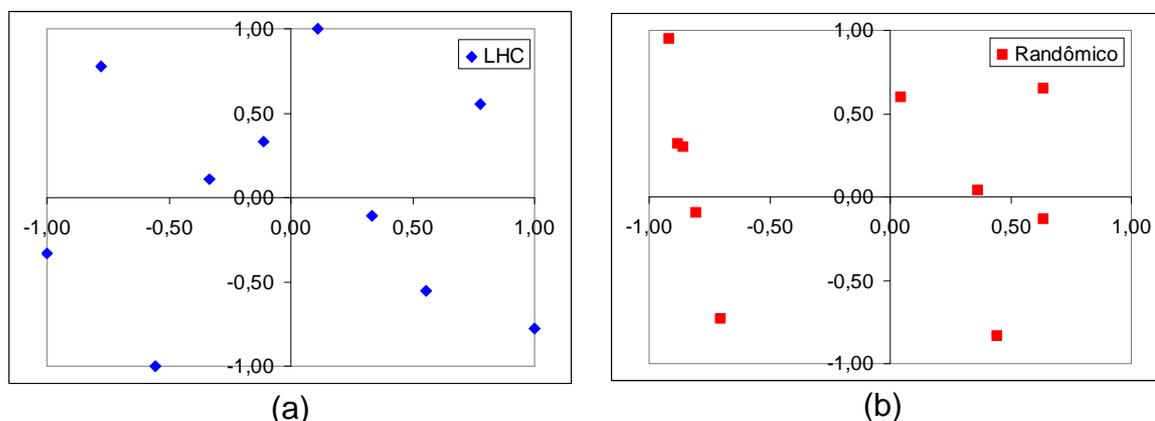


Figura 12 – Comparação entre a forma distribuição dos pontos experimentais: (a) LHC e (b) Randômico.

3.2.1 Avaliação do número de experimentos em uma função de uma variável

Para avaliar a influência do número de experimentos sobre o resultado obtido na aproximação com o modelo de Kriging foi utilizada a função

$$y(\alpha) = 2 \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\alpha) + \cos(2\alpha)^2 + \operatorname{sen}(\alpha^3) + 9. \quad (30)$$

A variável α representa um ângulo que varia de -90° a 90° . Neste caso adotou-se um θ igual a 0.01 e a função de base utilizada é do tipo 2. A função foi aproximada para três valores distintos de k (número de experimentos) sendo eles: 5, 10 e 20. A função exata e as aproximações geradas estão demonstradas na Figura 13.

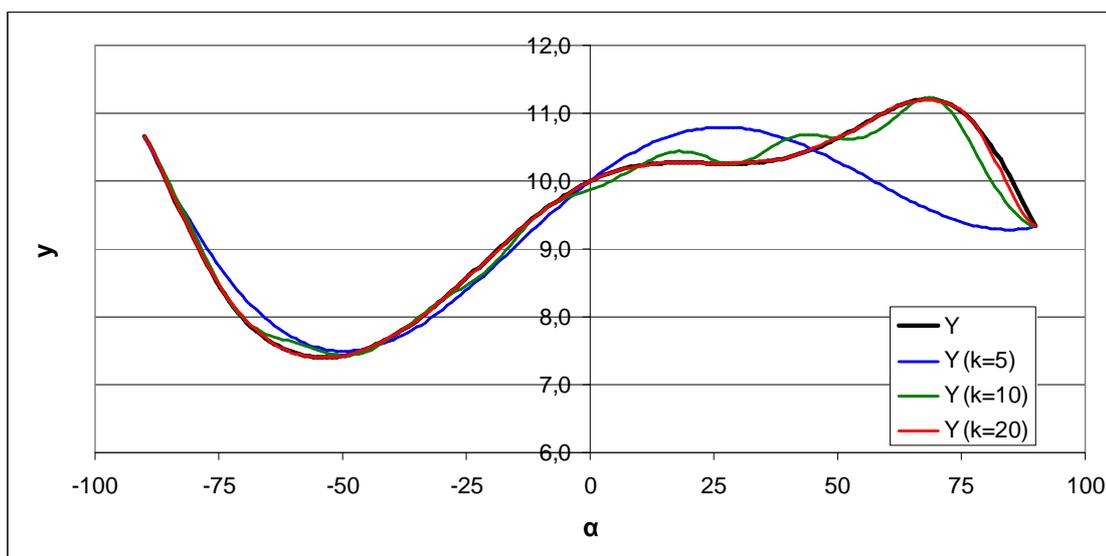


Figura 13 – Aproximações para diferentes números de experimentos da função representada na equação 15.

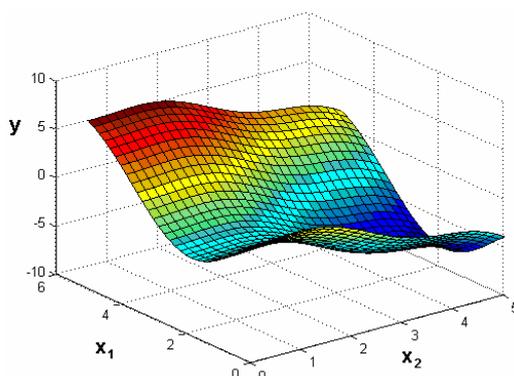
O resultado obtido para a variação do número de experimentos demonstra claramente o que foi previamente levantado, isto é, quanto maior o número de experimentos melhor a aproximação realizada.

3.2.2 Avaliação do número de experimentos em uma função de duas variáveis

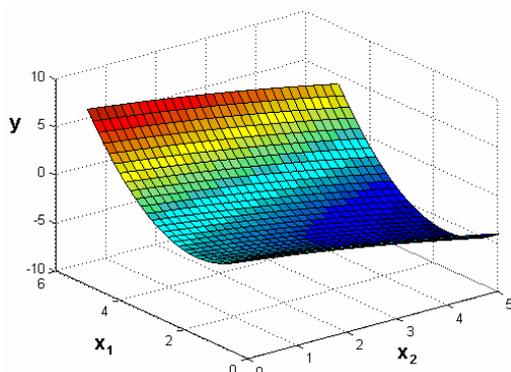
A fim de verificar se o comportamento existente para o caso de uma variável é o mesmo para mais de uma variável optou-se por analisar a função

$$y(\alpha) = \frac{x_1^3}{40} - \sin(x_1) + \cos(x_1) - \frac{x_2^3}{20} + \sin(x_2)^2 + \cos(x_2) \quad (31)$$

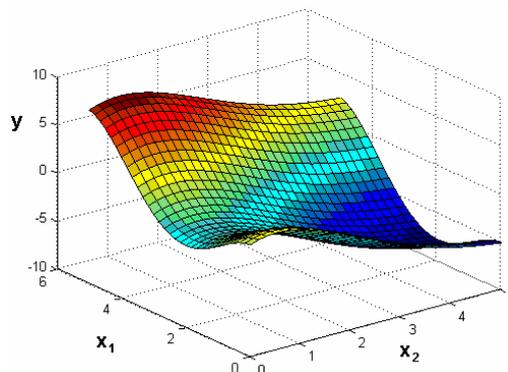
o valor de θ utilizado foi 0.01 e a função de base do tipo 2. Os valores de ambas as variáveis estão entre zero e cinco e os números de experimentos escolhido nas avaliações foram de 5, 10, 25 e 50.



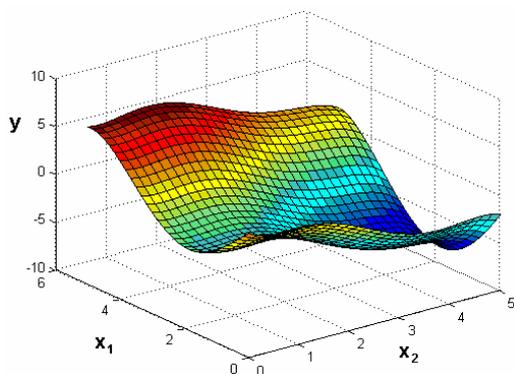
(a) Função original



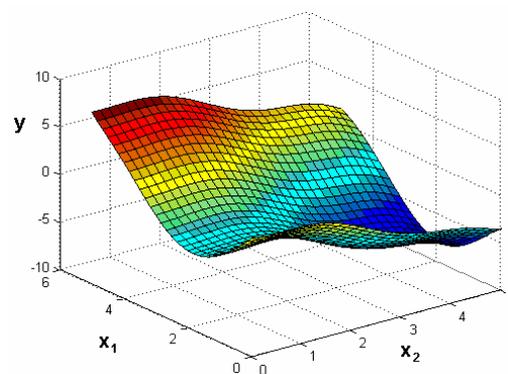
(b) k = 5



(c) k = 10



(d) k = 25



(e) k = 50

Figura 14 – Aproximações da função da equação (31) para diferentes números de experimentos.

A Figura 14 demonstrou os resultados obtidos para os diferentes números de experimentos utilizados e assim, como no caso anterior, uma maior quantidade de pontos aproximou melhor para a função em questão. Entretanto, também é visível que a diferença entre as aproximações com 25 e 50 pontos não é muito grande, sendo que a segunda aproximou melhor as regiões da fronteira do domínio.

3.3 Análise da influência do fator de correlação - θ

O parâmetro θ , como já citado anteriormente, é um fator que incide diretamente sobre o resultado obtido, visto que controla a correlação entre os pontos analisados. Portanto, seu valor tem grande influência sobre a aproximação efetuada. Quanto menor o valor de θ maior será a influência dos pontos do sistema sobre o local de interesse.

Novamente a equação (30) foi utilizada na aproximação, e um número fixo de 20 experimentos foi utilizado para gerá-la através do modelo de Kriging. Os demais parâmetros são os mesmos anteriormente utilizados, e o valor de θ foi variado entre 0,01 e 0,5. A Figura 15 demonstra o resultado obtido destas aproximações.

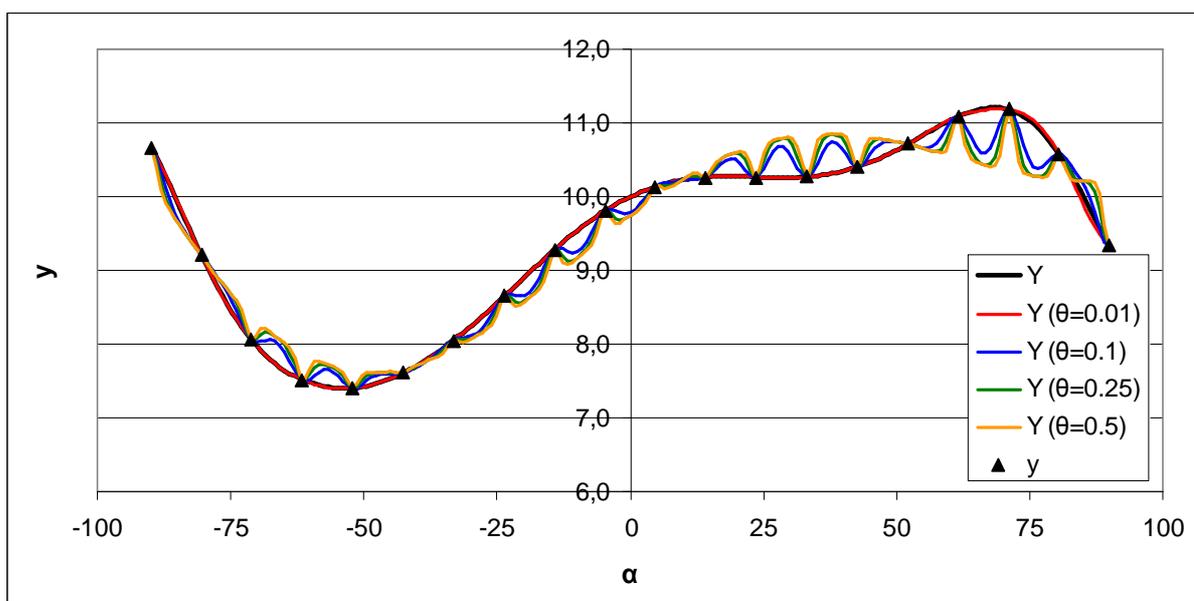


Figura 15 – Aproximações para diferentes valores de θ .

O valor do parâmetro θ influenciou diretamente a aproximação do MK. Para um valor elevado do parâmetro os resultados obtidos geraram uma aproximação ruim, entretanto, à medida que este valor diminuía o modelo reduzido se aproximava do detalhado. Isto, pois os pontos experimentais aumentaram o seu intervalo de influência com a diminuição do valor do parâmetro.

Entretanto, valores extremamente baixos de θ geram ruído na aproximação, como demonstrado na Figura 16. Isto ocorre, pois, os valores da matriz de correlação [R] se aproximam todos da unidade, o que torna a matriz inversa bastante imprecisa, ou mesmo singular.

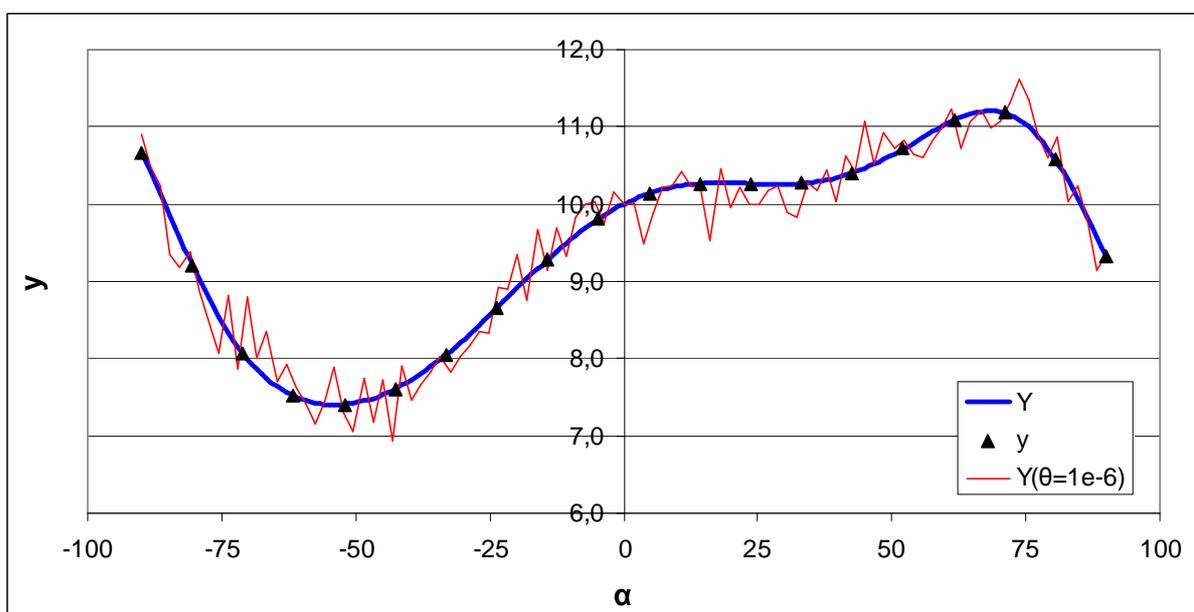


Figura 16 – Aproximação para um valor de θ muito baixo.

3.4 Comparação entre o modelo de Kriging e Superfície de Resposta

Um outro modelo bastante difundido para aproximação é o modelo de superfície de resposta (SR). Tal modelo pode ser aproximado utilizando a seguinte equação (MYERS, 2002)

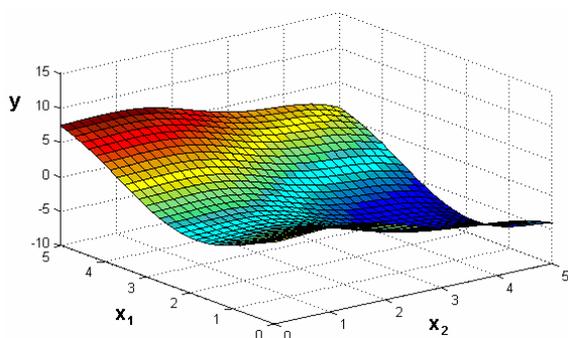
$$y(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\beta} f(\mathbf{x}) . \quad (32)$$

As funções de base $f(\mathbf{x})$ podem ser as mesmas descritas anteriormente, entretanto o valor de β , que é calculado pela minimização do erro quadrático, neste caso é dado por

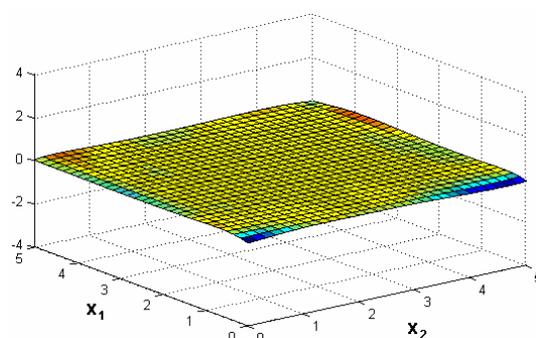
$$\beta = [\mathbf{A}^T \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y} . \quad (33)$$

Para comparar as duas aproximações, escolheu-se a mesma função da Seção 3.2.2, utilizou-se a função de base do tipo 4, e 50 pontos experimentais. No modelo de Kriging o fator de correlação utilizado foi igual a 0,05.

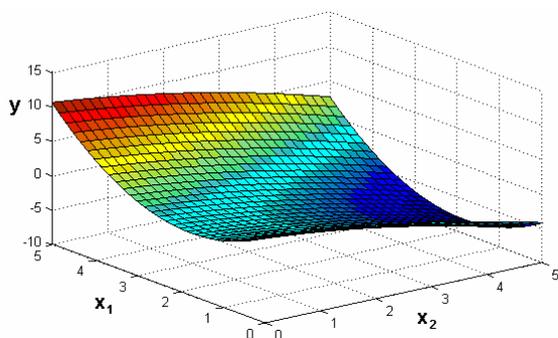
A Figura 17 apresenta as diferenças existentes entre ambas às aproximações. A Figura 17(a) e a Figura 17(c) representam respectivamente as aproximações realizadas com o modelo de Kriging e com a SR. Já a Figura 17(b) e a Figura 17(d) representam a subtração da aproximação com a função original. Ou seja, é uma medida do erro da aproximação. Como é possível notar, o valor do erro é inferior para o modelo de Kriging. Isto ocorre devido ao termo probabilístico que faz a correlação entre os pontos experimentais, o que tende a diminuir o erro.



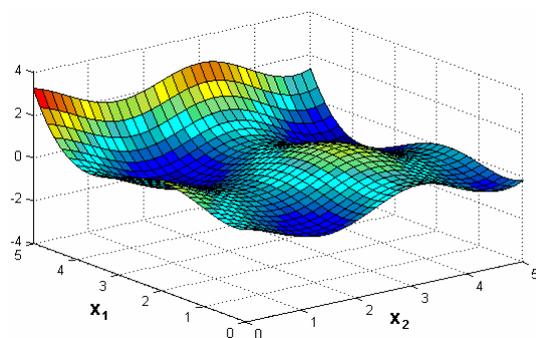
(a) Modelo de Kriging



(b) Diferença: Kriging/Função Original



(c) Superfície de Resposta (SR)



(d) Diferença: SR/Função Original

Figura 17 – Comparação entre o modelo de Kriging e a Superfície de Resposta.

4 UNIÃO ENTRE MODELO DE KRIGING E ALGORITMOS GENÉTICOS

GENÉTICOS

Para se atingir o objetivo proposto neste trabalho de conclusão de curso é necessário unir o método de Kriging aos Algoritmos Genéticos. Portanto, este capítulo demonstra como o algoritmo de otimização e o método de aproximação de Kriging foram unidos. Apresenta também como a interface com o programa de elementos finitos foi criada.

4.1 Modelo de Kriging conjugado com Algoritmos Genéticos

O princípio de funcionamento dos Algoritmos Genéticos foi previamente discutido, e o fluxograma da Figura 7 demonstrou o seu funcionamento. Resumidamente, tal algoritmo gera uma população e a evolui com o passar das gerações, de forma otimizar determinado problema.

O modelo de Kriging também foi discutido nas seções anteriores. A Figura 18 demonstra o princípio de funcionamento do método, em que, pontos experimentais são gerados, e suas respostas calculadas de forma analítica ou numérica. Então, é realizada uma aproximação e como resultado obtém-se uma equação para aproximar o problema.

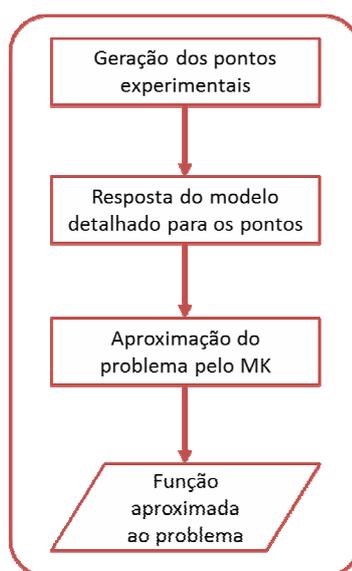


Figura 18 – Fluxograma para obtenção do modelo de Kriging.

De forma a unir os dois algoritmos que foram previamente programados em MATLAB uma terceira rotina foi desenvolvida. Essa rotina se inicia pelo MK, de forma a aproximar o problema e obter a função de aproximação a ser utilizada na otimização, que é então realizada através dos Algoritmos Genéticos.

O fluxograma da Figura 19 demonstra como esta união foi realizada. Após obter-se a função aproximada pelo MK, esta é enviada à função de avaliação dos indivíduos dentro do AG, momento no qual o critério de falha deve ser calculado. Portanto, não há mais a necessidade de se calcular o critério de falha por diversas vezes pelo método convencional a cada iteração do AG, visto que a aproximação previamente obtida com o MK é utilizada.

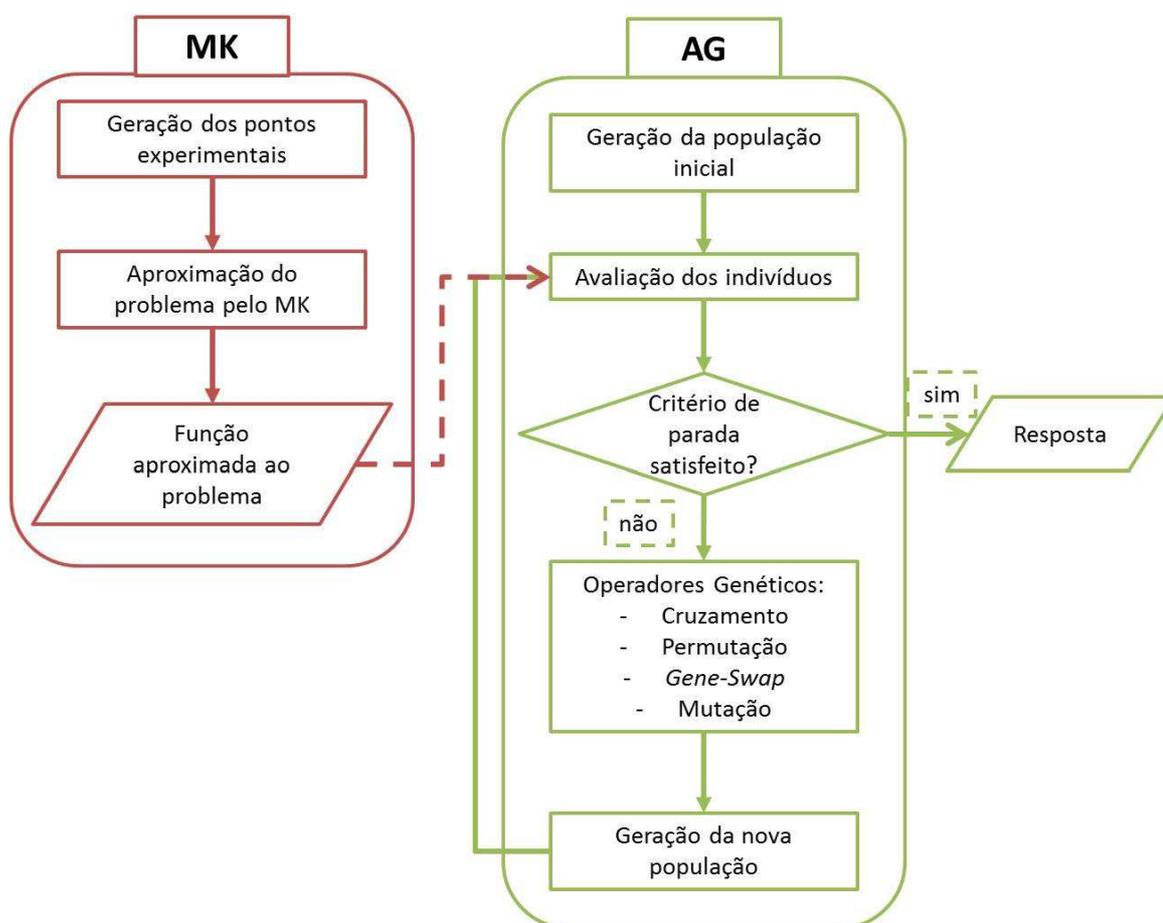


Figura 19 – Fluxograma do MK conjugado ao AG

4.2 Procedimento de Otimização utilizando o Método dos Elementos Finitos

Para calcular o critério de falha, ou de flambagem, de uma geometria qualquer, para qualquer condição de contorno o método dos elementos finitos (MEF) pode ser aplicado. Portanto, foi desenvolvida uma rotina que realiza a interface entre o MATLAB e o ANSYS (programa de elementos finitos utilizado). Tal rotina é utilizada durante a avaliação dos indivíduos no AG, para se obter o valor do critério de falha, e utiliza como parâmetros de entrada a orientação das lâminas escritas em um arquivo de formato *.txt*, o problema é então resolvido pelo MEF que gera um arquivo com a resposta, que é então lido pelo MATLAB. Tal procedimento está demonstrado no fluxograma da Figura 20.

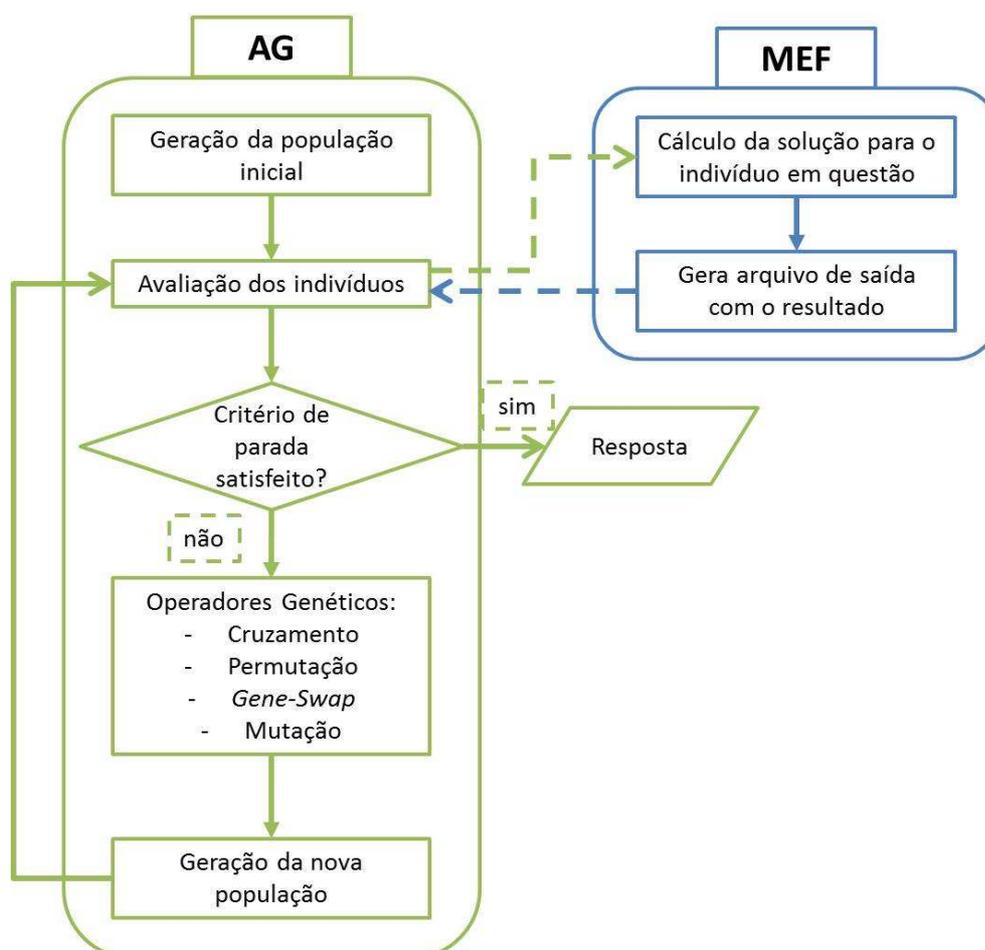


Figura 20 – Fluxograma da ligação entre o AG e o MEF.

4.3 Procedimento de Otimização utilizando o Modelo de Kriging e o Método dos Elementos Finitos

Por fim, a rotina que visa cumprir o objetivo deste trabalho de conclusão de curso foi implementada, nela o valor dos pontos experimentais é calculado através do programa comercial de elementos finitos ANSYS (versão 11.0, Academic Associate), para então utilizar o método de Kriging e realizar a aproximação dos pontos calculados. Como resultado, obtém-se uma equação de aproximação, que é então utilizada ao longo do processo de otimização pelo AG para realizar a avaliação dos indivíduos. A primeira parte desta rotina está demonstrada no fluxograma da Figura 21. A segunda parte é bastante similar ao fluxograma apresentado na Figura 19, em que a função de aproximação resultante do MK é utilizada durante a avaliação do AG para calcular o critério de falha ou a carga de flambagem.

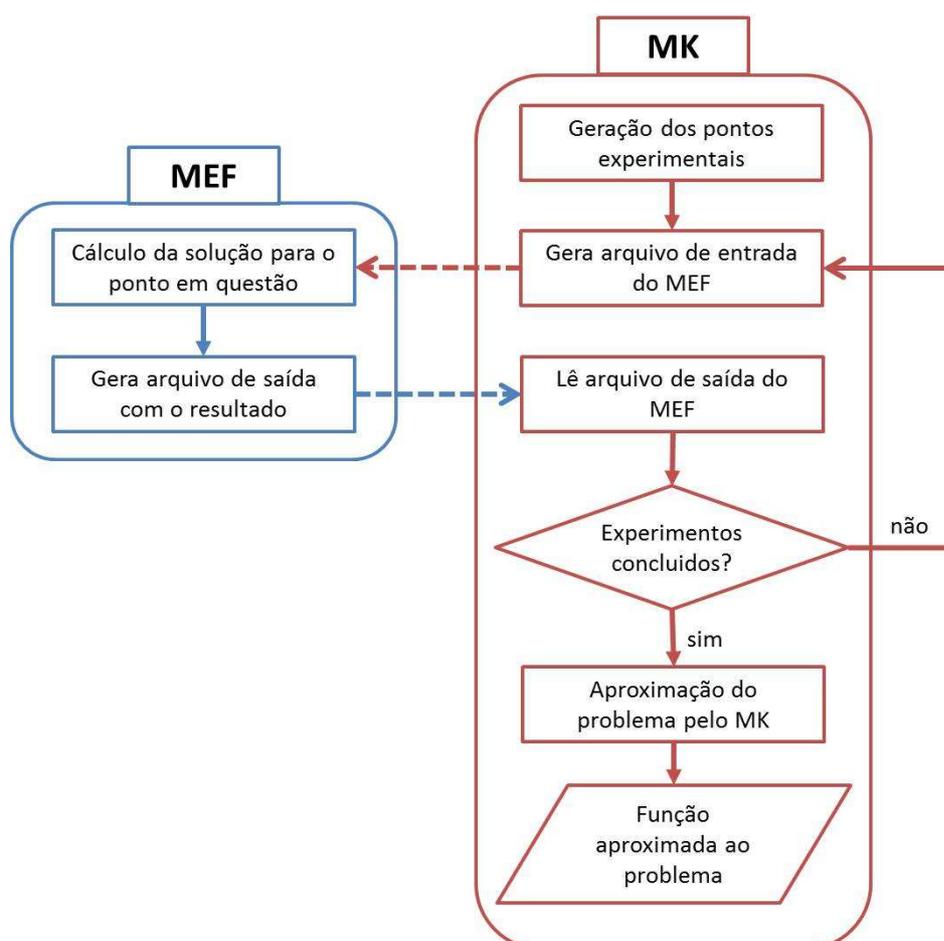


Figura 21 – Fluxograma da ligação entre o Modelo de Kriging (MK) e a análise por elementos finitos (MEF).

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo são demonstrados e discutidos os resultados obtidos pela aproximação através do modelo de Kriging e para a otimização utilizando o AG e o MK. Primeiramente são analisadas funções matemáticas analíticas, em seguida o modelo é aplicado para aproximar o comportamento mecânico de materiais compostos laminados, especificamente o critério de falha de Tsai-Wu e a carga crítica de flambagem.

Então, são realizadas otimizações utilizando os Algoritmos Genéticos, e a conjugação deste com o MK, de forma a verificar a qualidade da solução e a diferença de tempo para obter a solução. Por fim o método dos elementos finitos é utilizado juntamente a estes algoritmos, de forma a comparar-se as respostas obtidas e os tempos de otimização.

5.1 Modelagem de funções matemáticas

Nesta seção são comparados os resultados obtidos através do modelo de Kriging com os valores exatos de algumas funções de teste. Essas funções foram reunidas de diferentes autores por MARTIN e SIMPSON (2004).

A primeira função simulada é definida por

$$y(x_1, x_2) = \cos(6(x_1 - 0,5)) + 3,1(|x_1 - 0,7|) + 2(x_1 - 0,5) + 7 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{|0,5x_1| + 0,31}\right) + 0,5x_2 \quad , \quad (34)$$

cuja principal característica é uma grande não linearidade na variável x_1 , enquanto que para a variável x_2 seu comportamento é linear. Esta característica pode ser facilmente observada na Figura 22.

A Tabela 1 mostra os parâmetros utilizados na aproximação pelo modelo de Kriging. Como o domínio das variáveis é bastante pequeno, o número de experimentos também foi pequeno. A Figura 23 mostra o resultado da aproximação para esta função e a diferença entre a aproximação e o valor original da função.

Sendo que a maior diferença se concentrou na região de fronteira, onde havia um menor número de pontos experimentais.

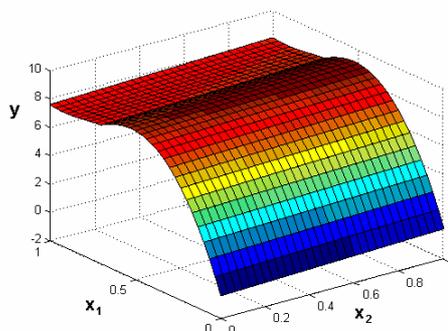


Figura 22 – Gráfico da função representada na equação (34).

Tabela 1 – Parâmetros utilizados na aproximação linear da equação (34).

Domínio	$x_1, x_2 \in [0,1]$
Fator de correlação - θ	0,1
Número de experimentos - k	25
Função de base - $f_b(\mathbf{x})$	Tipo 4

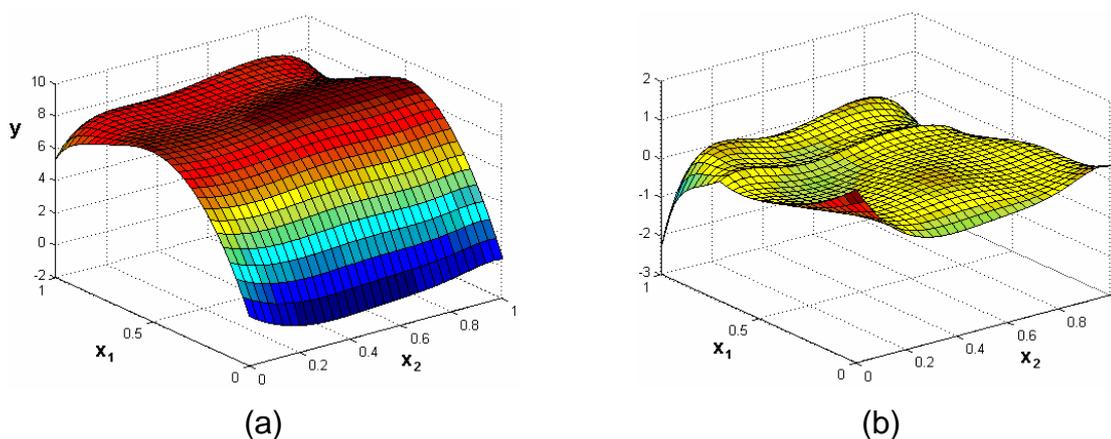


Figura 23 – (a) Resultado da aproximação pelo modelo de Kriging e (b) subtração da aproximação com a função real.

A próxima função a ser analisada é

$$y(x_1, x_2) = 2 + 0,01(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1) + 2(2 - x_2)^2 + 7 \operatorname{sen}(0,5x_1) \operatorname{sen}(0,7x_1x_2), \quad (35)$$

a qual está representada graficamente na Figura 24. Esta função é bastante irregular, portanto um número maior de experimentos se fez necessário para realizar a aproximação. Além disso, como mostrado na Tabela 2, o domínio em que a função é analisada é maior que no primeiro caso, o que também justifica o aumento do número de pontos experimentais.

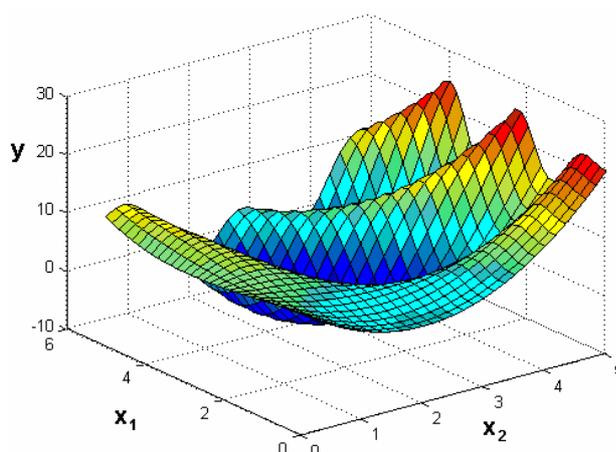


Figura 24 – Gráfico da função representada na equação (35).

Tabela 2 – Parâmetros utilizados na aproximação linear da equação (35).

Domínio	$x_1, x_2 \in [0,5]$
Fator de correlação - θ	0,75
Número de experimentos - k	100
Função de base - $f_b(\mathbf{x})$	Tipo 4

O resultado obtido para a aproximação desta função está mostrado graficamente na Figura 25. Como pode se constatar, o erro foi mais elevado que no caso anterior, entretanto a complexidade da função também é mais elevada neste caso. Além do mais, como no caso anterior, a maior diferença entre a aproximação e a função real está na região de contorno do domínio.

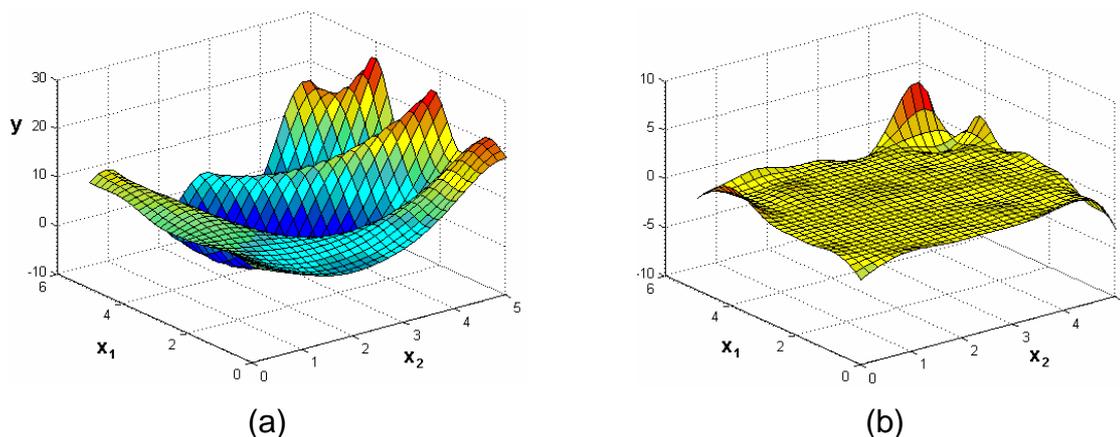


Figura 25 – (a) Resultado da aproximação pelo modelo de Kriging e (b) subtração da aproximação com a função real.

A terceira função a ser aproximada é

$$y(x_1, x_2) = \left(x_2 - \frac{5,1}{4\pi^2} x_1^2 + \frac{5}{\pi} x_1 - 6 \right)^2 + 10 \left(1 - \frac{1}{8\pi} \right) \cos(x_1) + 10, \quad (36)$$

a qual está representada graficamente na Figura 26. Tal função é mais simples que as anteriores, entretanto o espaço de análise é maior. A Tabela 3 mostra os parâmetros utilizados na aproximação. O pequeno valor do fator de correlação é devido à maior distância entre os pontos experimentais, pois nos casos anteriores os pontos estavam mais próximos e não exigiam um fator tão pequeno.

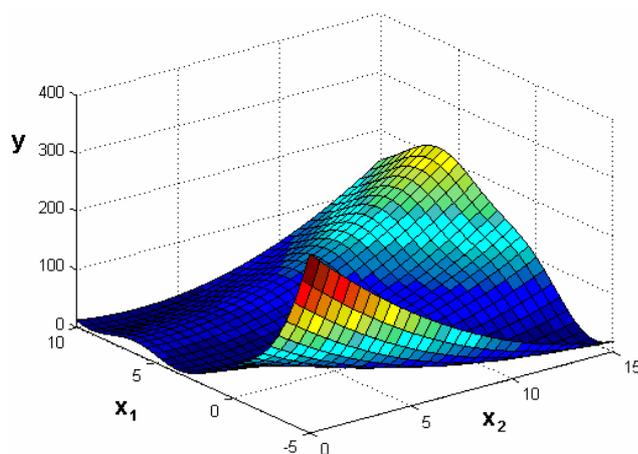


Figura 26 – Gráfico da função representada na equação (36).

Tabela 3 – Parâmetros utilizados na aproximação linear da equação (36).

Domínio	$x_1 \in [-5,10], x_2 \in [0,15]$
Fator de correlação - θ	0,05
Número de experimentos - k	100
Função de base - $f_b(\mathbf{x})$	Tipo 4

A Figura 27 mostra a aproximação resultante da aplicação do modelo de Kriging. O erro é bastante pequeno ao longo de quase toda a função, com exceção do limite de seu domínio, em que há um erro visivelmente mais elevado.

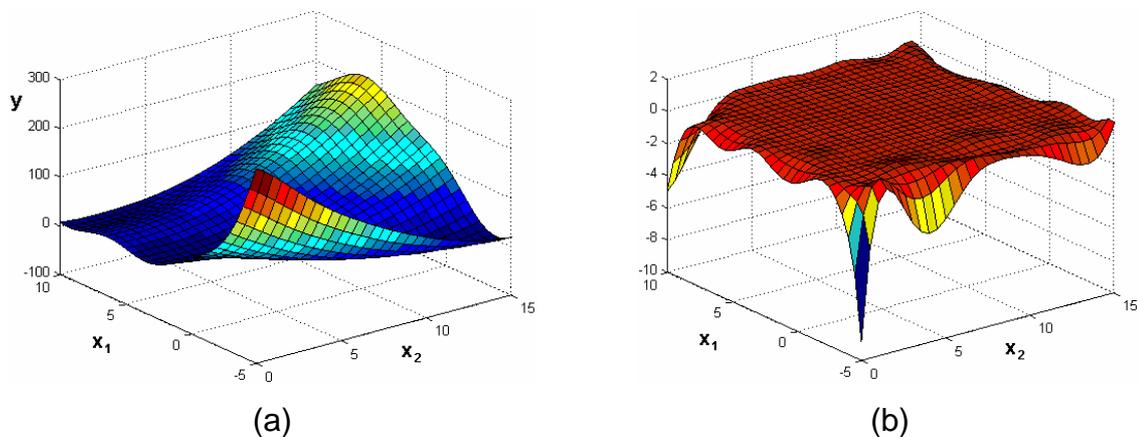


Figura 27 – (a) Resultado da aproximação pelo modelo de Kriging e (b) subtração da aproximação com a função real.

A última função a ser analisada nesta seção é

$$y(x_1, x_2) = \left(4 - 2,1x_1^2 + \frac{x_1^4}{3} \right) x_1^2 + x_1 x_2 + (4x_2^2 - 4)x_2^2 \quad (37)$$

A Figura 28 mostra os resultados obtidos para esta função. Para se realizar a aproximação foram utilizados os parâmetros listados na Tabela 4. Por fim, na Figura 29, pode ser visualizada a função aproximada e a diferença entre a aproximação e a função original.

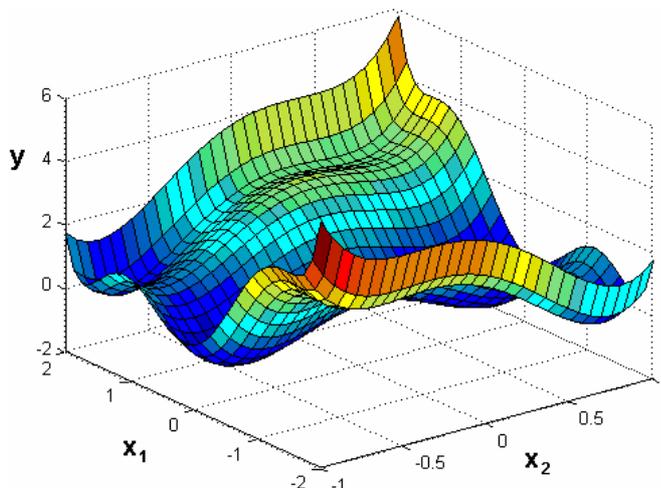
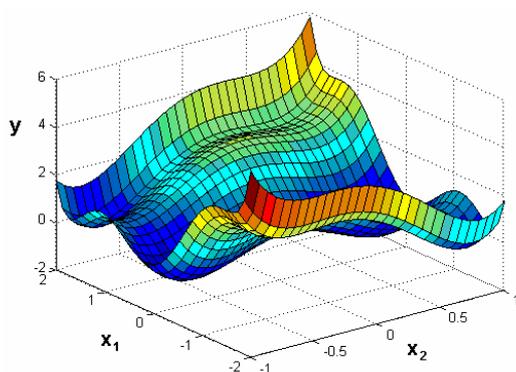


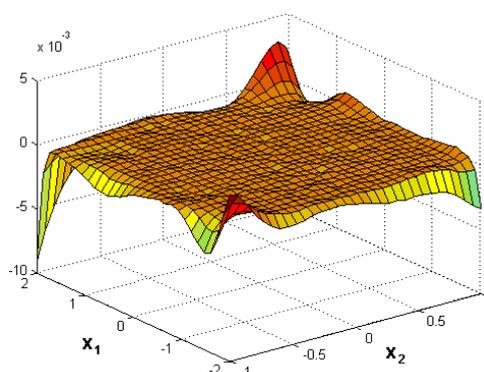
Figura 28 – Gráfico da função representada na equação (37).

Tabela 4 – Parâmetros utilizados na aproximação linear da equação (37).

Domínio	$x_1 \in [-2,2], x_2 \in [-1,1]$
Fator de correlação - θ	0,1
Número de experimentos - k	100
Função de base - $f_b(x)$	Tipo 4



(a)



(b)

Figura 29 – (a) Resultado da aproximação pelo modelo de Kriging e (b) subtração da aproximação com a função real.

Em todos os casos a maior diferença entre o modelo reduzido e o detalhado estava localizada na região da fronteira do domínio. Isto, pois, há uma menor quantidade de pontos experimentais próximos da região de fronteira do domínio quando comparado aos demais pontos do espaço de análise, fazendo com que estes não sejam tão bem aproximados em relação aos demais.

5.2 Modelagem do critério de falha e flambagem em materiais compostos

A rotina que realiza o cálculo do critério de falha de Tsai-Wu e da carga crítica de flambagem aqui utilizada foi desenvolvida por VAN BOGGELEN (2006) e resumida de forma a obter apenas as respostas necessárias nesta análise. Ela também foi adaptada para realizar os cálculos com laminado simétrico e balanceado. Lâminas de mesma orientação empilhadas de forma simétrica em relação ao plano central do laminado geram a condição de simetria. Já um laminado balanceado é gerado quando tem-se a condição de uma lâmina com θ negativo para cada lâmina com θ positivo., como por exemplo, para uma lâmina de 30° deve haver uma lâmina de -30° .

Nesta última seção de resultados foram analisados o comportamento da aproximação de materiais compostos pelo modelo de Kriging, bem como a influência da função de base. Tais funções foram previamente definidas na seção 3.1, e a função de tipo 0 remete a função constante, a função de tipo 1 é polinomial, e as funções dos tipos 2 a 4 são trigonométricas. Para não haver influência dos pontos experimentais sobre os resultados, foram utilizados sempre os mesmos pontos para todos os casos.

Os dados utilizados nos problemas desta seção estão descritos na Tabela 5, e os dados utilizados para o material estão na Tabela 6, sendo que cada lâmina possui uma espessura de 0,3mm.

Tabela 5 – Dados utilizados no cálculo da aproximação para materiais compostos laminados.

Domínio	$\alpha_1 \in [-90,90], \alpha_2 \in [-90,90]$
Fator de correlação - θ	0,0005
Número de experimentos - k	40
l_p e w_p	40 mm
N_x	160 N/mm
N_y	0

Tabela 6 – Características mecânicas da lâmina.

Módulo de Young na direção paralela à fibra – E_1 [MPa]	126000
Módulo de Young na direção perpendicular à fibra – E_2 [MPa]	11000
Módulo de cisalhamento no plano da lâmina – G_{12} [MPa]	6600
Coefficiente de Poisson – ν_{12}	0,28
Resistência à tração na direção da fibra – S_{Lt} [MPa]	1950
Resistência à compressão na direção da fibra – S_{Lc} [MPa]	1480
Resistência à tração na direção perpendicular à fibra – S_{Tt} [MPa]	48
Resistência à compressão na direção perpendicular à fibra – S_{Tc} [MPa]	200
Resistência ao cisalhamento – S_{LT} [MPa]	49

A placa quadrada de material composto laminado analisada é constituída de um total de oito lâminas simétricas e balanceadas, resultando num total de duas variáveis. O ângulo α_1 representa a lâmina mais externa, e o ângulo α_2 a mais interna. O resultado obtido utilizando o modelo detalhado (TCL) para o critério de falha de Tsai-Wu está na Figura 30(a) e demonstra que para ângulos próximos de 0° para ambas as placas o critério de falha é menor, isto pois a direção de carregamento é paralela ao eixo x, ou seja, a orientação de 0° alinharia a fibra à carga.

Já a carga crítica de flambagem está representada na Figura 30(b), e é clara a maior influência do ângulo α_1 sobre o resultado. Isto acontece pois tal lâmina é externa e, portanto, apresenta maior influência sobre a flambagem.

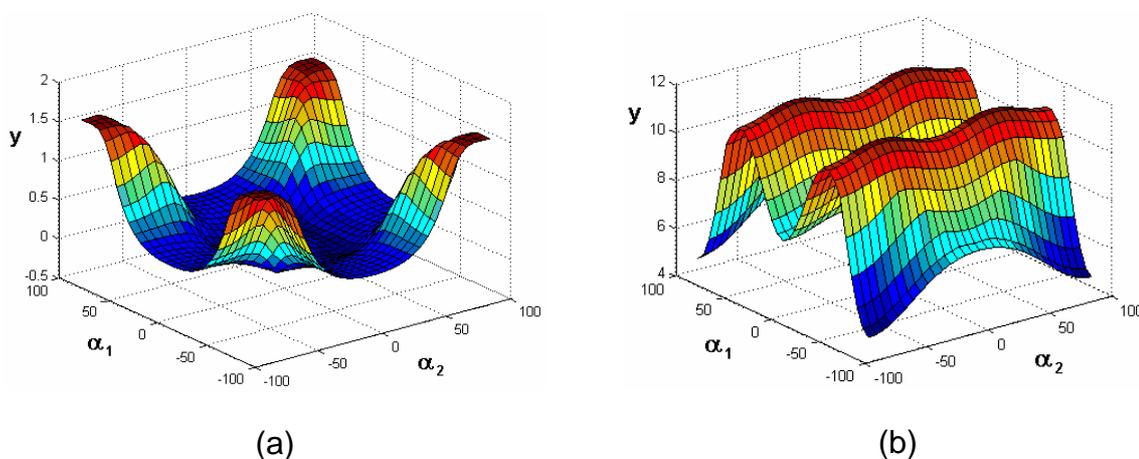


Figura 30 – (a) Representação do critério de falha de Tsai-Wu e (b) carga crítica de flambagem, em função dos ângulos de orientação das lâminas.

Primeiramente o critério de Tsai-Wu foi aproximado pelo MK utilizando as diferentes funções de base. A Tabela 7 demonstra os resultados obtidos e observa-se que, mesmo variando-se a função de base, os resultados são bastante similares. Em todos os casos analisados as aproximações se comportaram de forma análoga ao modelo detalhado. As funções do tipo 0 e do tipo 1 apresentaram erro bastante similar, e em certas regiões do domínio a função do tipo 0 foi melhor que a de tipo 1, enquanto em outras ocorreu o contrário. As funções que geraram melhores modelos reduzidos foram as do tipo 2 a 4, sendo que a função de base do tipo 4 apresentou o menor erro dentre todas as funções, mas a diferença entre as funções trigonométricas neste caso foi bastante pequeno.

Por fim a carga crítica de flambagem foi analisada, e os resultados estão apresentados na Tabela 8. Novamente a função de base que melhor aproximou o modelo foi a de tipo 4, e nesse caso o resultado é mais perceptível que no anterior. A função de tipo 0 gerou a pior das aproximações. A de tipo 1, apesar de aproximar melhor que a de tipo 0, ainda possuiu erros muito elevados. A função de tipo 2 reduz estes erros presentes na de tipo 1. E da mesma forma a de tipo 3 aproxima melhor que a de tipo 2, mas as diferenças não são muito significativas. Já a de tipo 4 apresenta diferenças significativas quando comparada as demais e a diferença existente entre ela e o modelo detalhado é o menor dos apresentados. Além do mais, como anteriormente verificado, o erro ficou mais concentrado nas regiões limites do domínio. Por fim, para ambas as funções analisadas nesta seção o comportamento do modelo reduzido ao utilizar a função de base do tipo 4 é bastante similar ao modelo detalhado. A utilização de um número maior de pontos em ambos os casos geraria uma aproximação melhor, entretanto seriam necessários mais avaliações do modelo detalhado.

Tabela 7 – Resultados da aproximação para o critério de Tsai-Wu.

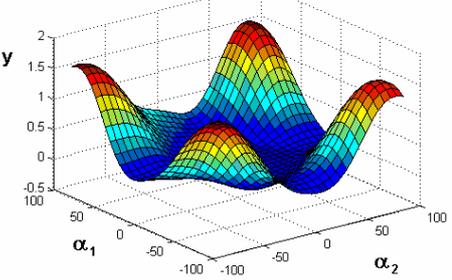
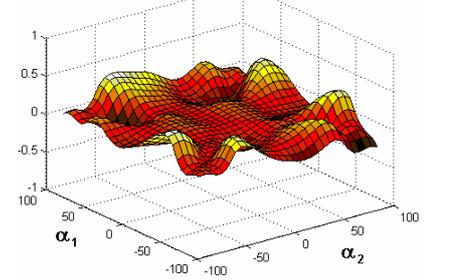
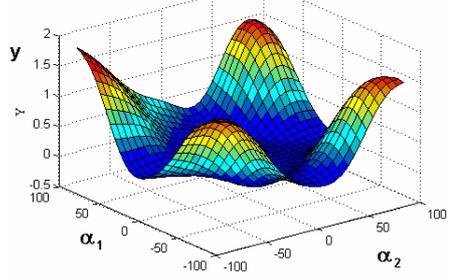
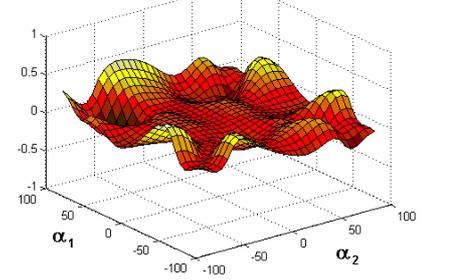
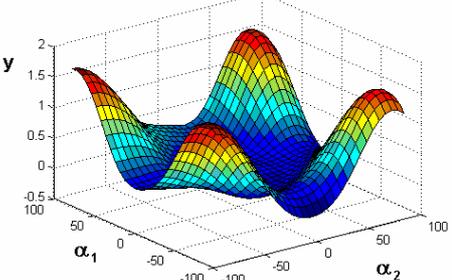
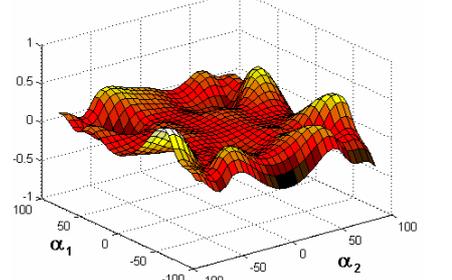
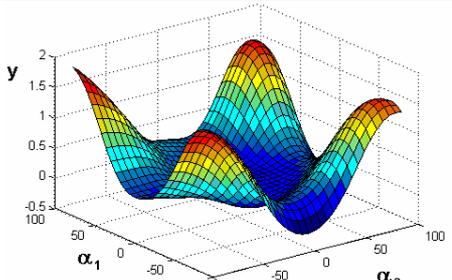
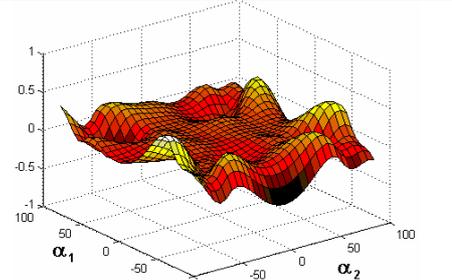
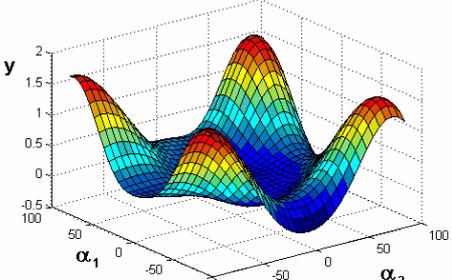
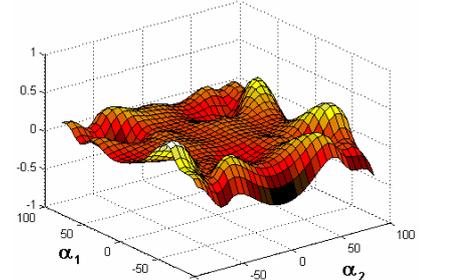
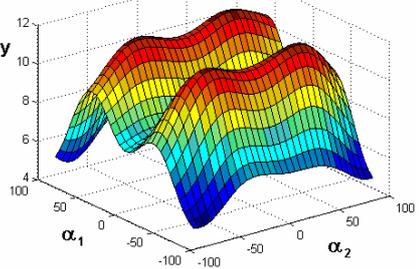
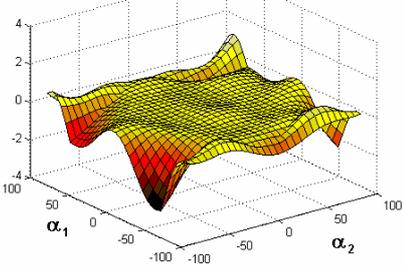
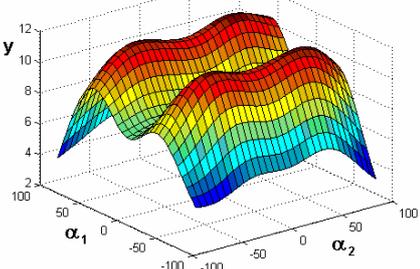
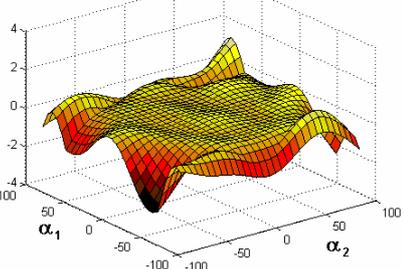
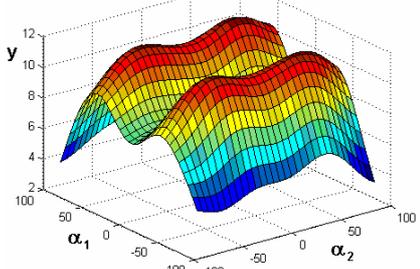
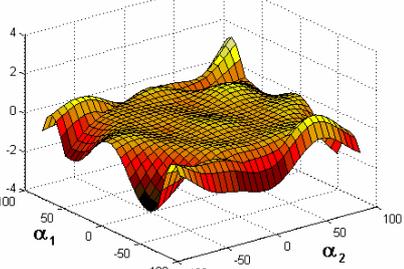
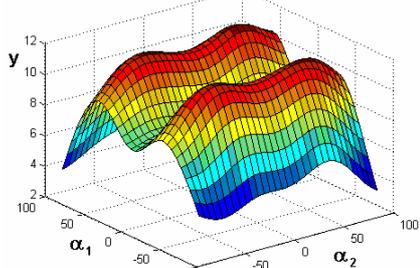
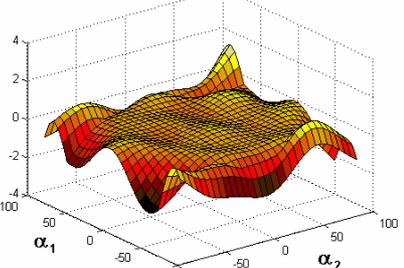
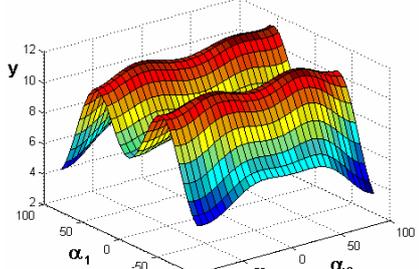
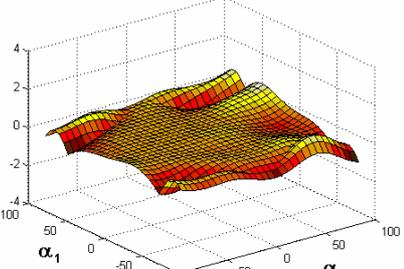
Função de base	Aproximação obtida para o critério de falha de Tsai-Wu	Diferença entre o modelo detalhado e o modelo reduzido
Tipo 0		
Tipo 1		
Tipo 2		
Tipo 3		
Tipo 4		

Tabela 8 – Resultados da aproximação para a carga crítica de flambagem.

Função de base	Aproximação obtida para a carga crítica de flambagem	Diferença entre o modelo detalhado e o modelo reduzido
Tipo 0		
Tipo 1		
Tipo 2		
Tipo 3		
Tipo 4		

5.3 Otimização de Materiais Compostos Laminados utilizando o Modelo de Kriging combinado com AG

Nesta seção uma placa plana quadrada com 1 metro de comprimento é otimizada. Primeiramente em relação ao critério de falha de Tsai-Wu e depois em relação à flambagem. As propriedades utilizadas no material da lâmina para esta e as próximas seções estão listadas na Tabela 9.

Tabela 9 – Propriedades elásticas e densidade do material.

E_1	116,6 GPa
E_2	7,673 GPa
G_{12}	4,173 GPa
ν_{12}	0,27
ρ	1600 kg/m ³

Para obtenção dos critérios de falha é necessário também as tensões de ruptura do material. Os valores considerados para essas tensões ao longo destas seções estão mostrados na Tabela 10.

Tabela 10 – Propriedades de falha do material.

S_{Lt}	2062 MPa
S_{Lc}	1701 MPa
S_{Tt}	70 MPa
S_{Tc}	240 MPa
S_{LT}	105 MPa

Para o AG variou-se o número de gerações conforme o número de variáveis, entretanto a população e os operadores foram deixados constantes ao longo da otimização. A Tabela 11 mostra estes dados.

Tabela 11 – Parâmetros do AG.

População	25
Indivíduos que sofrem cruzamento	10
Indivíduos que sofrem permutação	10
Indivíduos que sofrem <i>gene-swap</i>	8
Probabilidade de mutação	5%

O número de lâminas variou entre os casos simulados, assim como sua espessura, entretanto a espessura total do laminado foi mantida constante em 4,8 mm. Para todos os problemas resolvidos as lâminas sempre foram mantidas simétricas e balanceadas. Conseqüentemente, o número de variáveis é equivalente a $\frac{1}{4}$ do número total de lâminas. A Tabela 12 mostra o número de soluções possíveis para cada um dos casos, visto que existem cinco possibilidades de orientação para cada lâmina: 0, 30, 45, 60 e 90 graus. Também são apresentados na Tabela 12 o número de gerações a ser utilizado na solução através do AG bem como o número correspondente de avaliações da função objetivo.

Tabela 12 – Número de soluções para cada problema.

Caso	Número de lâminas	Número de variáveis	Número de soluções	Gerações	Número de avaliações da função objetivo
1	24	6	15625	50	1250
2	32	8	390625	100	2500
3	48	12	$2,4 \times 10^8$	100	2500
4	96	24	6×10^{16}	200	5000
5	192	48	$3,6 \times 10^{33}$	500	12500

A fim de poder comparar-se o tempo computacional das diferentes otimizações, todas elas foram realizadas por uma mesma CPU, com processador Core 2 Duo de 2,67GHz e 2GB de memória RAM.

No primeiro caso a ser otimizado uma força por unidade de comprimento de 4×10^6 N/mm traciona o laminado na direção x, como mostrado na Figura 31.

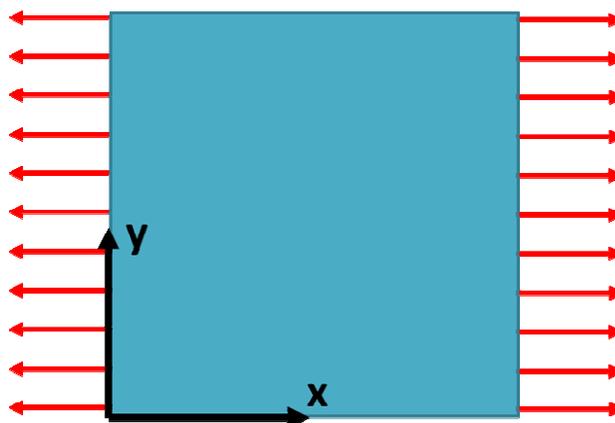


Figura 31 – Representação do carregamento.

O problema de otimização pode ser assim escrito como:

Variáveis de projeto: Orientação das lâminas.

Função objetivo: Minimização do valor do critério de falha de Tsai-Wu.

Restrição: Sem restrições.

Para avaliar a aptidão A de cada lâmina foi utilizada a seguinte equação

$$A = 10\sqrt[3]{TW} + 20 \quad (38)$$

em que TW é o valor do critério de falha de Tsai-Wu para o indivíduo em questão. Esta função permite que haja uma maior diferenciação entre os resultados que respeitam o critério de falha e os que não respeitam, devido tanto a raiz cubica e ao fator 10, além de auxiliar na aproximação do modelo de Kriging tornando a função mais estável.

De forma a obter uma referência para a otimização a ser praticada com o MK, primeiramente o caso foi resolvido com a utilização apenas do AG, os resultados obtidos estão mostrados na Tabela 13.

Com isto verifica-se que o valor ótimo para o problema é de 0,112, quando todas as lâminas estão empilhadas na direção da força de tração. Além disto, verifica-se que para o caso 5 o problema não converge para o resultado ótimo.

Tabela 13 – Soluções obtidas pelo AG para otimização do critério de falha de Tsai-Wu.

Caso	Valor ótimo obtido (aptidão)	Empilhamento obtido	Tempo de otimização (s)
1	0,112 (24,82)	[0 ₁₂]s	~5
2	0,112 (24,82)	[0 ₁₆]s	~11
3	0,112 (24,82)	[0 ₂₄]s	~16
4	0,112 (24,82)	[0 ₄₈]s	~62
5	0,187 (25,72)	[0 _{72 ±30} ₁₂]s	~340

Então, o caso é simulado utilizando a aproximação através do modelo de Kriging com 300 pontos experimentais e coeficiente de correlação de 0,1. O problema foi resolvido tanto para a função de base do tipo 4, que anteriormente melhor aproximou os resultados, quanto para o tipo 2, que prevê-se ser mais rápida que a de tipo 4 devido a sua menor complexidade. A Tabela 14 mostra os resultados obtidos para a função de base do tipo 2. E, como o tempo computacional é muito baixo para a otimização ao utilizar-se as equações analíticas verifica-se uma redução neste tempo apenas para os casos com um maior número de variáveis.

A Tabela 15 demonstra os resultados obtidos para a otimização com a função de base de tipo 4. Verifica-se que os tempos computacionais são mais elevados em relação à utilização da função de base de tipo 2, o que já era previsto devido a maior complexidade desta função de base. Entretanto, para os casos com grande número de variáveis os tempos computacionais foram extremamente elevados, quando comparados a outra função de base.

Tabela 14 – Soluções obtidas para o critério de Tsai-Wu pelo MK com função de base do tipo 2.

Caso	Valor aproximado para aptidão	Empilhamento obtido	Tempo de otimização (s)
1	22,53	[0 ₁₂]s	~105
2	22,53	[0 ₁₆]s	~46
3	23,47	[0 ₂₄]s	~23
4	23,55	[0 ₄₈]s	~23
5	23,91	[0 _{90 ±30} ₃]s	~95

Tabela 15 – Soluções obtidas para o critério de Tsai-Wu pelo MK com função de base do tipo 4.

Caso	Valor aproximado para aptidão	Empilhamento obtido	Tempo de otimização (s)
1	25,43	$[0_8 \pm 60_2]_s$	~120
2	28,31	$[0_8 \pm 30 \pm 60_2 90_2]_s$	~79
3	24,08	$[0_{10} \pm 30_3 90_8]_s$	~77
4	23,38	$[0_{30} \pm 60 90_{16}]_s$	~408
5	22,62	$[0_{52} \pm 60_2 90_{40}]_s$	~3860

Verifica-se que a função de base de tipo 2 tem melhor convergência para o ótimo, e também um menor tempo de solução que a função de tipo 4. Além do mais, para função de tipo 2, a solução ótima não foi obtida apenas no caso 5, como ocorreu com o caso em que se utilizou apenas os AG.

A qualidade da aproximação é então verificada através do cálculo do erro relativo entre o valor da aptidão obtida pela aproximação e aptidão real da solução calculada de maneira convencional com o empilhamento obtido. As comparações realizadas para a função de base do tipo 2 estão na Tabela 16 e para a do tipo 4 na Tabela 17. E neste caso a função de base de tipo 2 também se destaca, realizando uma melhor aproximação para o problema em questão.

Tabela 16 – Erro relativo da aproximação pelo MK com função de base do tipo 2.

Caso	Valor aproximado para aptidão	Valor real da aptidão	Erro relativo (%)
1	22,53	24,82	-9,2
2	22,53	24,82	-9,2
3	23,47	24,82	-5,4
4	23,55	24,82	-5,1
5	23,91	26,36	-9,3

Tabela 17 – Erro relativo da aproximação pelo MK com função de base do tipo 4.

Caso	Valor aproximado para aptidão	Valor real da aptidão	Erro relativo (%)
1	25,44	29,77	-14,5
2	28,31	31,10	-9,0
3	24,09	31,29	-23,0
4	23,38	30,78	-24,0
5	22,61	31,42	-28,0

Por fim os valores dos critérios de falha resultantes da aproximação para função de base do tipo 2, do tipo 4 são comparados com o valor ótimo do critério de falha obtido pelo AG, a Tabela 18 faz esta comparação. Como a espessura do laminado é constante, tem-se que o menor valor para falha para o problema é de 0,112, no caso em que todas as lâminas estão na mesma direção que o carregamento e como obtido anteriormente pelo AG.

Esse resultado ressalta a qualidade da aproximação utilizando a função de base de tipo 2 em detrimento da de tipo 4, visto que o valor ótimo do critério de falha obtido pela função de tipo 4 é na maioria dos casos maior que 1, o que demonstra a ocorrência de falha no material, o que não ocorre no caso com função de base de tipo 2, em que mesmo quando o resultado obtido não foi o ótimo, ele ficou abaixo do critério de falha.

Tabela 18 – Comparação do valor ótimo do critério de falha de Tsai-Wu obtido.

Caso	Valor da solução obtida pelo tipo 2	Valor da solução obtida pelo tipo 4	Valor obtido pelo AG
1	0,112	0,933	0,112
2	0,112	1,368	0,112
3	0,112	1,439	0,112
4	0,112	1,253	0,112
5	0,2329	1,490	0,1873

Diferentemente do previsto, a função de base do tipo 2 resultou em aproximações muito melhores que a de tipo 4, além do mais o tempo necessário

para rodar tal aproximação é menor. As soluções obtidas para o empilhamento são bastante similares às obtidas pelo AG, sendo que apenas no caso com 48 variáveis a solução obtida não foi à ótima para ambos os casos.

No segundo caso, o critério de flambagem foi analisado para uma placa quadrada com cargas compressivas de $1 \times 10^3 \text{ N/mm}$ atuando nas duas direções, como mostrado na Figura 33.

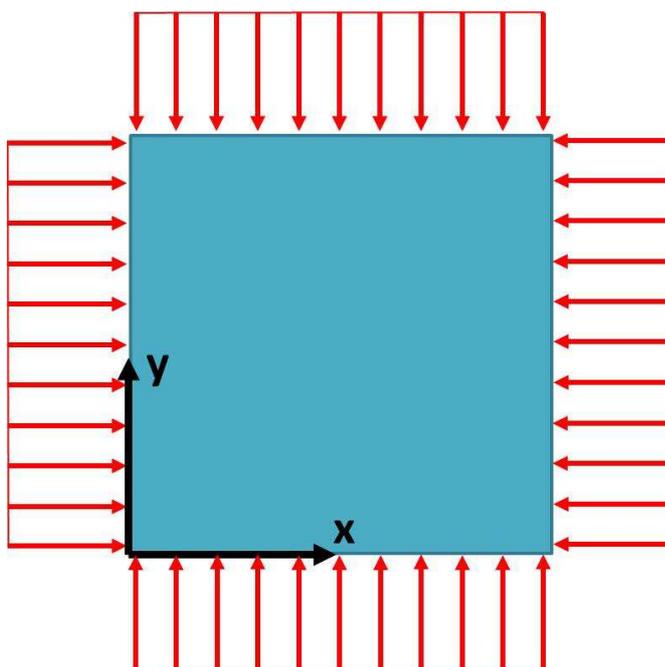


Figura 32 – Representação dos carregamentos para análise de flambagem.

O problema de otimização neste caso pode ser assim escrito como:

Variáveis de projeto: Orientação das lâminas.

Função objetivo: Maximização do valor do λ_{cr} .

Restrição: Sem restrições.

Assim como no exemplo anterior, o problema foi primeiramente resolvido com a utilização do AG, e os resultados estão na Tabela 19.

Tabela 19 – Soluções obtidas pelo AG para o critério de flambagem.

Caso	Valor do ótimo obtido (λ_{cr})	Empilhamento obtido	Tempo de otimização (s)
1	11,358	$[\pm 45_6]_S$	~5
2	11,358	$[\pm 45_8]_S$	~11
3	11,358	$[\pm 45_{12}]_S$	~16
4	11,358	$[\pm 45_{24}]_S$	~64
5	11,322	$[\pm 45_{26} \pm 30 \pm 45_6 \pm 60 \pm 45_3 \pm 60 \pm 30_2 \pm 45 \pm 60_2 90 \pm 60 \pm 45_2 \pm 30]_S$	~340

Neste problema, a solução ótima é obtida com o alinhamento das lâminas a ± 45 graus, visto que as cargas são as mesmas em ambas as direções, assim como o comprimento, e neste caso o valor do λ_{cr} é de 11,358. Os tempos de otimização são bastante similares aos anteriores, visto que a complexidade do problema é a mesma. Em seguida o problema é otimizado utilizando o MK com 300 pontos experimentais e coeficiente de correlação de 0,1. Assim como no primeiro problema desta seção as funções de base de tipo 2 e 4 foram utilizadas. Os resultados obtidos para a função de base de tipo 2 estão apresentados na Tabela 20, enquanto para a de tipo 4 na Tabela 21, e são bastante semelhantes aqueles obtidos anteriormente.

Tabela 20 – Soluções obtidas pelo MK para o critério de flambagem com função de base do tipo 2.

Caso	Valor aproximado para o λ_{cr}	Empilhamento obtido	Tempo de otimização (s)
1	11,242	$[\pm 45_6]_S$	~110
2	11,252	$[\pm 45_7 \pm 30]_S$	~50
3	11,230	$[\pm 45_{11} \pm 60]_S$	~23
4	11,252	$[\pm 45_{22} \pm 60 0_2]_S$	~23
5	11,217	$[\pm 45_{38} \pm 30 \pm 60_6 0_4 90_2]_S$	~95

Tabela 21 – Soluções obtidas pelo MK para o critério de flambagem com função de base do tipo 4.

Caso	Valor aproximado para o λ_{cr}	Empilhamento obtido	Tempo de otimização (s)
1	11,276	$[\pm 45_6]_S$	~105
2	11,359	$[\pm 45_8]_S$	~75
3	11,338	$[\pm 45_{11} 0_2]_S$	~77
4	11,640	$[\pm 45_{13} \pm 60_2 \pm 30_4 \pm 90_6 \pm 30_2]_S$	~410
5	11,803	$[\pm 45_{35} \pm 30_8 \pm 60_4]_S$	~3950

Neste caso o valor da aproximação obtida é bastante similar para ambos os casos, havendo uma maior diferença com o aumento do número de variáveis. Entretanto a sequência de empilhamento é bastante distinta, sendo que para a função de tipo 2, essa sequência se encontra mais próxima do ideal.

Para verificar a qualidade da solução o erro relativo da aproximação da solução obtida para as funções de base do tipo 2 e do tipo 4 foi calculado através da comparação entre o valor da aproximação pelo MK e o valor calculado analiticamente para o empilhamento obtido. Os resultados obtidos para o valor dos erros estão na Tabela 22, para função de base de tipo 2, e na Tabela 23, para função de base de tipo 4.

Tabela 22 – Erro relativo da aproximação pelo MK com função de base do tipo 2.

Caso	Valor aproximado para o λ_{cr}	Valor real da aptidão	Erro relativo (%)
1	11,242	11,358	-1,0%
2	11,252	11,358	-0,9%
3	11,230	11,358	-1,1%
4	11,252	11,357	-0,9%
5	11,217	11,308	-0,8%

Tabela 23 – Erro relativo da aproximação pelo MK com função de base do tipo 4.

Caso	Valor aproximado para o λ_{cr}	Valor real da aptidão	Erro relativo (%)
1	11,276	11,358	0,7%
2	11,359	11,358	0,0%
3	11,338	11,355	-0,1%
4	11,640	11,214	3,8%
5	11,803	11,189	5,5%

Para este caso a função de tipo 4 aproximou um pouco melhor os três primeiros casos, entretanto o erro dos casos com maior número de elemento foi mais elevado, assim como a diferença dos valor obtido para o ótimo.

Por fim, compara-se os valores dos λ_{cr} obtidos com a otimização através do AG e do modelo de Kriging. Para este caso, tem-se que o valor ótimo do problema é de 11,358, e a

Tabela 24 realiza a comparação.

Tabela 24 – Comparação do valor ótimo do λ_{cr} obtido.

Caso	Valor da solução obtida pelo tipo 2	Valor da solução obtida pelo tipo 4	Valor obtido pelo AG
1	11,358	11,358	11,358
2	11,358	11,358	11,358
3	11,358	11,355	11,358
4	11,357	11,214	11,358
5	11,308	11,189	11,322

Para o caso da flambagem, a diferença no resultado da aproximação entre a função de base de tipo 2 e de tipo 4 não foi tão significativa quanto para a aproximação do critério de falha de Tsai-Wu. Entretanto, para um número maior de variáveis ela apresentou melhores resultados, portanto nas simulações utilizando o programa de elementos finitos apenas a função de base de tipo 2 é utilizada para a realização das aproximações.

5.4 Otimização utilizando interface com o MEF

O primeiro caso analisado utilizando a interface com o método dos elementos finitos é idêntico ao primeiro caso resolvido na seção anterior. As condições de contorno aplicadas no modelo de elementos finitos feito no programa ANSYS foram semelhantes às anteriormente utilizadas. Entretanto a fim de diminuir o tempo computacional foi considerada a simetria na placa e, portanto, foi analisada uma placa quadrada de comprimento 0,5 metro, como a mostrada na Figura 33. Foi utilizada uma malha com 25 elementos de tipo *shell99* (ver Anexo A), com um total de 36 nós.

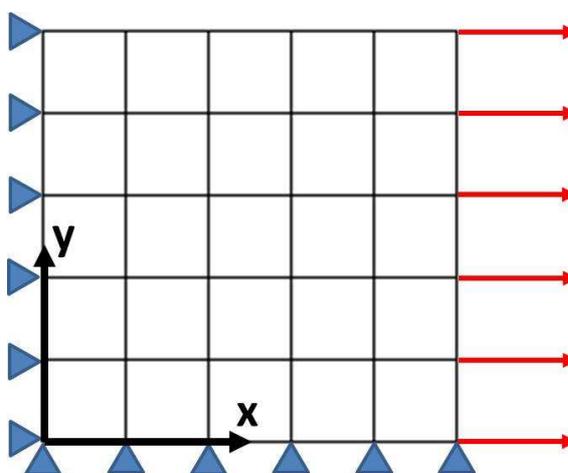


Figura 33 – Condições de contorno e elementos utilizados no MEF.

Primeiramente o caso foi otimizado utilizando o AG, para os casos de 6, 8 e 12 variáveis, a Tabela 25 demonstra os resultados obtidos. Os casos com 24 e 48 variáveis não foram simulados devido ao alto tempo computacional necessário para realizá-los. Uma estimativa, a partir do caso 3, com 100 gerações, aponta para mais de 35 horas de otimização para o caso 5 com 500 gerações.

Tabela 25 – Soluções obtidas pelo AG para o critério de Tsai-Wu.

Caso	Valor do ótimo obtido (aptidão)	Solução	Tempo de otimização
1	0,112 (24,82)	$[0_{12}]_s$	~3h15
2	0,112 (24,82)	$[0_{16}]_s$	~7h
3	0,112 (24,82)	$[0_{24}]_s$	~7h

Os resultados obtidos utilizando o programa de elementos finitos foi similar ao obtido anteriormente, inclusive o valor do critério de falha é o mesmo. Entretanto o tempo de execução da otimização aumentou, obviamente devido ao processo de cálculo ser realizado via elementos finitos.

A otimização foi então realizada com o MK, utilizando 300 pontos experimentais, fator de correlação de 0,1 e função de base do tipo 2, visto que a qualidade dos resultados com a função de base de tipo 4 foram inferiores aos esperados. Neste caso optou-se por otimizar o problema com 6, 8,12, 24 e 48 variáveis e os resultados obtidos estão demonstrados na Tabela 26.

Tabela 26 – Soluções obtidas pelo MK com função de base do tipo 2.

Caso	Valor aproximado para aptidão	Solução	Tempo de otimização
1	22,43	[0 ₁₂]s	~0h40
2	22,67	[0 ₁₆]s	~0h40
3	23,54	[0 ₂₄]s	~0h40
4	23,44	[0 ₄₈]s	~1h00
5	24,26	[0 _{92 ±30 ±45}]s	~1h35

As soluções obtidas são similares às obtidas na seção anterior, e também para os três primeiros casos otimizados através do AG. Entretanto, diferentemente da seção anterior, o tempo de otimização com a utilização do modelo de Kriging é bastante inferior ao tempo da utilização apenas do AG, o que demonstra a aplicabilidade do modelo na redução do tempo de otimização.

E a fim de verificar a qualidade da solução obtida os valores dos critérios de falha foram comparados ao valor ótimo na Tabela 27. O valor ótimo foi considerado como sendo 0,112, visto que o empilhamento está na mesma direção da carga e o valor é o mesmo que o obtido analiticamente na seção anterior. Verifica-se que apenas o caso com 48 variáveis não obteve o valor ótimo, o que também era previsto com base nos dados anteriores.

Tabela 27 – Valor obtido para o critério de falha.

Caso	Valor da solução obtida pelo tipo 2	Valor obtido pelo AG	Valor ótimo
1	0,112	0,112	0,112
2	0,112	0,112	0,112
3	0,112	0,112	0,112
4	0,112	-	0,112
5	0,4164	-	0,112

No segundo caso analisado com a utilização do método dos elementos finitos, uma placa quadrada de 1 metro de comprimento foi analisada para o caso de maximização do λ_{cr} . Neste caso uma malha com 100 elementos do tipo *shell99* e com um total de 121 nós foi utilizada, como mostra a Figura 34.

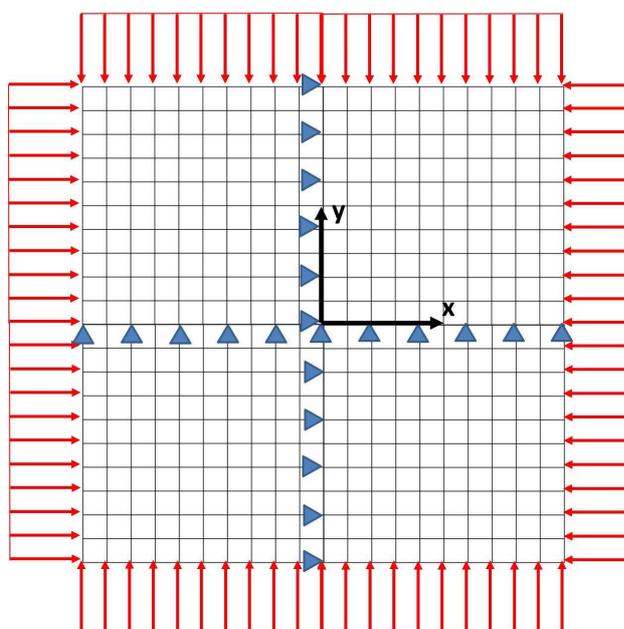


Figura 34 – Condições de contorno e malha utilizados no MEF.

O caso foi otimizado utilizando o AG, para 6, 8 e 12 variáveis, a Tabela 28 demonstra os resultados.

Tabela 28 – Soluções obtidas pelo AG.

Caso	Valor do ótimo obtido para λ_{cr}	Empilhamento obtido	Tempo de otimização
1	11,370	$[\pm 45_4 \pm 60 \pm 30]_S$	~3h
2	11,415	$[\pm 45_6 \pm 60 0_2]_S$	~6h30
3	11,445	$[\pm 45_9 \pm 60_2 \pm 45]_S$	~16h30

Os tempos de otimização neste caso foram mais elevados no caso anterior, em que se calculou o critério de falha de Tsai-Wu. Isto ocorreu devido a malha possuir um maior número de elementos, e também a maior complexidade do problema envolvendo a flambagem.

Em seguida utiliza-se o modelo de Kriging para realizar-se a otimização para os casos de 6, 8, 12, 24 e 48 variáveis. No MK foram utilizados 300 pontos experimentais, fator de correlação de 0,1 e função de base do tipo 2. Os resultados obtidos estão na Tabela 29.

Tabela 29 – Soluções obtidas pelo MK com função de base do tipo 2.

Caso	Valor do ótimo aproximado para λ_{cr}	Empilhamento obtido	Tempo de otimização
1	11,921	$[\pm 45_4 90_2 0_2]_S$	~0h45
2	12,231	$[\pm 45_5 \pm 60 0_2 \pm 30]_S$	~0h45
3	12,312	$[\pm 45_8 \pm 60 \pm 30 \pm 60 \pm 45]_S$	~0h50
4	12,552	$[\pm 45_{11} \pm 60 \pm 45_2 \pm 60_3 \pm 45_2 \pm 60 0_2 \pm 30 90_2 \pm 45]_S$	~1h10
5	12,612	$[\pm 45_5 \pm 60 \pm 45_2 \pm 60 \pm 45_3 \pm 60 \pm 45_2 \pm 60 \pm 45_3 \pm 60 \pm 45 \pm 30 \pm 45_3 \pm 30 \pm 45_2 \pm 60 \pm 45_5 90_2 \pm 60_3 0_2 \pm 60 \pm 30 90_2 \pm 60 0_2 90_6 0_2]_S$	~1h45

Novamente, a redução do tempo de otimização foi bastante elevada. Demonstrando que a aplicação do MK é eficaz na redução do tempo de otimização. E para se verificar a qualidade desta solução, os valores reais do λ_{cr} para a aproximação com o MK foram calculados através dos empilhamentos resultantes, e então comparados com os valores obtidos via AG. Esta comparação é realizada na Tabela 30.

Tabela 30 – Comparação do valor obtido para o λ_{cr}

Caso	Valor da solução obtida pelo tipo 2	Valor obtido pelo AG
1	11,365	11,373
2	11,408	11,415
3	11,442	11,445
4	11,447	-
5	11,386	-

Em nenhum dos casos o empilhamento obtido apresentou todas as lâminas a 45 graus, que foi a solução obtida para o mesmo problema na seção anterior. Então tal solução foi simulada no ANSYS e como resposta obteve-se o valor de 11,369, que está abaixo dos valores obtidos para o ótimo pelos Algoritmos Genéticos, o que demonstra que a solução obtida pelo AG pode ser tomada como referência. E, como no caso anterior, os valores obtidos para o ótimo através dos MK aliado ao AG é muito similar ao valor tomado como ótimo.

5.5 Otimização de problema sem solução analítica

Para o último problema de otimização apresentado neste trabalho de conclusão de curso foi escolhida uma geometria que não possui solução analítica, que consiste em um quadrado de aresta 0,25 metros com um furo de diâmetro 0,16 metros, cuja malha possui um tamanho médio de elemento de 0,005 metros, mostrada na Figura 35. Tal geometria foi escolhida visto que não possui solução analítica, e além disto, optou-se por otimizar tal geometria para o critério de vibração, de forma a maximizar a frequência natural do laminado. Em detrimento de otimizar em relação ao critério de falha de Tsai-Wu ou de flambagem, que foram os problemas anteriormente utilizados.

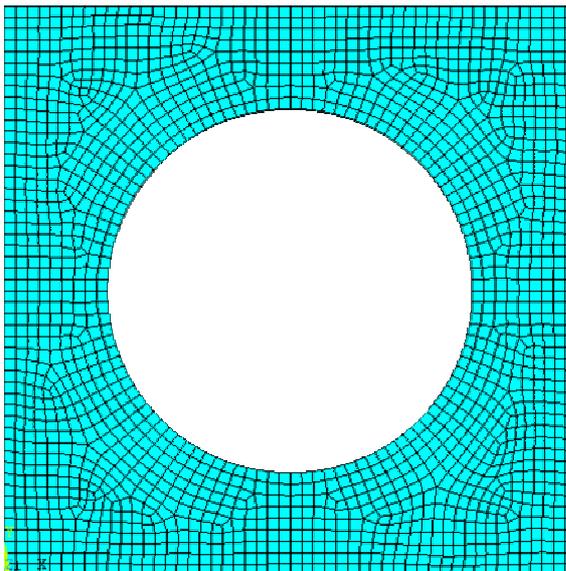


Figura 35 – Malha de elementos finitos da placa a ser otimizada.

Para a resolução foram utilizadas as mesmas propriedades de material descritas na Tabela 9 e na Tabela 10. O problema foi resolvido para um número total de 48 lâminas, com empilhamento simétrico e balanceado, o que totaliza 12 variáveis e mais de 240 milhões de soluções possíveis, e a espessura de cada lâmina no problema foi de 0,1mm. E como condições de contorno o movimento em qualquer direção foi restringido em todas as bordas da placa.

O problema foi otimizado primeiramente pelos Algoritmos Genéticos, de forma a obter uma solução a ser utilizada como parâmetro para a otimização realizada com a conjugação deste com o modelo de Kriging. Os parâmetros utilizados para a otimização através dos AG foram os mesmos dos problemas anteriores, mostrados na Tabela 11. O valor da frequência natural do melhor indivíduo da primeira geração do AG era de 597,65 Hz, ao longo das iterações este valor chegou ao ótimo de 686,78 Hz, o que representou uma melhoria de quase 15%.

O problema foi então solucionado por três vezes utilizando o modelo de Kriging conjugado ao AG (MK+AG) com 300 pontos experimentais e coeficiente de correlação de 0,1. Os resultados estão na Tabela 31, e demonstram uma boa convergência do método, visto que os valores obtidos são similares em todos os casos. E por fim, a comparação entre o melhor resultado obtido MK+AG e o resultado obtido pelo AG se encontra na Tabela 32.

Tabela 31 – Resultados obtidos pelo MK.

Análise	1	2	3
Valor do ótimo aproximado para a frequência natural (Hz)	711,43	715,05	714,1214
Empilhamento obtido	$[\pm 45_{10} \pm 60 \pm 30]_S$	$[\pm 45_{11} \pm 30]_S$	$[\pm 45_{11} \pm 90]_S$
Valor da frequência natural (Hz)	686,50	686,74	686,64
Tempo de otimização (s)	5178	5213	5007

Tabela 32 – Comparação entre o AG e o MK+AG.

Método de Otimização	AG	MK+AG
Valor do ótimo aproximado para a frequência natural (Hz)	-	715,05
Empilhamento obtido	$[\pm 45_{12}]_S$	$[\pm 45_{11} \pm 30]_S$
Valor da frequência natural (Hz)	686,78	686,74
Tempo de otimização	~12h00	~1h25

É possível verificar pelo empilhamento que houve boa convergência do método conjugado, e uma redução bastante grande do tempo de otimização. O erro da aproximação da solução final pelo MK foi de 4,1%, o que está dentro do esperado, tendo-se em vista os casos anteriores. E a representação gráfica do modo de vibração fundamental correspondente à solução ótima obtida pelo AG está na Figura 36.

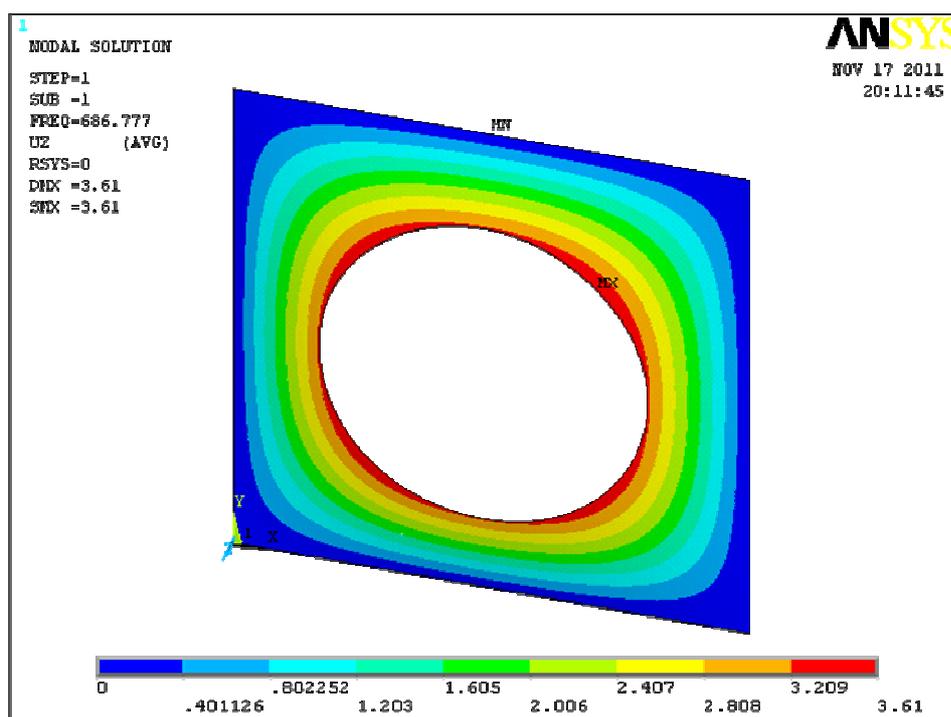


Figura 36 – Modo de vibração fundamental correspondente à solução ótima obtida pelo AG.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o intuito de diminuir o tempo de otimização em problemas de análise estrutural de materiais compostos laminados o modelo de Kriging (MK) foi implementado em MATLAB e unido ao método de otimização dos Algoritmos Genéticos (AG). Como exemplo de aplicação do método otimizou-se a sequência de empilhamento de lâminas de estruturas de materiais compostos laminados. Em tais estruturas as orientações das lâminas (sequência de empilhamento) têm grande influência nas tensões e deformações resultantes, assim é importante encontrar seus valores ótimos.

Os primeiros testes foram realizados utilizando as equações obtidas da literatura, baseadas na Teoria Clássica dos Laminados, de forma a otimizar uma placa quadrada. Nestes testes o MK aliado ao AG se mostrou bastante eficiente na localização do ótimo, chegando a resultados bastante similares aos obtidos pelo AG individualmente. Entretanto a redução do tempo de otimização só foi significativa em casos com grande número de variáveis. Mas quando o método foi utilizado juntamente com o método dos elementos finitos, onde o cálculo da função objetivo demanda maior tempo, a redução do tempo se mostrou bastante significativa.

Com isto pode-se concluir que o objetivo do trabalho foi alcançado, possibilitando otimizar geometrias quaisquer, visto que é utilizado o MEF, com um número elevado de variáveis. Além disso, o método se mostrou eficiente em otimizar um caso diferente daqueles estudados ao longo do trabalho, ao otimizar uma placa de material composto em relação a sua frequência natural, também obtendo uma resposta próxima da ótima em um menor tempo em relação a utilização do AG.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, F. S.; AWRUCH, A. M. **Design Optimization of Composite Laminated Structures using Genetic Algorithm and Finite Element Analysis**. Composite Structures, Volume 88, Issue 3, p. 443-454, 2009.
- AHMED, M. Y. M.; QIN, N. **Comparison of Response Surface and Kriging Surrogates in Aerodynamics Design Optimization of Hypersonic Spike Blunt Bodies**. Cairo, Egito: ASAT – Aerospace sciences & aviation technology 13th International Conference, 2009.
- BROWN, J. M. **Reduced Order Modeling Methods for Turbomachinery Design**. Tese de Doutorado. Georgia Institute of Technology, 2008.
- CASTRO; S. G. P. **Otimização Eficiente de Asa em Material Composto via Algoritmo Genético**. Dissertação de Mestrado Profissionalizante, Instituto Tecnológico da Aeronáutica, 2009.
- FERNANDES, J. T. **Otimização Estrutural de Materiais Compostos Laminados Usando Superfície de Resposta e Algoritmos Genéticos**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2009
- HAFTKA, R. T., GÜRDAL, Z., HAJELA, P. **Design and Optimization of Laminated Composite Materials**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1a ed., 1999.
- JONES, R. M. **Mechanics of Composite Materials**. Philadelphia: Taylor & Frank, Inc., 1999.
- LE RICHE, R.; HAFTKA, R. T. **Improved Genetic Algorithm for Minimum Thickness Composite Laminated Design**. Composites Engineering, v. 5, p 143-161, 1995.
- LEE , Y.; LIN, C. **Regression of the response surface of laminated composite structures**. Composite Structures, v. 62, p. 91-105 , 2003.
- LOPEZ, R. H.; LUERSEN, M. A.; CURSI, E. S. **Optimization of Laminated Composites Considering Different Failure Criteria**. Composites Part B: Engineering, Volume 40, Issue 8, p. 731-740, 2009.

MARTIN, J. D.; SIMPSON, T. W. **On the Use of Kriging Models to Approximate Deterministic Computer Models**. Salt Lake City, USA: ASME, 2004.

MYERS, R. H.; MONTGOMERY, D. C. **Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiments**. New York, EUA: John Wiley & Sons, Inc., 2002.

SIMPSON, Timothy W.; MISTREE, Farrokh. **Kriging Models for Global Approximation in Simulation-Based Multidisciplinary Design Optimization**. AIAA Journal, Vol. 39, No. 12, p 2231-2241, 2001.

TODOROKI, A.; SEKISHIRO, M. **Optimization of blade stiffened composite panel under buckling and strength constrains**. Journal of Computational Science and Technology, Vol. 2, No. 1, p 234-245, 2008.

VAN BEERS, W. C. M.; KLEIJNEN, J. P. C. **Kriging Interpolation in Simulation: a Survey**. Washington, D.C, USA: Proceedings of the 36th Conference on Winter Simulation, 2004.

VAN BOGGELEN, D. R. **Failure Analysis of Fiber Reinforced Laminated Composite Materials Using Analytical and FEM Techniques**. Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Engenharia Mecânica) – Hanzehogeschool Gronigen – Holanda e UTFPR. Curitiba, 2006.

WEISZFLOG, W. (Ed.) **Michaelis Moderno Dicionário da Língua Portuguesa**. São Paulo: Melhoramentos, 2007.

WIDMAIER, K. **Algoritmo Genético Aplicado à Otimização de Asas de Material Compósito de Veículos Aéreos não Tripulados**. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2005.

XUAN, Y.; ZHANG, W. H.; ZHANG, Y. L. **Research on Mixed Optimization method with Gradient-Based Kriging Approximation Model**. Beijing: System Simulation and Scientific Computing – 7th International Conference, 2008.

ANEXO A – CARACTERÍSTICAS DO ELEMENTO FINITO UTILIZADO

Ao longo do trabalho foi utilizado o elemento do tipo *shell99* do ANSYS para realizar-se as simulações com materiais compostos laminados no programa em questão. Segundo o manual do ANSYS tal elemento pode ser utilizado para a simulação de superfícies em que sejam aplicadas lâminas, sendo que o limite é de 250 camadas. Em que o material de cada lâmina pode ser ortotrópico.

O elemento está demonstrada na Figura 37, e possui entre 6 e 8 nós, com 6 graus de liberdade em cada nó, que podem estar localizadas no plano médio, na superfície superior ou na inferior. A tensão varia linearmente ao longo de cada camada, e não há deslizamento entre as camadas. Tal elemento permite o cálculo de três critérios de falha, dentre eles o de Tsai-Wu.

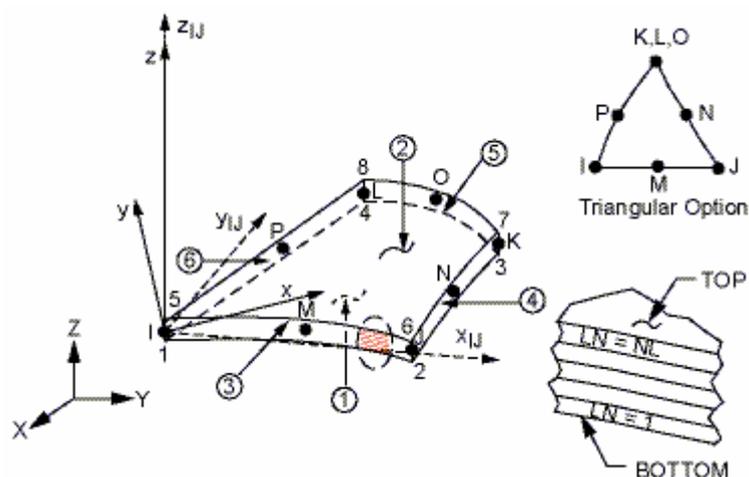


Figura 37 – Representação do elemento *shell99* (retirado do manual do ANSYS).