

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MECÂNICA  
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

EMANUEL VITOR CECCON

**MODELAGEM E SIMULAÇÃO DA QUEBRA DO GEL NO REINÍCIO  
DO ESCOAMENTO DE FLUIDOS DE PERFURAÇÃO**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CURITIBA

2013

EMANUEL VITOR CECCON

**MODELAGEM E SIMULAÇÃO DA QUEBRA DO GEL NO REINÍCIO  
DO ESCOAMENTO DE FLUIDOS DE PERFURAÇÃO**

Monografia do Projeto de Pesquisa apresentada à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2 do curso de Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial para aprovação na disciplina.

Orientador: Prof. César O. R. Negrão

CURITIBA

2013

## TERMO DE APROVAÇÃO

Por meio deste termo, aprovamos a monografia do Projeto de Pesquisa "MODELAGEM E SIMULAÇÃO DA QUEBRA DO GEL NO REINÍCIO DO ESCOAMENTO DE FLUIDOS DE PERFURAÇÃO", realizado pelo aluno Emanuel Vitor Ceccon, como requisito parcial para aprovação na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2, do curso de Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Prof. Cezar O. R. Negrão, PhD

DAMEC, UTFPR

Orientador

Prof. Admilson T. Franco, Dr.

DAMEC, UTFPR

Avaliador

Prof. Silvio L. M. Junqueira, Dr.

DAMEC, UTFPR

Avaliador

Curitiba, 08 de maio de 2013.

## RESUMO

CECCON, Emanuel Vitor. **Modelagem e Simulação da Quebra do Gel no Reinício do Escoamento de Fluidos de Perfuração**. 2013. 101 f. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2013.

O reinício do escoamento de fluidos tixotrópicos é um grande problema na perfuração de poços de petróleo. Dependendo das propriedades do escoamento e do fluido de perfuração utilizado, picos de pressão significativos podem ser formados comprometendo a operação e a estrutura do poço. O presente trabalho apresenta um modelo matemático para simular a quebra do gel e o escoamento compressível transiente de fluidos de perfuração tixotrópicos em uma tubulação horizontal com o objetivo de prever o perfil de pressão e vazão na tubulação ao longo do tempo. O modelo se baseia nas equações de conservação da massa e quantidade de movimento. O fluido é modelado como fluido de Bingham, porém, com a tensão limite de escoamento variável com a deformação. Os efeitos viscosos são avaliados através da variação desta tensão limite de escoamento. Já a variação da tensão limite de escoamento com a deformação é avaliada através de um ajuste da solução de uma equação diferencial de segunda ordem a um conjunto de dados experimentais. Os resultados do ajuste são corroborados com os dados experimentais e com um modelo proposto na literatura para dois casos distintos de evolução da taxa de deformação (rampa e taxa constante). Já os resultados do escoamento são comparados com a solução analítica para o fluido newtoniano. Os resultados observados foram: redução do pico de pressão e da vazão de regime permanente com o aumento da tensão limite de escoamento de regime permanente; perfil de pressão e vazão ao longo do tempo muito próximo ao do fluido newtoniano para casos onde a tensão de quebra do gel ou a tensão limite de escoamento é igual a zero; perfil de pressão e vazão ao longo do tempo muito próximo ao do fluido de Bingham para o caso de tensão de quebra do gel igual a tensão limite de escoamento.

**Palavras-chave:** Tixotropia, Fluidos de Perfuração, Modelo Matemático, Ajuste Experimental, Método das Características

## ABSTRACT

CECCON, Emanuel Vitor. **Modeling and Simulation of Drilling Fluids Start-up Flow**. 2013. 101 p. Conclusion Course Thesis – Mechanical Engineering, Federal University of Technology - Paraná. Curitiba, 2013.

The thixotropic fluid flow start-up is a significant problem in the oil well drilling operations. Depending on the start-up flow properties and the drilling fluid applied, significant pressure peaks may take place compromising the operation and the well structure. This work presents a mathematical model to solve the start-up flow and the transient compressible flow of thixotropic drilling fluids in a horizontal pipe in order to get the pressure and flow profiles over the time. The model is based on the mass and momentum conservation equations. The fluid is modeled as a Bingham Fluid, but the yield stress is supposed to be variable with the fluid strain. The viscous effects are evaluated by the variation of the yield stress. However, the yield stress variation with the fluid strain is evaluated according to an adjustment of the second order ordinary differential equation to the experimental data. The adjustment results are compared with the experimental data and with a model of the literature for two different cases of strain rate evolution (gradient and constant strain rate). Therefore, the flow model results are compared with the analytical solution for the Newtonian fluid. The results obtained were: reduction of pressure peaks and steady state flow with the grown-up of the steady state yield stress; pressure and flow development with the time increasing very similar to the Newtonian results for the cases of start-up stress or steady state yield stress equals zero; pressure and flow development with the time increasing very similar to the Bingham fluid results for the case of start-up stress equals to the steady state yield stress.

**Keywords:** Thixotropy, Drilling fluids, Mathematical Model, Experimental data adjustment, Method of Characteristics.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Evolução histórica da profundidade dos poços explorados pela Petrobras .....	17
Figura 2 – Esquema ilustrativo de um processo de perfuração.....	18
Figura 3 – Comportamento da tensão em função da taxa de deformação para diferentes materiais.....	21
Figura 4 – Representação da aproximação entre os flocos do fluido tixotrópico em diferentes pontos da curva característica de tensão de cisalhamento em função do tempo .....	23
Figura 5 – Gráfico taxa de deformação em função do tempo para os testes experimentais.....	32
Figura 6 – Respostas em tensão de cisalhamento para as taxas de deformação aplicadas no teste de inicialização .....	32
Figura 7 - Tensão de cisalhamento em função da deformação para todas as taxas de deformação aplicadas .....	33
Figura 8 – Tensão de cisalhamento de regime permanente em função da taxa de deformação .....	35
Figura 9 – Curvas para tensão limite de escoamento em função da taxa de deformação .....	36
Figura 10 – Curvas para solução da equação diferencial de segunda ordem para o seguinte conjunto de parâmetros: $a=4$ ; $b=1$ ; $C_1=2$ ; $C_2=-3$ . .....	37
Figura 11 – Tensão limite de escoamento transformada linearmente para o ajuste de dados .....	38
Figura 12 – Comparação dos resultados da equação de ajuste com os dados experimentais para as seguintes taxas de deformação aplicadas: (a) $5s^{-1}$ ; (b) $10s^{-1}$ ; (c) $15s^{-1}$ ; (d) $20s^{-1}$ ; (e) $30s^{-1}$ ; (f) $40s^{-1}$ .....	41
Figura 13 – Representação do modelo de Maxwell com propriedades dependentes do parâmetro estrutural.....	43

Figura 14 – Comparação entre o modelo proposto por Mendes (2009), o ajuste proposto e os dados experimentais para taxa de deformação $10s^{-1}$ .....	44
Figura 15 – Curvas de taxa de deformação em função do tempo para as duas condições testadas.....	45
Figura 16 – Curvas de tensão de cisalhamento em função do tempo para as condições de evolução da taxa em rampa e taxa constante.....	46
Figura 17 – Curvas de tensão de cisalhamento em função da deformação para o ajuste de dados e o Modelo de Mendes – Condição de taxa constante .....	46
Figura 18 – Comparação do modelo proposto por Mendes (2009) e o ajuste de dados modificado para taxa de deformação constante de $10s^{-1}$ .....	47
Figura 19 – Geometria e sistema de coordenadas adotados no problema .....	50
Figura 20 – Malha espacial e temporal utilizada para resolução do problema.....	59
Figura 21 – Fluxograma do algoritmo de cálculo para solução do escoamento.....	62
Figura 22 - Comparação da pressão avaliada pelo método das características e pela solução analítica. Caso de pressão constante na entrada.....	65
Figura 23 – Comparação da vazão na entrada da tubulação avaliada pelo método das características e pela solução analítica. Caso de pressão constante na entrada.....	66
Figura 24 - Comparação da pressão avaliada pelo método das características e pela solução analítica. Caso de vazão constante na entrada .....	68
Figura 25 - Comparação da vazão na metade da tubulação avaliada pelo método das características e pela solução analítica. Caso de vazão constante na entrada.....	68
Figura 26 – Comparação do perfil de pressão na metade da tubulação para diferentes critérios de convergência.....	70
Figura 27 - Comparação do perfil de vazão na entrada da tubulação para diferentes critérios de convergência .....	70
Figura 28 – Perfil de pressão na metade da tubulação para diferentes malhas na direção radial – Caso de pressão constante na entrada .....	73

Figura 29 - Perfil de vazão na entrada da tubulação para diferentes malhas na direção radial – Caso de pressão constante na entrada .....	73
Figura 30 - Perfil de pressão na metade da tubulação para diferentes malhas na direção axial – Caso de pressão constante na entrada.....	75
Figura 31 - Perfil de vazão na entrada da tubulação para diferentes malhas na direção axial – Caso de pressão constante na entrada.....	76
Figura 32 – Comparação da solução para a pressão adimensional na metade da tubulação para os três fluidos analisados com pressão constante na entrada da tubulação.....	80
Figura 33 - Comparação da solução para a pressão adimensional na metade da tubulação para os três fluidos analisados com pressão constante na entrada da tubulação.....	81
Figura 34 – Comparação das soluções para o fluido tixotrópico em três diferentes posições da tubulação ( $z^*=0,1$ ; $z^*=0,5$ ; $z^*=0,9$ ) .....	82
Figura 35 – Pontos notáveis da curva de tensão limite de escoamento por deformação para o fluido tixotrópico .....	83
Figura 36 – Ajustes do comportamento tixotrópico para diferentes tensões limites de escoamento de regime permanente.....	84
Figura 37 – Evolução da pressão na metade da tubulação para o fluido tixotrópico avaliado com diferentes valores de $Bi_o$ .....	85
Figura 38 - Evolução da vazão na entrada da tubulação para o fluido tixotrópico avaliado com diferentes valores de $Bi_o$ .....	85
Figura 39 - Ajustes do comportamento tixotrópico para diferentes tensões limites de escoamento críticas .....	87
Figura 40 - Evolução da pressão na metade da tubulação para diferentes valores de $Bi_c$ .....	88
Figura 41 - Evolução da vazão na entrada da tubulação para diferentes valores de $Bi_c$ .....	88
Figura 42 - Ajustes do comportamento tixotrópico para diferentes valores de parâmetro de ajuste $a$ .....	90



Figura 43 - Evolução da pressão na metade da tubulação para diferentes valores de parâmetro de ajuste $a$ .....	91
Figura 44 - Evolução da vazão na entrada da tubulação para diferentes valores de parâmetro de ajuste $a$ .....	91
Figura 45 - Ajustes do comportamento tixotrópico para diferentes valores de parâmetro de ajuste $b$ .....	92
Figura 46 - Evolução da pressão na metade da tubulação para diferentes valores de parâmetro de ajuste $b$ .....	93
Figura 47 - Evolução da vazão na entrada da tubulação para diferentes valores de parâmetro de ajuste $b$ .....	94

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Expressões para $d\lambda/dt$ para diferentes autores.....	25
Tabela 2 – Constantes de equilíbrio e transiente para diferentes autores .....	25
Tabela 3 – Deformação na qual ocorre o pico de tensão para as taxas de deformação aplicadas .....	34
Tabela 4 – Pontos notáveis da curva de tensão limite de escoamento x deformação para determinação das constantes arbitrárias .....	39
Tabela 5 – Coeficientes de correlação para os ajustes com diferentes taxas de deformação .....	42
Tabela 6 – Parâmetros adimensionais das condições de contorno .....	55
Tabela 7 – Equações governantes e parâmetros adimensionais .....	63
Tabela 8 – Parâmetros adimensionais utilizados para comparação do modelo com a solução analítica.....	65
Tabela 9 – Parâmetros adimensionais utilizados para análise do critério de convergência.....	69
Tabela 10 – Erro percentual e tempo de simulação para os diferentes critérios de convergência.....	71
Tabela 11 – Erros percentuais e tempos de simulação para análise da sensibilidade da malha na direção radial – Caso de Pressão constante na entrada .....	74
Tabela 12 - Erros percentuais e tempos de simulação para análise da sensibilidade da malha na direção radial – Caso de Vazão constante na entrada .....	74
Tabela 13 – Erros percentuais e tempos de simulação para análise da sensibilidade da malha na direção axial – Caso de Pressão constante na entrada .....	76
Tabela 14 - Erros percentuais e tempos de simulação para análise da sensibilidade da malha na direção axial – Caso de Vazão constante na entrada .....	77
Tabela 15 – Resumo das influências dos parâmetros da malha no resultado do escoamento.....	78
Tabela 16 – Parâmetros do escoamento para o fluido newtoniano.....	79
Tabela 17 – Parâmetros do escoamento para o fluido tixotrópico.....	80

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Símbolos Romanos

$a$	Parâmetro de ajuste – Presente trabalho e Mendes (2009)	[-]
$A$	Parâmetro de ajuste da tensão de quebra do gel	[Pa s]
$A_s$	Área da seção transversal da tubulação	[m <sup>2</sup> ]
$b$	Parâmetro de ajuste – Presente trabalho e Mendes (2009)	[-]
$B$	Parâmetro de ajuste da tensão de quebra do gel	[-]
$Bi$	Número de Bingham	[-]
$c$	Velocidade de propagação da onda de pressão	[m s <sup>-1</sup> ]
$C^+, C^-$	Linhas características	[-]
$C_1, C_2$	Constantes do modelo de ajuste de dados experimentais	[Pa]
$D$	Diâmetro da tubulação	[m]
$G$	Módulo de Cisalhamento	[Pa]
$g$	Aceleração da gravidade	[m s <sup>-2</sup> ]
$k_1, k_2, k_3$	Parâmetros de ajuste - Dullaert e Mewis (2006)	[-]
$L$	Comprimento da tubulação	[m]
$Ma$	Número de Mach	[-]
$N$	Número de divisões da tubulação	[-]
$P$	Pressão	[Pa]
$Q$	Vazão	[m <sup>3</sup> s <sup>-1</sup> ]
$r$	Direção radial	[-]
$R$	Raio da tubulação	[m]
$R^2$	Coeficiente de correlação entre duas variáveis	[-]
$Re$	Número de Reynolds	[-]
$Res$	Resíduo do processo iterativo	[-]
$S_1, S_2, S_3$	Somatórios da modelagem	[-]
$t$	Tempo	[s]
$t_{eq}$	Parâmetro de ajuste – Mendes (2009)	[-]
$V$	Velocidade média do escoamento	[m s <sup>-1</sup> ]
$v$	Velocidade do fluido	[m s <sup>-1</sup> ]
$x$	Variável de ajuste da eq. Diferencial de segunda ordem	[-]
$y$	Função de ajuste da eq. diferencial de segunda ordem	[-]
$z$	Direção axial	[-]

### Símbolos Gregos

$\dot{\gamma}$	Taxa de cisalhamento	$[s^{-1}]$
$\Delta P$	Diferença de pressão	$[Pa]$
$\Delta r$	Variação no raio da tubulação	$[m]$
$\Delta t$	Variação no tempo	$[s]$
$\alpha$	Compressibilidade do fluido	$[Pa^{-1}]$
$\beta$	Parâmetro de ajuste – Dullaert e Mewis (2006)	$[-]$
$\delta$	Razão de aspecto da tubulação	$[-]$
$\gamma$	Deformação no fluido	$[-]$
$\eta$	Viscosidade aparente do fluido	$[Pa\ s]$
$\lambda$	Parâmetro estrutural do fluido tixotrópico	$[-]$
$\lambda^2$	Parâmetro de ajuste	$[-]$
$\mu$	Viscosidade plástica do fluido de Bingham	$[Pa\ s]$
$\rho$	Massa específica do fluido	$[kg\ m^{-3}]$
$\tau_y$	Tensão limite de escoamento	$[Pa]$
$\psi$	Constante multiplicadora da combinação linear	$[-]$

### Sobrescritos

*	Propriedade adimensional
+	Referente à linha característica $C^+$
-	Referente à linha característica $C^-$

### Subscritos

$O$	Referente ao fluido gelificado
$\infty$	Referente ao regime permanente
$B$	Relativo à bomba
$c$	Referente ao ponto crítico de quebra do gel
$e$	Referente à parcela elástica
$i$	Referente à posição na tubulação
$r$	Referente à direção radial
$R$	Valor de referência
$v$	Referente à parcela viscosa

$w$  Referente à parede da tubulação  
 $z$  Referente à direção axial

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>16</b>
1.1	Contexto do Tema	16
1.2	Caracterização do Problema	17
1.3	Objetivos	19
1.4	Justificativa	19
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>21</b>
2.1	Fundamentação Teórica	21
2.1.1	Fluido Não Newtoniano	21
2.1.2	Tixotropia	22
2.2	Revisão Bibliográfica	24
2.2.1	Modelos propostos para descrever o comportamento tixotrópico	24
2.2.2	Modelagem matemática do escoamento tixotrópico	26
2.3	Síntese do Capítulo	29
<b>3</b>	<b>AJUSTE DE UMA EQUAÇÃO PARA QUEBRA DO GEL</b>	<b>31</b>
3.1	Análise e tratamento dos dados experimentais	31
3.2	Proposta de Equação de Ajuste	36
3.3	Comparação da Equação com os dados experimentais e com o modelo proposto por Mendes (2009)	42
3.4	Síntese do Capítulo	48
<b>4</b>	<b>MODELAGEM MATEMÁTICA E MÉTODO NUMÉRICO</b>	<b>50</b>
4.1	Formulação do Problema	50
4.2	Equações Básicas	51
4.2.1	Equação da Conservação da Massa	51
4.2.2	Equação da Quantidade de Movimento	52
4.2.3	Expressão para Tensão na Parede	53
4.3	Adimensionalização das Equações	53
4.4	Condições Iniciais e de Contorno	54
4.5	Parâmetros do Escoamento	55
4.5.1	Caso de Pressão Constante	55
4.5.2	Caso de Vazão Constante	56
4.6	Integração da Equação Constitutiva	56
4.7	Solução pelo Método das Características	57
4.8	Procedimento de cálculo	61
4.9	Síntese do Capítulo	63
<b>5</b>	<b>VERIFICAÇÃO DO MODELO E DA SENSIBILIDADE DA MALHA</b>	<b>64</b>
5.1	Comparação com a Solução Analítica	64
5.1.1	Escoamento com pressão constante na entrada da tubulação	64
5.1.2	Escoamento com vazão constante na entrada da tubulação	67
5.2	Análise do Critério de Convergência - Fluido Tixotrópico	69
5.3	Análise da Sensibilidade da Malha – Fluido Tixotrópico	72
5.3.1	Análise da sensibilidade da malha na direção radial	72

5.3.2	Análise da sensibilidade da malha na direção axial	75
5.4	Síntese do Capítulo	77
<b>6</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>79</b>
6.1	Comparação entre a solução para os três fluidos analisados	79
6.2	Comparação em diferentes pontos da tubulação para o fluido tixotrópico	81
6.3	Avaliação dos parâmetros do ajuste para o fluido tixotrópico nos perfis de pressão e vazão ao longo do tempo	83
6.3.1	Avaliação da influência de $Bi_s$ no escoamento transiente do fluido tixotrópico	83
6.3.2	Avaliação da influência de $Bi_c$ no escoamento transiente	86
6.3.3	Avaliação do parâmetro de ajuste da quebra do gel $a$ no escoamento transiente	89
6.3.4	Avaliação do parâmetro de ajuste da quebra do gel $b$ no escoamento transiente	92
6.4	Síntese do Capítulo	94
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>96</b>
7.1	Conclusões	96
7.2	Sugestões	98
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>100</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Contexto do Tema

No século XX, técnicas de perfuração de poços de petróleo por brocas rotativas tornaram-se comuns e fizeram com que a exploração comercial do petróleo se tornasse viável. Com o avanço da tecnologia, o consumo, a produção e a descoberta de reservas petrolíferas se intensificaram, gerando uma grande dependência deste recurso até os dias de hoje. Esta relevância faz com que as pesquisas nas áreas de Engenharia de Petróleo sejam muito importantes.

No Brasil o petróleo só começou a ser explorado em 1897. Os primeiros poços eram perfurados em terra e não alcançaram grande retorno econômico. Na década de 50 do século passado, o governo brasileiro decretou o petróleo um monopólio estatal com a criação da Petrobras. A partir da criação da Petrobras, a exploração comercial do petróleo cresceu muito, principalmente nas reservas marítimas. Atualmente, a Petrobras conta com grandes campos produtivos na Bacia de Campos e explora os poços petrolíferos na camada pré-sal, com profundidade superior a 6000 metros. O Brasil tem uma das maiores reservas petrolíferas do mundo, é autossuficiente na produção deste mineral e a Petrobras é a recordista em profundidade de poços. A Figura 1 mostra a evolução na profundidade dos poços explorados pela Petrobras.

A Figura 1 mostra que ao longo dos anos a exploração de petróleo no Brasil tem ocorrido cada vez mais em águas profundas. Percebe-se que até o ano de 2006 explorava-se apenas na camada pós-sal, com profundidade inferior à 2000m. Recentemente tem-se também explorado a camada pré-sal, com profundidades de até 6000m, exigindo cada vez mais tecnologia e pesquisa na área de perfuração de poços de petróleo.



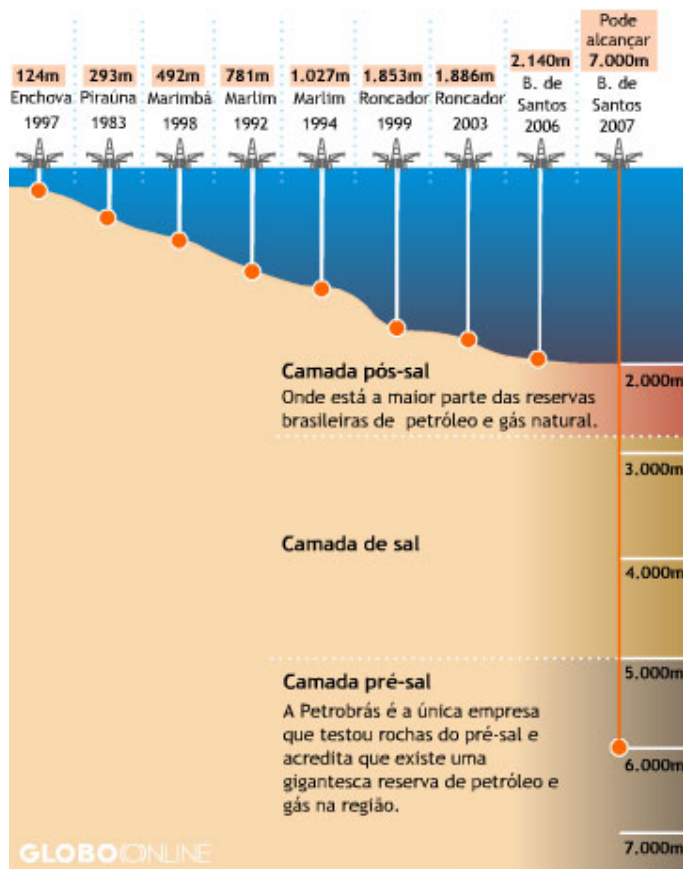


Figura 1 – Evolução histórica da profundidade dos poços explorados pela Petrobras

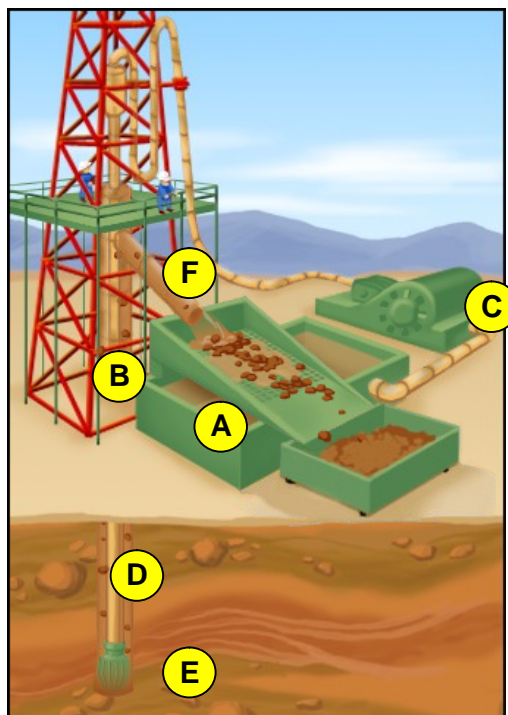
Fonte: <http://www.naval.com.br> (Acesso em 05/05/2012)

## 1.2 Caracterização do Problema

Durante as operações de perfuração do poço, um fator de grande importância é o fluido de perfuração que, em geral, tem características tixotrópicas, ou seja, variação da viscosidade com o tempo quando submetido à cisalhamento (THOMAS, 2004).

A Figura 2 explicita os principais componentes de um processo de perfuração. Neste processo o fluido de perfuração fica armazenado em um reservatório (A) e é impulsionado para dentro do poço (B), com o auxílio de uma bomba (C). O fluido adentra a coluna de perfuração (D) chegando até a broca (E). Os cascalhos gerados no processo de perfuração são então carreados pelo fluido de perfuração através da região anular formada entre a coluna de perfuração e o poço até serem despejados

na peneira pela linha de retorno (F). A partir deste ponto separa-se o cascalho do fluido de perfuração que é então reaproveitado.



**Figura 2 – Esquema ilustrativo de um processo de perfuração**  
 Fonte: Adaptado de SCHLUMBERGER (2007) *apud* OLIVEIRA (2011)

Portanto, dentro do escopo deste processo, um dos principais componentes é o fluido de perfuração que tem três funções principais: manter a estabilidade estrutural do poço; refrigerar a broca de perfuração; carrear os cascalhos oriundos da perfuração durante a operação e sustentar os cascalhos quando a operação é interrompida para manter a estabilidade do poço.

Para atender estas funções, geralmente o fluido de perfuração utilizado é uma suspensão, que tem a viscosidade reduzida sob cisalhamento e se gelifica quando não está submetida à tensão de cisalhamento.

Quando sujeito a cisalhamento, o fluido atua lubrificando, refrigerando a broca e carreando os cascalhos para a superfície. Quando o cisalhamento é interrompido, o fluido gelifica, retendo os cascalhos e evitando que se precipitem sobre a broca. Com o reinício do cisalhamento, o gel se desfaz. Contudo, este processo não ocorre instantaneamente.

O fato da quebra do gel não ocorrer de forma instantânea com o reinício do cisalhamento pode ocasionar elevadas pressões na coluna de perfuração. Estas pressões elevadas podem gerar danos aos poços podendo até inviabilizar sua utilização.

Na literatura, são encontrados diversos modelos de tixotropia aplicados aos fluidos de perfuração, bem como diversas formas de modelagem do escoamento em questão. Todavia, por tratar-se de um problema transitório e com diversos parâmetros envolvidos, nem sempre o resultado obtido é satisfatório. Desta forma ainda não há um consenso sobre a melhor modelagem que descreva o comportamento tixotrópico do fluido de perfuração.

### **1.3 Objetivos**

Neste trabalho é feita a simulação numérica do reinício da circulação de fluidos de perfuração tixotrópicos gelificados em tubos, utilizando um ajuste simplificado para a relação entre tensão e deformação. Para atingir o objetivo geral, foram definidos os seguintes objetivos específicos:

- i) Proposta de uma equação simplificada que se ajuste aos dados experimentais das curvas de tensão-deformação de um fluido de perfuração;
- ii) Desenvolvimento de um modelo matemático para o reinício do escoamento de fluidos de perfuração;
- iii) Solução numérica das equações de conservação juntamente com o ajuste proposto no item i e o modelo matemático proposto no item ii.

### **1.4 Justificativa**

A atividade de exploração de petróleo tem participação efetiva na economia brasileira e mundial. Segundo a IEA (International Energy Agency), em 2009 a participação do petróleo e gás na matriz energética mundial era de 32,8%. Tal exploração é realizada predominantemente em águas profundas, como mostrado na evolução da profundidade dos poços na Figura 1.

Como citado anteriormente, as características tixotrópicas do fluido de perfuração são muito importantes para a perfuração do poço. Dentre estas propriedades uma das mais importantes é a gelificação do fluido para retenção dos cascalhos quando o cisalhamento é interrompido e o reinício da circulação, quando o gel deve ser quebrado.

Portanto, a caracterização precisa do comportamento do fluido de perfuração tixotrópico, bem como a forma como ocorre o escoamento do fluido de perfuração, sua gelificação e reinício de escoamento são de extrema importância para execução da perfuração de poços de petróleo.

Entretanto, os estudos nesta área ainda são restritos e não há um modelo matemático aceito como solução definitiva para o problema. Para os modelos apresentados na literatura, tem-se um grande número de propriedades e parâmetros de escoamento a determinar, o que torna sua utilização restrita a situações mais simplificadas, diferente das aplicações comuns de engenharia.

Desta forma, qualquer pesquisa que venha a contribuir no alcance tanto da caracterização do comportamento quanto da forma como ocorre o escoamento dos fluidos de perfuração tixotrópicos é justificada devido a sua importância para a engenharia de petróleo e seu impacto na economia mundial.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo será apresentada a base teórica dos principais conceitos relacionados a este trabalho e os estudos anteriores que precedem o tema abordado.

Quanto aos conceitos fundamentais, será apresentada a diferença entre um fluido newtoniano e não newtoniano e os conceitos básicos de tixotropia. Já na revisão bibliográfica serão apresentados alguns dos modelos propostos para descrever o comportamento do fluido tixotrópico e as modelagens matemáticas elaboradas para simular este escoamento.

### 2.1 Fundamentação Teórica

#### 2.1.1 Fluido Não Newtoniano

Fluidos não newtonianos são aqueles que não seguem a relação linear entre tensão e taxa de cisalhamento. Diversos tipos de comportamentos da tensão com a taxa de deformação podem ocorrer, como mostra a Figura 3. Dentre estes comportamentos destaca-se aquele em que se requer uma tensão limite de escoamento finita para que o fluido comece a escoar. Este é o caso do fluido de Bingham (WHITE, 2003).

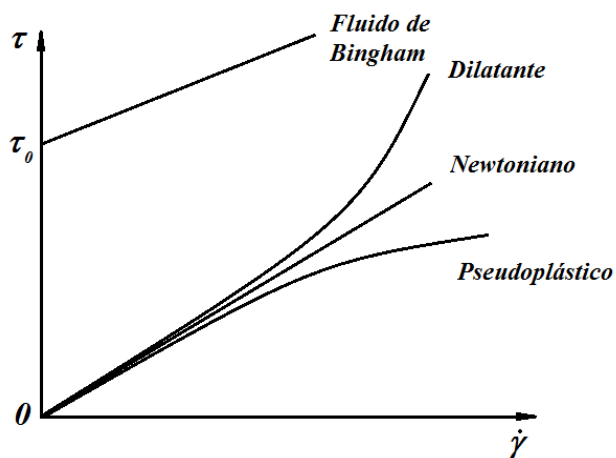


Figura 3 – Tensão em função da taxa de deformação para diferentes materiais

Fonte: Adaptado de White (2003)

A Figura 3 mostra que, para o Fluido de Bingham, tem-se uma tensão limite de escoamento finita para o início do escoamento e uma relação linear entre a tensão e a taxa de deformação após início do escoamento. A equação que representa este comportamento é a equação (1) abaixo:

$$\tau = \tau_y + \eta\dot{\gamma} \quad (1)$$

Existem diversos modelos para descrever o comportamento de um fluido não newtoniano. Em seu trabalho, Bird (1976) apresenta diversas formulações para descrever este comportamento. As formulações mais simples são as aproximações para um fluido newtoniano generalizado. Neste tipo de formulação a viscosidade é descrita em função da taxa de deformação, ou seja,  $\eta = \eta(\dot{\gamma})$ . Os modelos mais complexos abrangem a estrutura molecular do fluido não newtoniano.

Os fluidos não newtonianos não respeitam a relação linear entre tensão e taxa de cisalhamento e também podem apresentar efeitos transientes. Os fluidos que requerem aumento da tensão de cisalhamento aplicada para manter uma taxa de deformação constante são chamados fluidos reopéticos. Já os fluidos que apresentam efeito contrário são chamados tixotrópicos. (WHITE, 2003).

### 2.1.2 Tixotropia

O conceito de tixotropia está inserido no universo dos fluidos não newtonianos. Uma das definições mais atuais para o fenômeno é: “diminuição contínua da viscosidade com o tempo para um fluido sob cisalhamento e que anteriormente encontrava-se em repouso e a subsequente recuperação da viscosidade com o tempo quando o cisalhamento é interrompido” (MEWIS E WAGNER, 2009).

Portanto, a principal diferença entre o fluido tixotrópico e o fluido de Bingham apresentado anteriormente é a dependência da viscosidade com o tempo, ou seja,  $\eta = \eta(\dot{\gamma}, t)$ .

A explicação física para o fenômeno da tixotropia está no fato da microestrutura depender do histórico de cisalhamento, pois existem pequenas forças de atração entre moléculas que tendem a formar flocos. A Figura 4 representa a diferença entre

uma estrutura com os flocos estruturados e outra com a quebra das ligações que estruturam o fluido (MEWIS E WAGNER, 2009).

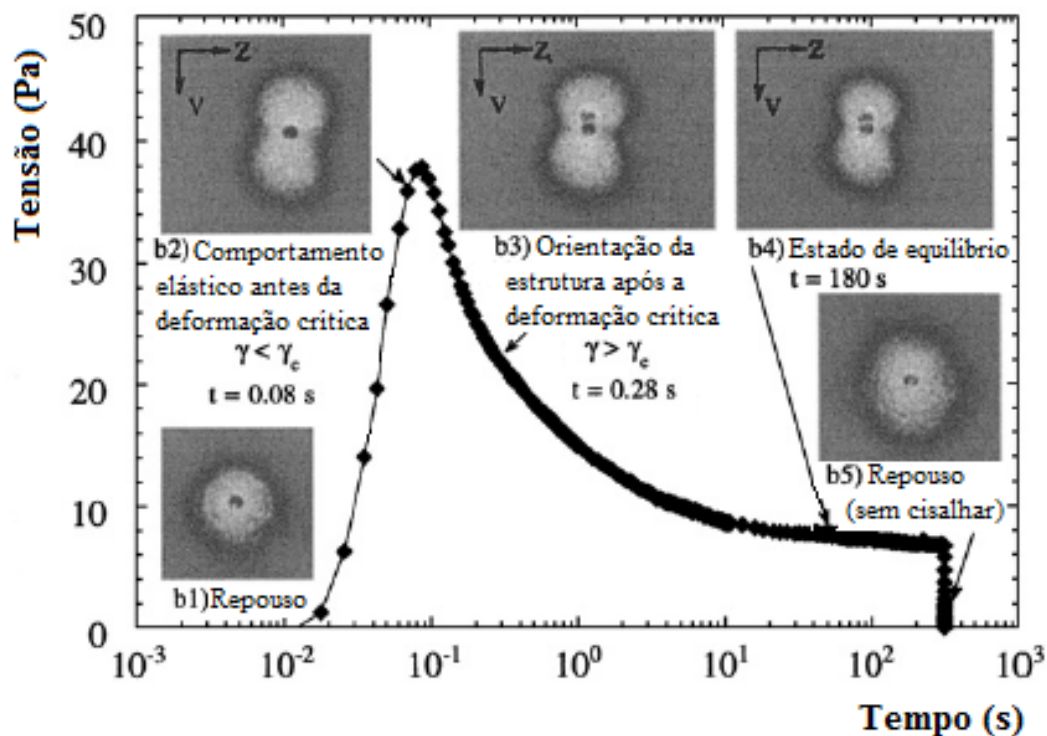


Figura 4 – Representação da aproximação entre os flocos do fluido tixotrópico em diferentes pontos da curva característica de tensão de cisalhamento em função do tempo

Fonte: Mewis e Wagner (2009)

Como mostrado na Figura 4, quando se aplica uma taxa de deformação constante em um fluido a sua estrutura é quebrada, ou seja, ocorre destruição dos flocos, enquanto o repouso do material tende a fazer os flocos reaparecerem. Quando este efeito torna-se perceptível dentro da escala de tempo de observação, tem-se o efeito de tixotropia (MEWIS E WAGNER, 2009).

Nota-se que no ponto b1, em repouso, o fluido está gelificado e não há deformação aplicada à estrutura. Com a deformação aplicada tem-se a deformação elástica antes da quebra do gel, como mostra o ponto b2.

No ponto de deformação crítica, ou seja,  $\gamma = \gamma_c$ , tem-se a quebra do gel e após este ponto tem-se a orientação da estrutura viscosa na direção da deformação aplicada, como mostra o ponto b3. Já o ponto b4 mostra que, em regime permanente, a estrutura está totalmente orientada na direção da deformação.

Já em repouso, no ponto b5, após aplicação da deformação constante, o fluido sofre a recuperação da viscosidade e a estrutura é semelhante a do instante inicial, no ponto b1.

## 2.2 Revisão Bibliográfica

### 2.2.1 Modelos propostos para descrever o comportamento tixotrópico

Mesmo após anos de estudos, ainda não há muitos trabalhos sobre a modelagem do comportamento tixotrópico dos fluidos. Segundo Mewis e Wagner (2009), costuma-se dividir as formas de modelagem da tixotropia em três abordagens: abordagem fenomenológica, abordagem microestrutural direta e abordagem microestrutural indireta.

Abordagem fenomenológica é aquela que se baseia na observação do fenômeno sob o ponto de vista da mecânica do contínuo. Tenta-se utilizar modelos newtonianos generalizados, com a inclusão de funções para as propriedades as quais se deseja incluir a dependência do tempo.

A abordagem microestrutural direta descreve o escoamento de um fluido baseado no conhecimento de sua microestrutura durante todo o histórico de cisalhamento. Portanto, para utilizar-se deste método é necessário conhecer profundamente a variação microestrutural do fluido em questão durante todo o cisalhamento, bem como ter bem definidas correlações entre esta microestrutura e as propriedades reológicas do fluido em questão.

A abordagem microestrutural indireta utiliza um parâmetro estrutural (geralmente denominado  $\lambda$ ). Este parâmetro é utilizado para definir o nível da estrutura e varia de zero para o material desestruturado a um para o material completamente estruturado. O parâmetro  $\lambda$  é utilizado para o cálculo das propriedades reológicas do fluido e da tensão limite de escoamento, ou seja,  $\tau_y = f(\dot{\gamma}, \lambda)$ .



O cálculo do parâmetro estrutural é baseado em uma equação cinética que contempla uma parcela de quebra e outra de reconstrução do fluido. A forma geral desta equação é mostrada pela equação (2) abaixo:

$$\frac{d\lambda}{dt} = (1-\lambda)^a f_1 - \lambda^b f_2 \quad (2)$$

onde  $f_1$  e  $f_2$  são funções ou da taxa de cisalhamento ou da tensão de cisalhamento,  $\lambda$  é o parâmetro estrutural e  $a$  e  $b$  são constantes.

Para exemplificar o cálculo do parâmetro estrutural, as expressões utilizadas pelo modelo de Dullaert e Mewis (2006) e por Mendes (2009) calcular  $\lambda$  são mostradas na Tabela 1.

**Tabela 1 – Expressões para  $d\lambda/dt$  para diferentes autores.**  
Fonte: Autoria Própria

<b>Autor</b>	<b><math>d\lambda/dt</math></b>
Dullaert e Mewis (2006)	$\frac{d\lambda}{dt} = \left(\frac{1}{t}\right)^\beta \left[ -k_1 \lambda \dot{\gamma} + k_2 (1-\lambda) \sqrt{\dot{\gamma}} + k_3 (1-\lambda) \right]$
Mendes (2009)	$\frac{d\lambda}{dt} = \left(\frac{1}{t_{eq}}\right) \left[ (1-\lambda)^a - (1-\lambda_\infty)^a \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_\infty}\right)^b \left(\frac{\tau}{\eta \lambda_\infty \dot{\gamma}}\right)^c \right]$

A partir da análise da Tabela 1, percebe-se que, para ambos os modelos, tem-se na descrição da variação do parâmetro estrutural com o tempo três constantes de ajuste da curva de equilíbrio de tensão por taxa de deformação e um parâmetro transiente. A Tabela 2 apresenta quais são estes parâmetros para cada modelo.

**Tabela 2 – Constantes de equilíbrio e transiente para diferentes autores**  
Fonte: Autoria Própria

<b>Autor</b>	<b>Constantes de equilíbrio</b>	<b>Constante transiente</b>
Dullaert e Mewis (2006)	$k_1, k_2, k_3$	$\beta$
Mendes (2009)	$a, b, c$	$t_{eq}$

### 2.2.2 Modelagem matemática do escoamento tixotrópico

Com o intuito de modelar o escoamento tixotrópico, alguns trabalhos têm sido desenvolvidos. Alguns destes trabalhos consideram o efeito da gelificação do material enquanto outros o desprezam. Abaixo estão demonstrados os principais trabalhos que tratam da modelagem do escoamento tixotrópico.

A primeira tentativa de solução numérica de um escoamento tixotrópico a partir de dados experimentais foi a de Ritter e Batycky (1967), que tentaram prever o início do escoamento de óleos crus parafínicos. Eles utilizaram interpolação polinomial de dados de testes e não levaram em conta a tensão limite de escoamento do material.

Posteriormente, Carleton et al. (1974) *apud* Sestak et al. (1987) realizaram a modelagem numérica de um escoamento tixotrópico considerando a tensão limite de escoamento do material. Contudo, o modelo ainda era simplificado, com condição de contorno de pressão constante na entrada do tubo e efeitos de inércia e de compressibilidade desconsiderados.

Os estudos de Sestak et al. (1987), Cawkwell e Charles (1987), Chang et al. (1999) e Davidson et al. (2004) resolvem o problema de uma tubulação preenchida com óleo gelificado e que posteriormente é deslocado por um fluido não gelificado. Em todos estes modelos não é permitida a mistura entre o fluido gelificado e o não gelificado. Sestak et al. (1987) e Chang et al. (1999), desprezam o termo transiente da equação de conservação da quantidade de movimento. Os efeitos transientes são incluídos pela variação temporal das propriedades reológicas do fluido. O modelo de tixotropia utilizado é o proposto por Houska (1980) *apud* Mewis e Wagner (2009).

No que diz respeito ao reinício do escoamento de fluidos gelificados, Bjørkevoll et al. (2003), analisa os picos de pressão resolvidos neste escoamento. Neste trabalho o fluido é modelado segundo o modelo de Herschel-Bulkley, a condição de contorno é a vazão de fluido controlada na entrada do tubo.

Um modelo para escoamento bidimensional de um fluido de Bingham foi proposto por Vinay et. al. (2006) e posteriormente comparado com um modelo unidimensional pelo mesmo autor em 2007. O modelo unidimensional alcançou

resultados muito próximos ao bidimensional, contudo, demandou um esforço computacional muito menor para a solução.

Wachs et. al. (2009), mesclaram os modelos descritos anteriormente e incluíram uma equação reológica para contemplar a tixotropia. Novamente foi utilizado o modelo de Houska (1980) *apud* Mewis e Wagner (2009), contudo com uma modificação para fluidos compressíveis.

O Laboratório de Ciências Térmicas da UTFPR (LACIT) também possui uma linha de pesquisa voltada ao escoamento de fluidos de perfuração. Cinco trabalhos recentes são expostos a seguir, com os principais temas que vem sendo abordados pelos pesquisadores do laboratório.

O primeiro modelo para o escoamento de fluidos de perfuração do LACIT foi elaborado por Oliveira (2007). Em seu modelo foi resolvido o problema do deslocamento de um fluido gelificado por um não-gelificado através de um tubo acoplado a um espaço anular. O escoamento é considerado unidimensional e quase estacionário, sendo que os fluidos são modelados através do modelo de Bingham.

Rocha (2007) realizou uma modelagem matemática do escoamento de um fluido de perfuração em um tubo cilíndrico. O fluido foi modelado através do modelo de Bingham e a discretização das equações governantes foi realizada por meio do método dos volumes finitos. Os resultados são comparados com os obtidos por Vinay et. al. (2007) e mostraram-se satisfatórios. Com seu trabalho ele conseguiu mostrar a predição de fenômenos conhecidos, como por exemplo, picos de pressão.

Oliveira et al. (2010) desenvolveu um modelo semelhante ao de Rocha (2007), contudo, neste modelo os termos não lineares das equações da quantidade de movimento e conservação da massa e os efeitos gravitacionais que haviam sido desprezados no trabalho anterior foram considerados. O problema foi resolvido para um espaço anular e os resultados mostrados satisfatórios quando comparados ao trabalho de Wachs et. al. (2009).

Negrão et. al. (2011), abordou o problema do escoamento e reinício da circulação de um fluido tixotrópico em uma tubulação com vazão ou pressão constante na entrada. O modelo adotado neste caso é o modelo de Dullaert e Mewis (2006). As constantes de ajuste são obtidas através de um conjunto de dados

experimentais. Os resultados são satisfatórios, contudo o modelo viscoelástico apresenta muitos termos para ajuste da curva experimental e o modelo matemático demanda um alto nível de refino da malha para solução do problema.

O último estudo envolvendo este tema é de Oliveira (2011), que resolve o escoamento de um fluido modelado como o de Bingham através de uma geometria muito semelhante a uma coluna de perfuração. Neste trabalho as equações diferenciais parciais são convertidas em totais por meio do método das características. Para mensurar o termo de atrito, é utilizado o fator de atrito de Fanning, e os tempos de simulação observados para solução do problema são proporcionalmente bem inferiores aos dos trabalhos anteriores. A redução no tempo de simulação neste trabalho se deve à aplicação do método das características.

Percebe-se a partir da análise dos trabalhos de modelagem matemática para o escoamento transitório de fluidos não newtonianos que as variáveis dos problemas são a geometria adotada, o modelo utilizado para descrever o comportamento de tensão *versus* deformação do fluido e o método de solução.

Analisando os trabalhos mais recentes realizados no LACIT, percebe-se que Negrão et. al. (2011) obteve um bom resultado para descrever o comportamento do fluido tixotrópico por meio de um ajuste de dados a um modelo previamente definido. Contudo, o modelo selecionado conta com muitas constantes de ajuste, o que dificulta o ajuste dos dados experimentais e a posterior solução do modelo.

Quanto ao método de solução, Oliveira (2011) obteve baixos tempos de simulação ao transformar as equações diferenciais parciais em totais através do método das características. Com base nestas informações foram selecionados a modelagem do comportamento tixotrópico através de um ajuste de dados com os efeitos viscoelásticos e o método das características para solução do problema no presente trabalho.

## 2.3 Síntese do Capítulo

Apresentaram-se no presente capítulo os conceitos básicos para entendimento do trabalho e uma breve revisão bibliográfica com os trabalhos anteriores na área de modelagem do escoamento de um fluido tixotrópico.

Na fundamentação teórica foram apresentados os conceitos de fluido não newtoniano e de tixotropia. Tais conceitos foram apresentados porque o presente trabalho trata da resolução de um escoamento compressível transiente de um fluido não newtoniano, com características tixotrópicas.

Na revisão bibliográfica foram descritas as abordagens utilizadas na modelagem do comportamento tixotrópico: abordagem fenomenológica, microestrutural direta e microestrutural indireta.

Por fim, apresentou-se o histórico dos trabalhos de modelagem do escoamento tixotrópico e os trabalhos que vêm sendo feitos recentemente no LACIT sobre o tema. Nota-se da evolução dos trabalhos apresentados, que dois fatores de sucesso foram obtidos com os trabalhos recentes:

- O comportamento tixotrópico quando descrito por meio do ajuste de dados de um modelo viscoelástico, demonstra bons resultados quando comparado com outros trabalhos, contudo, o elevado número de constantes de ajuste destes modelos torna o modelo complexo para ser resolvido;
- A discretização das equações e conversão para equações diferenciais totais através do método das características acelera o processo de solução.

Com base nestes dois itens formulou-se o presente trabalho para solução de um escoamento compressível transiente de um fluido com características tixotrópicas, com dois pontos distintos de todos os trabalhos apresentados anteriormente:

- Propor um ajuste de dados simples para modelar a quebra do gel do fluido tixotrópico com poucas constantes de ajuste;

- Resolver o modelo utilizando o método das características e avaliar o termo de atrito sem utilizar o fator de atrito de Fanning.

### 3 AJUSTE DE UMA EQUAÇÃO PARA QUEBRA DO GEL

Neste capítulo serão discutidos os resultados de testes reológicos de inicialização do escoamento em um fluido de perfuração com propriedades tixotrópicas.

A partir da análise dos resultados será proposta uma equação de ajuste entre a tensão de cisalhamento e deformação do material. Os resultados da equação serão comparados com valores experimentais e com resultados de um modelo de tixotropia proposto por Mendes (2009).

Por fim, será realizada uma análise de sensibilidade da equação de ajuste e do modelo de Mendes (2009).

#### 3.1 Análise e tratamento dos dados experimentais

Os dados experimentais utilizados neste trabalho são os mesmos utilizados por Rocha (2010) em sua dissertação de mestrado. Os testes foram realizados na PUC-RJ com uma amostra do fluido de perfuração BR-MUL 1310.

Os resultados são oriundos de uma amostra de testes de inicialização nos quais se utilizou uma variação da taxa de deformação em forma de rampa até um determinado valor e em seguida a taxa foi mantida constante. A Figura 5 mostra o conjunto de curvas de taxas utilizadas nestes testes. Note que o tempo da rampa é de 5s em todos os testes e os valores de taxa constante são, respectivamente,  $5s^{-1}$ ;  $10s^{-1}$ ;  $15s^{-1}$ ;  $20s^{-1}$ ;  $30s^{-1}$ ;  $40s^{-1}$ .

Com a aplicação destas taxas de deformações foram obtidos resultados para tensão de cisalhamento atuante no fluido. A tensão de cisalhamento neste tipo de teste se eleva com o tempo até a quebra da estrutura e decai até atingir um valor de regime permanente. Estas respostas em tensão para as seis diferentes taxas de deformação aplicadas estão representadas na Figura 6.

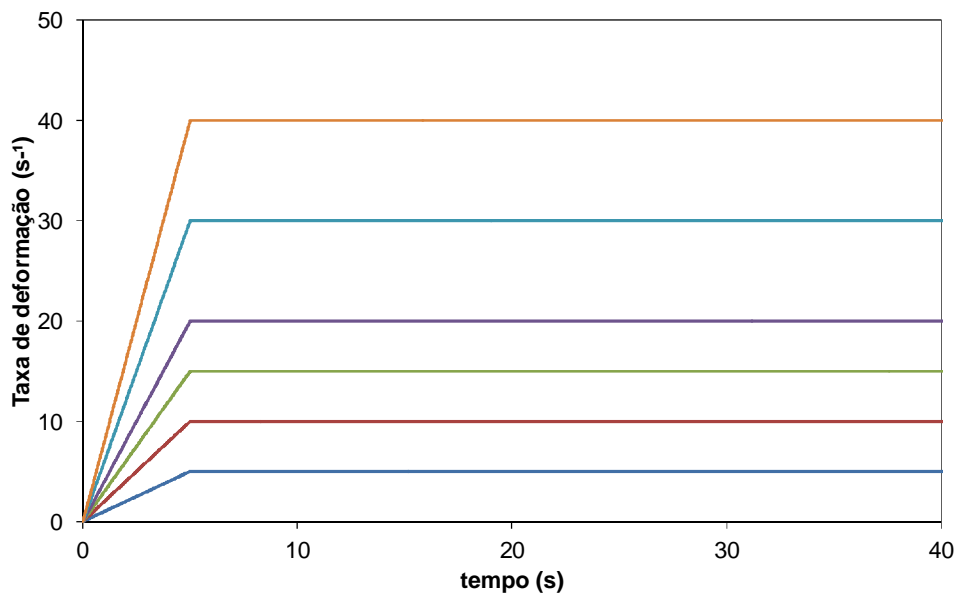


Figura 5 – Gráfico taxa de deformação em função do tempo para os testes experimentais

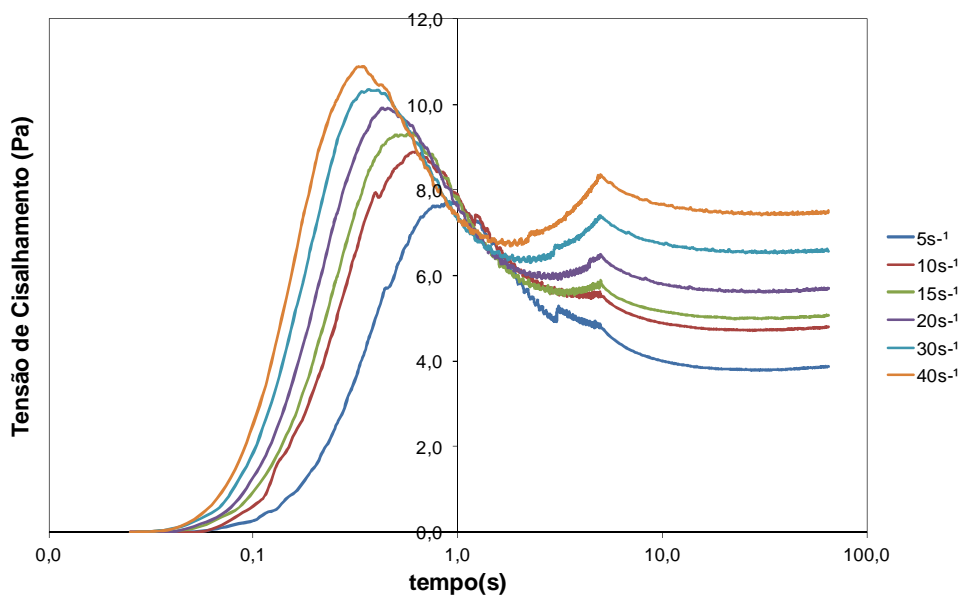


Figura 6 – Respostas em tensão de cisalhamento para as taxas de deformação aplicadas no teste de inicialização

A Figura 6 mostra curvas de tensão de cisalhamento crescentes, a partir de um valor zero no instante inicial (repouso) até um valor de pico. Este valor de pico não é sempre o mesmo e se eleva com o valor da taxa de cisalhamento aplicada. O instante de pico de tensão representa o fenômeno físico da quebra do gel.

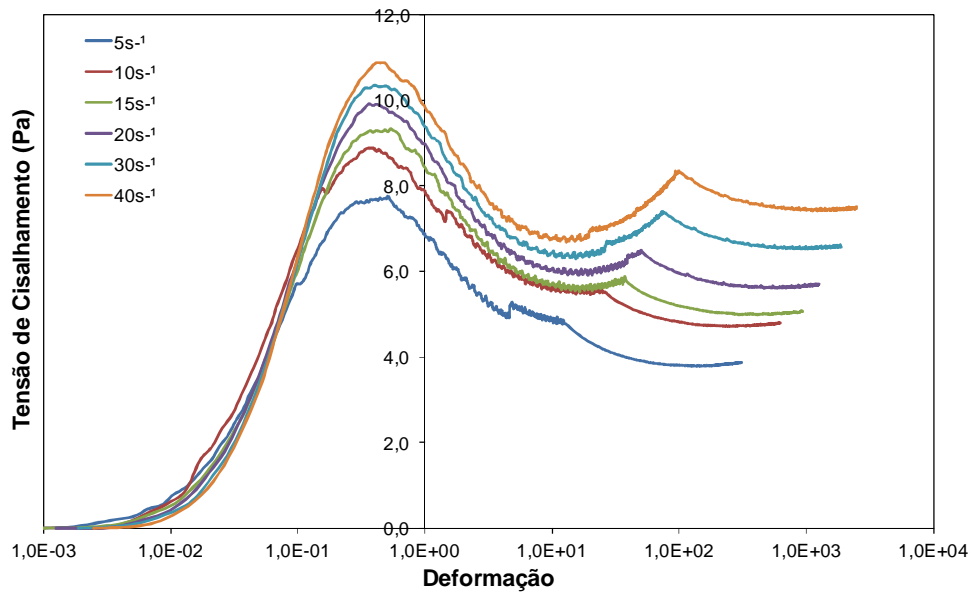


Depois da quebra do gel percebe-se uma redução no valor de tensão de cisalhamento que volta a crescer até atingir um segundo pico, em  $t=5s$ . Este segundo pico de tensão de cisalhamento ocorre devido à parcela viscosa da tensão que depende diretamente da taxa de cisalhamento. A taxa de cisalhamento, como mostra a Figura 5, cresce até  $t=5s$ , ou seja, enquanto a parcela elástica de tensão reduz, a viscosa cresce até  $t=5s$ , gerando o segundo pico de tensão. Após o segundo pico de tensão de cisalhamento o fluido atinge o regime permanente que, assim como o pico de tensão, depende da taxa de cisalhamento aplicada.

Além destas características, a Figura 6 mostra que, no domínio do tempo, o pico de tensão não ocorre sempre no mesmo instante, ou seja, quanto maior a taxa, menor o tempo para que ocorra o pico de tensão. Entretanto, observou-se que independentemente da taxa, este pico ocorre praticamente para a mesma deformação do material. A Figura 7 mostra a variação da tensão em função da deformação, sendo que a deformação é definida pela equação (3):

$$\gamma(t) = \int_0^t \dot{\gamma} dt \quad (3)$$

onde  $\gamma$  é a deformação e  $\dot{\gamma}$  é taxa de deformação imposta.



**Figura 7 - Tensão de cisalhamento em função da deformação para todas as taxas de deformação aplicadas**

A partir das curvas da Figura 7 elaborou-se a Tabela 3, que mostra os respectivos valores de deformação para os quais se dá o pico de tensão de cisalhamento. Este valor, daqui em diante, será definido como deformação crítica e denotado pelo símbolo  $\gamma_c$ .

**Tabela 3 – Deformação na qual ocorre o pico de tensão para as taxas de deformação aplicadas**

<b>Taxa de deformação (s<sup>-1</sup>)</b>	<b><math>\gamma_c</math></b>
5,0	0,510
10,0	0,360
15,0	0,540
20,0	0,361
30,0	0,400
40,0	0,449
<b>Média</b>	<b>0,437</b>
<b>Desvio Padrão</b>	<b>0,076</b>

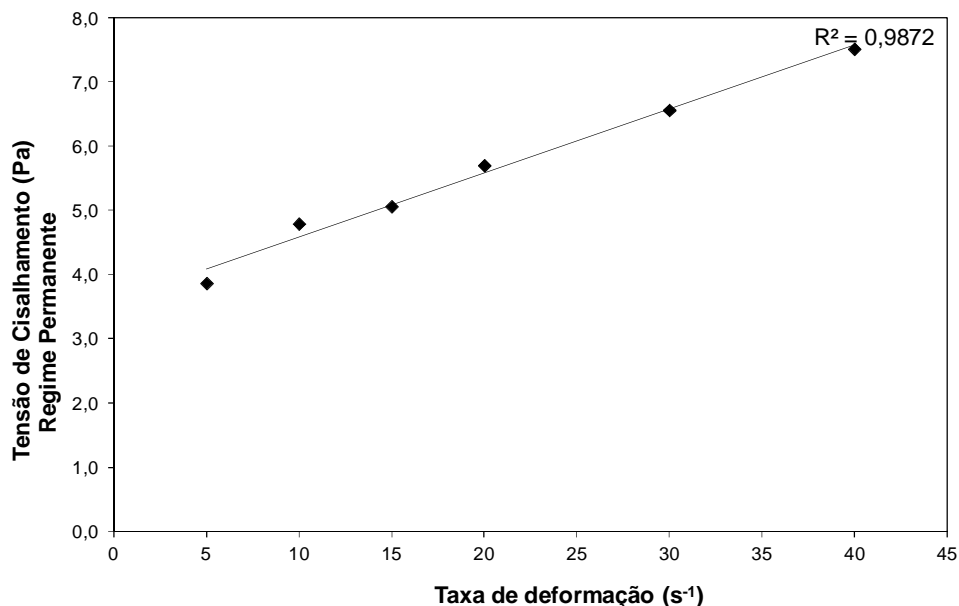
A partir da análise da Figura 7 e da Tabela 3, percebe-se que a variação de  $\gamma_c$  com a taxa de deformação é pequena, pois apresenta um pequeno desvio em relação à média obtida. Desta forma, pode-se assumir que um valor médio seja uma boa aproximação para a deformação crítica em todas as taxas de deformação testadas. O valor médio conforme apresentado na Tabela 3 é  $\gamma_c = 0,437$ .

Para prosseguir com a análise dos dados experimentais, fez-se uma avaliação do comportamento do fluido de perfuração em regime permanente. A análise dos dados foi feita segundo a Figura 8, na qual são mostrados os valores de tensão de cisalhamento de regime permanente em função da taxa de deformação aplicada.

Percebe-se a partir da análise da Figura 8 que os valores de tensão se comportam conforme o modelo de Bingham, ou seja, muito próximos a uma reta com coeficiente linear diferente de zero. Desta forma, assume-se nesta análise que este fluido de perfuração no equilíbrio pode ser modelado como fluido de Bingham como mostra a equação (4)

$$\tau = \tau_{y,\infty} + \eta\dot{\gamma} \quad (4)$$

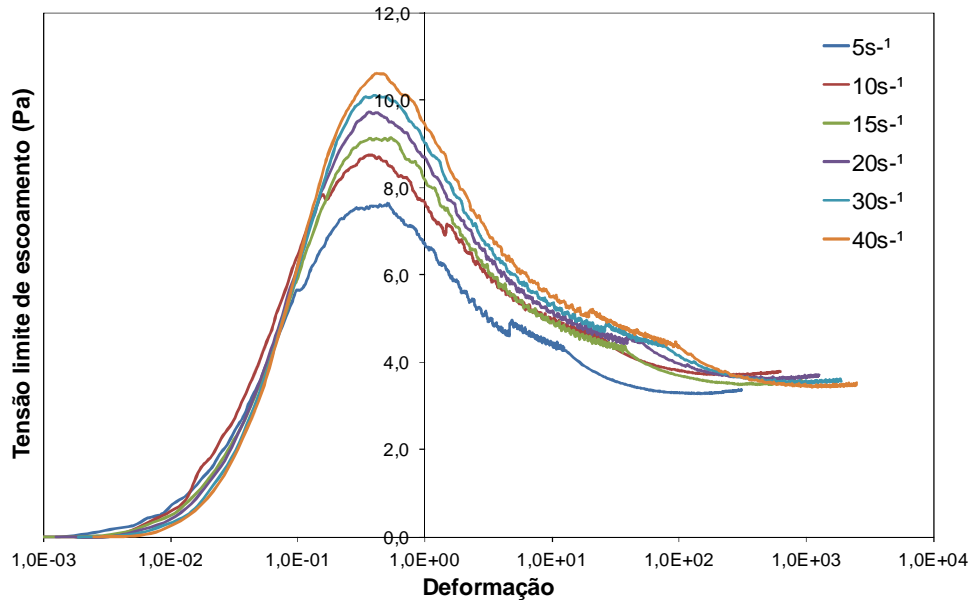
onde  $\tau$  é a tensão de cisalhamento,  $\tau_{y,\infty}$  é a tensão limite de escoamento, representada na reta pelo coeficiente linear e  $\eta$  é a viscosidade plástica do fluido, representada na reta pelo coeficiente angular. Os coeficientes da equação são respectivamente:  $\tau_{y,\infty}=3,59$  Pa e  $\eta=0,0997$  Pa's.



**Figura 8 – Tensão de cisalhamento de regime permanente em função da taxa de deformação**

Supondo que a equação de Bingham deverá ser satisfeita no equilíbrio, subtraiu-se o termo  $\eta\dot{\gamma}$  dos valores medidos de tensão mostrados na Figura 7. Os resultados podem ser vistos na Figura 9. Note que ao remover a parcela viscosa dos valores de tensão, as curvas tendem para um mesmo valor, ou seja, o valor de  $\tau_y$  no regime permanente. Considerando ainda o modelo de Bingham, entende-se que estas curvas representam valores de tensão limite de escoamento que variam com a deformação, e o seu pico é dependente da taxa de deformação.

Portanto, após analisar e realizar o tratamento dos dados experimentais obteve-se a curva para tensão limite de escoamento do fluido de perfuração em função de duas variáveis, deformação instantânea do material e taxa de deformação aplicada, ou seja,  $\tau_y = \tau_y(\gamma, \dot{\gamma})$ .



**Figura 9 – Curvas para tensão limite de escoamento em função da taxa de deformação**

Nota-se que para uma dada taxa de deformação aplicada, a tensão limite de escoamento é dependente apenas da deformação do material e que pode ser ajustada através da curva resultante da solução da equação diferencial de segunda ordem. Esta equação será deduzida e ajustada aos dados experimentais nas seções seguintes.

### 3.2 Proposta de Equação de Ajuste

Como mostrado anteriormente, quando fixado um valor de taxa de deformação, a tensão limite de escoamento depende apenas de uma variável, a deformação instantânea no material. Portanto, para propor uma equação de ajuste para a tensão limite de escoamento será utilizada a solução de uma equação diferencial de segunda ordem.

A equação diferencial de segunda ordem está representada na equação (5),

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0 \quad (5)$$

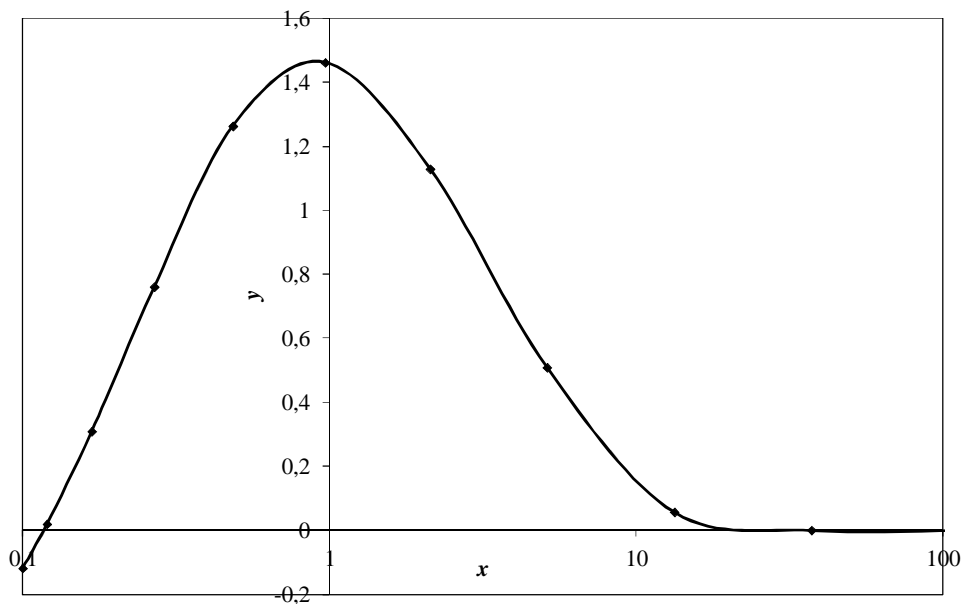
onde  $y$  é a função que se deseja ajustar,  $x$  é a variável independente,  $a$  e  $b$  são coeficientes de ajuste.

Para a equação (5) tem-se três possíveis soluções que dependem dos valores dos coeficientes  $a$  e  $b$ . Após uma análise visual, observou-se que as curvas da Figura 9 possuem o formato da seguinte solução da equação (5):

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}ax} \left( C_1 e^{\frac{1}{2}\lambda x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}\lambda x} \right) \quad (6)$$

onde  $\lambda^2 = a^2 - 4b > 0$ ;  $C_1$  e  $C_2$  são constantes arbitrárias que devem ser determinadas através de condições de contorno do problema.

O gráfico mostrado na Figura 10 mostra o comportamento da função  $y(x)$  para um dado conjunto de parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $C_1$  e  $C_2$ . Note que o ponto inicial da função  $y(x)$  pode ser maior, menor ou igual à zero, contudo, o comportamento desta função sempre é crescente até um ponto máximo e decai até zero em regime permanente.



**Figura 10 – Curvas para solução da equação diferencial de segunda ordem para o seguinte conjunto de parâmetros:  $a=4$ ;  $b=1$ ;  $C_1=2$ ;  $C_2=-3$ .**

Para o problema do ajuste do comportamento tixotrópico do fluido de perfuração, a função que se pretende ajustar é a tensão limite de escoamento, enquanto que a variável independente é a deformação do material.

Comparando as curvas da Figura 9 e da Figura 10 percebe-se que a tensão limite de escoamento no ponto inicial vale zero, enquanto que no ajuste proposto na Figura 10 este é menor do que zero. Já para o regime permanente, a tensão limite

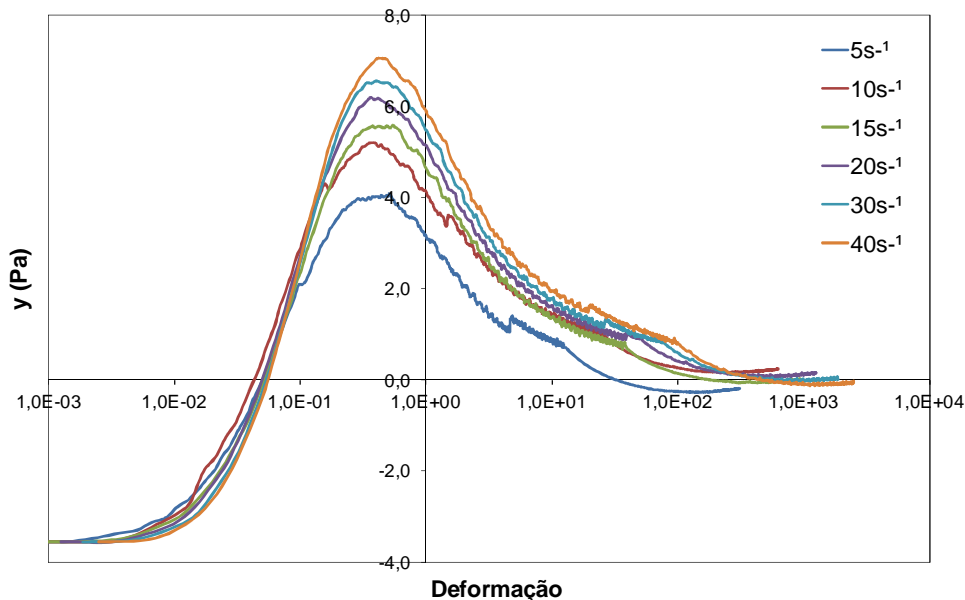
de escoamento sempre converge para um valor constante diferente de zero, enquanto que no ajuste este valor vale zero.

Portanto, é necessário realizar uma transformação linear nas curvas da Figura 9 para deixá-las semelhantes à curva da Figura 10. Esta transformação é realizada por meio da Equação (7)

$$y(\gamma) = \tau_y - \tau_{y,\infty} \quad (7)$$

onde  $\tau_{y,\infty}$  é o valor da tensão limite de escoamento no regime permanente.

A Figura 11 apresenta as curvas da função transformação linear para a tensão limite de escoamento,  $y(\gamma)$ , em função da deformação instantânea do material, ou seja, a Equação (7). Note que, aplicando a transformação linear, a função inicia-se sempre no mesmo valor e converge para zero no regime permanente. Desta forma, estas curvas podem ser representadas pela curva da Figura 10.



**Figura 11 – Tensão limite de escoamento transformada linearmente para o ajuste de dados**

Portanto, a solução da equação diferencial de segunda ordem mostrada na Equação (6), quando aplicada ao problema do comportamento tixotrópico do fluido de perfuração torna-se a Equação (8) mostrada abaixo:

$$y(\gamma) = \tau_y - \tau_{y,\infty} = e^{-\frac{1}{2}a\gamma} \left( C_1 e^{\frac{1}{2}\lambda\gamma} + C_2 e^{-\frac{1}{2}\lambda\gamma} \right) \quad (8)$$

Para finalizar a dedução da equação de ajuste, basta aplicar à Equação (8) duas condições de contorno distintas e determinar as expressões para  $C_1$  e  $C_2$ . Das curvas mostradas na Figura 9, dois pontos notáveis são destacados para determinação de  $C_1$  e  $C_2$  como mostra a Tabela 4.

**Tabela 4 – Pontos notáveis da curva de tensão limite de escoamento x deformação para determinação das constantes arbitrárias**

Ponto	$\gamma$	$\tau_y$ (Pa)	$y(\gamma)$
1	0	0	$-\tau_{y,\infty}$
2	$\gamma_c$	$\tau_{y,c}$	$\tau_{y,c} - \tau_{y,\infty}$

O ponto 1 da Tabela 4 foi selecionado porque é a condição de contorno de repouso inicial do problema. Já o ponto 2, representa o ponto de tensão limite de escoamento máxima e introduz no problema a influência da taxa de deformação imposta ao escoamento.

Aplicando as condições descritas na Tabela 4 à Equação (8) obtém-se as expressões para  $C_1$  e  $C_2$  como mostram as equações (9) e (10):

$$C_1 = - \left[ \frac{(\tau_{y,c} - \tau_{y,\infty}) e^{\frac{1}{2}a\gamma_c} + \tau_{y,\infty} e^{-\frac{1}{2}\lambda\gamma_c}}{e^{-\frac{1}{2}\lambda\gamma_c} - e^{\frac{1}{2}\lambda\gamma_c}} \right] \quad (9)$$

$$C_2 = \frac{(\tau_{y,c} - \tau_{y,\infty}) e^{\frac{1}{2}a\gamma_c} + \tau_{y,\infty} e^{\frac{1}{2}\lambda\gamma_c}}{e^{-\frac{1}{2}\lambda\gamma_c} - e^{\frac{1}{2}\lambda\gamma_c}} \quad (10)$$

A dependência da tensão limite de escoamento com a taxa de deformação aplicada é imposta na equação de ajuste por meio da variável  $\tau_{y,c}$ . Para descrever a forma como  $\tau_{y,c}$  varia com a taxa de deformação imposta foi proposta uma equação de lei de potência:

$$\tau_{y,c} = A\dot{\gamma}^B \quad (11)$$

onde  $A=6,1$  e  $B=0,1575$  são coeficientes de ajuste da curva.

O ajuste proposto na equação (11) tem coeficiente de correlação  $R^2=0,992$  e caracteriza muito bem a variação do pico de tensão limite de escoamento com a taxa de deformação aplicada para os dados experimentais em questão.

Portanto, tem-se que o conjunto de equações apresentado nesta seção é a proposta de ajuste de dados para o comportamento da tensão limite de escoamento do fluido de perfuração tixotrópico em um processo de quebra de gel com taxa de deformação controlada.

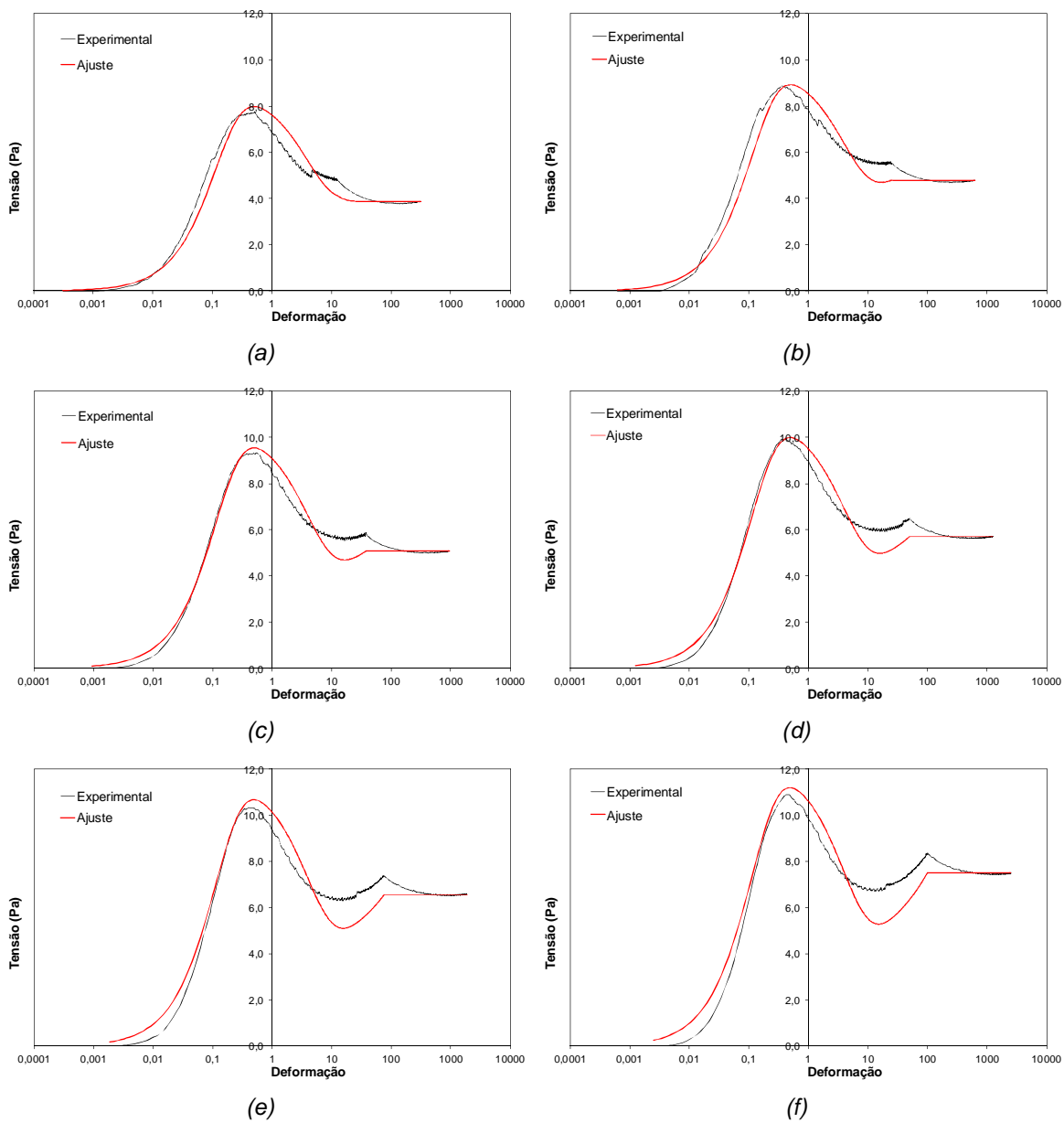
Para realizar o procedimento de ajuste do conjunto de equações aqui apresentado com os dados experimentais foi utilizado o método dos mínimos quadrados através do *software Microsoft Excel 2007*. O ajuste foi realizado para todas as curvas de tensão limite de escoamento por deformação apresentadas na Figura 9.

O ajuste foi realizado para a tensão limite de escoamento e depois aplicou-se a equação de Bingham aos resultados para obter os resultados em tensão de cisalhamento. Os valores de  $a$  e  $b$  encontrados para este ajuste foram, respectivamente,  $a=8,81$  e  $b=2,09$ . O parâmetro  $\lambda^2$  que, como havia sido definido na seção anterior, tem que ser maior do que zero, vale  $\lambda^2=69,30$ .

A Figura 12 mostra a comparação entre os dados experimentais e o ajuste realizado para a tensão de cisalhamento. Esta comparação é feita por meio de seis diferentes gráficos, um para cada valor de taxa de deformação aplicada. Nos gráficos apresentam-se os dados experimentais e o resultado do ajuste de maneira sobreposta para avaliar a qualidade do ajuste realizado.

Uma primeira análise qualitativa mostra que o formato das curvas é muito próximo, além disso, os principais pontos da curva experimental são claramente descritos pelo ajuste de dados.





**Figura 12 – Comparação dos resultados da equação de ajuste com os dados experimentais para as seguintes taxas de deformação aplicadas: (a)  $5s^{-1}$ ; (b)  $10s^{-1}$ ; (c)  $15s^{-1}$ ; (d)  $20s^{-1}$ ; (e)  $30s^{-1}$ ; (f)  $40s^{-1}$ .**

Uma análise das curvas é feita por meio do coeficiente de correlação. O coeficiente de correlação médio para o conjunto de curvas da Figura 12 é  $R^2=0,899$ . O maior coeficiente de correlação ocorre para  $\dot{\gamma}=5s^{-1}$  e vale  $R^2=0,934$  enquanto que o menor ocorre para  $\dot{\gamma}=40s^{-1}$  e vale  $R^2=0,840$ . Esses valores de coeficiente de correlação juntamente com a concordância das curvas do ajuste com os dados experimentais evidenciam a qualidade do ajuste.

Para resumir os resultados do ajuste de dados para a tensão limite de escoamento, tem-se na Tabela 5 o coeficiente de correlação para cada curva.

**Tabela 5 – Coeficientes de correlação para os ajustes com diferentes taxas de deformação**

$\dot{\gamma}$ ( $\text{s}^{-1}$ )	$R^2$
5	0,934
10	0,919
15	0,919
20	0,908
30	0,874
40	0,840

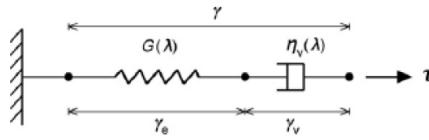
Na próxima seção será realizada a comparação do conjunto de equações proposto com o modelo microestrutural indireto de Mendes (2009).

### **3.3 Comparação da Equação com os dados experimentais e com o modelo proposto por Mendes (2009)**

Na seção anterior foi proposta uma equação para descrever a quebra do gel de fluidos de perfuração a partir de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. A equação foi ajustada aos dados experimentais e mostrou-se muito boa para descrever o comportamento da quebra do gel.

Nesta seção o ajuste será comparado ao modelo de Mendes (2009), para duas situações distintas de taxa de deformação.

O modelo de Mendes (2009) é análogo ao modelo de Maxwell, ou seja, considera o fluido não newtoniano como viscoelástico, como mostra a Figura 13. Contudo, por tratar-se de um modelo microestrutural indireto, o módulo de cisalhamento,  $G$ , e a viscosidade,  $\eta_v$ , são descritas em função de um parâmetro estrutural  $\lambda$  que varia de 0 a 1, dependendo da estrutura do fluido.



**Figura 13 – Representação do modelo de Maxwell com propriedades dependentes do parâmetro estrutural.**

Fonte: Mendes (2009).

A Figura 13 mostra que para uma dada tensão de cisalhamento,  $\tau$ , o fluido sofre uma deformação  $\gamma$  que pode ser dividida em uma parte elástica, representada por  $\gamma_e$  e uma parte viscosa, representada por  $\gamma_v$ . Contudo, a tensão atuante em ambas as partes é a mesma.

A partir destas relações desenvolve-se uma expressão para a variação da tensão de cisalhamento com o parâmetro estrutural  $\lambda$ . A equação que representa esta relação é a Equação (12)

$$\tau + \frac{\eta_v(\lambda)}{G(\lambda)} \dot{\tau} = \eta_v(\lambda) \dot{\gamma} \quad (12)$$

onde  $G(\lambda)$  é o módulo de cisalhamento e  $\eta_v(\lambda)$  é a viscosidade, ambas dependentes do parâmetro estrutural  $\lambda$ .

Para completar o conjunto de equações do modelo proposto por Mendes (2009) assume-se que a variação do parâmetro estrutural  $\lambda$  com o tempo e os parâmetros do escoamento é dada pela Equação (13)

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{t_{eq}} \left[ (1-\lambda)^a - (1-\lambda_{ss})^a \left( \frac{\lambda}{\lambda_{ss}} \right)^b \left( \frac{\tau}{\eta_v(\lambda_{ss}) \dot{\gamma}} \right)^c \right] \quad (13)$$

onde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $t_{eq}$  são constantes de ajuste e  $\lambda_{ss}$  é o valor do parâmetro estrutural em regime permanente e pode ser determinado através de propriedades do equilíbrio para o fluido tixotrópico.

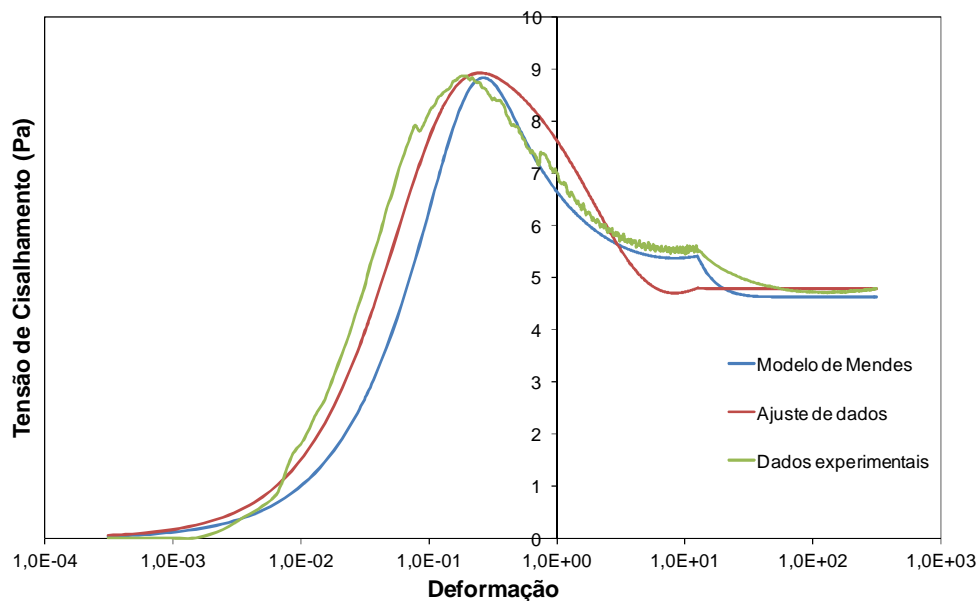
A equação (13) mostra a evolução do parâmetro estrutural com o tempo e os parâmetros do escoamento. Esta equação é composta por uma parcela de quebra e

outra de reestruturação do fluido tixotrópico, o que representa a base física do fenômeno de quebra do gel.

Para comparar o modelo proposto por Mendes (2009) com o ajuste realizado na seção anterior, fez-se o ajuste do modelo de Mendes (2009) para os dados experimentais apresentados na Figura 6 utilizando o método dos mínimos quadrados e obteve-se como resultado os seguintes parâmetros:  $a=1,923$ ;  $b=17,63$ ;  $c=0,356$ ;  $t_{eq}=9,952s$ .

Os resultados para o modelo de Mendes (2009), para a equação proposta e os dados experimentais são mostrados na Figura 14. Estas curvas são referentes à taxa de deformação de regime permanente igual a  $10s^{-1}$ .

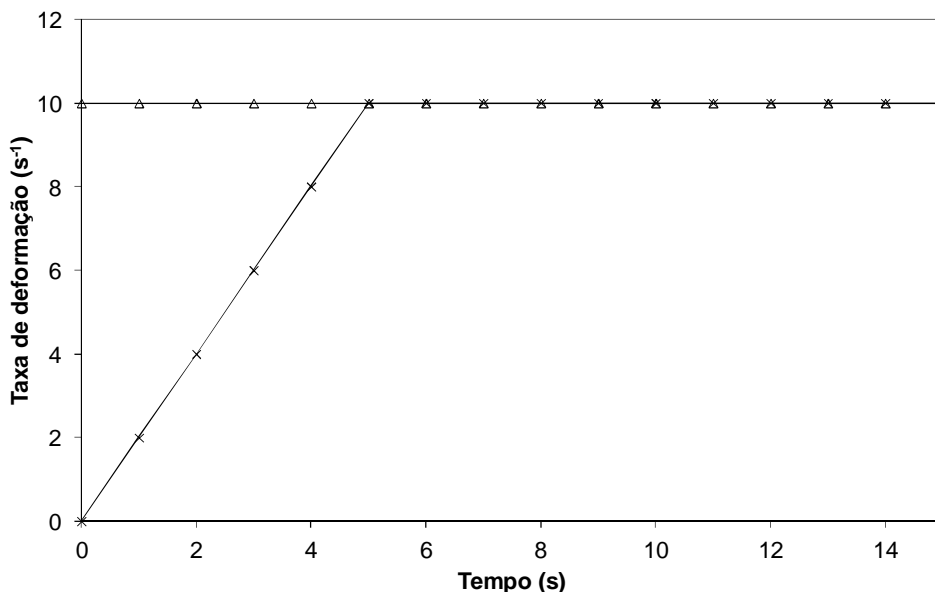
Como pode-se observar, o modelo de Mendes (2009) se aproxima mais do formato da curva experimental do que a equação proposta. Contudo a complexidade do ajuste e do cálculo para o modelo de Mendes (2009) é muito maior, dada a quantidade de parâmetros envolvidos.



**Figura 14 – Comparação entre o modelo proposto por Mendes (2009), o ajuste proposto e os dados experimentais para taxa de deformação  $10s^{-1}$ .**

Para finalizar a análise da equação proposta, fez-se a comparação com o modelo microestrutural indireto proposto por Mendes (2009) em uma situação de escoamento diferente dos testes experimentais. Para esta comparação foi utilizada

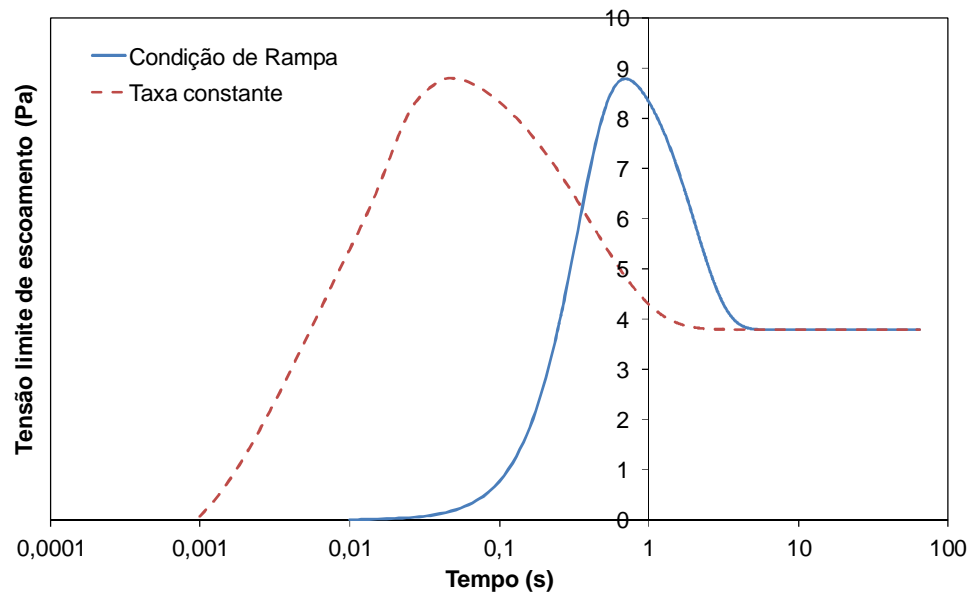
uma taxa de deformação constante, desde o início do escoamento no valor de  $\dot{\gamma} = 10\text{s}^{-1}$ . A Figura 15 mostra a diferença entre a evolução da taxa de deformação para as duas condições propostas (aumento da taxa de deformação em forma de rampa e taxa de deformação constante):



**Figura 15 – Curvas de taxa de deformação em função do tempo para as duas condições testadas**

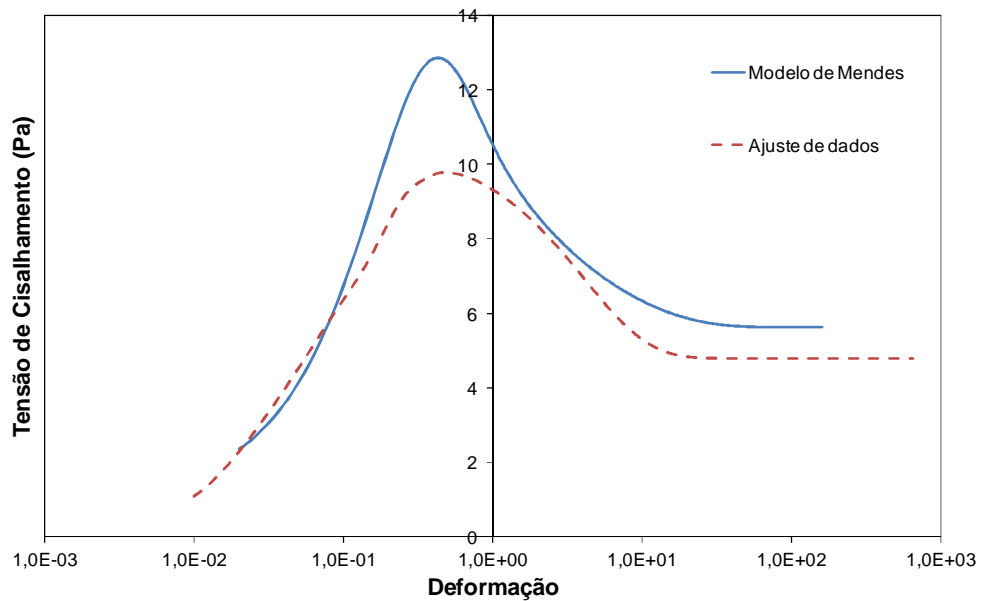
As curvas de tensão limite de escoamento em função da deformação para o ajuste proposto nas duas condições diferentes de taxa de deformação são mostradas na Figura 16.

A Figura 16 mostra que a mudança na forma que a taxa de deformação evolui muda o instante de tempo de ocorrência do pico, mas não o valor do pico. Isto ocorre porque no ajuste a deformação de ocorrência da quebra do gel,  $\gamma_c$ , é fixa, mas o tempo não. Já o valor do pico de tensão é função da taxa de regime permanente que, nesta comparação, é o mesmo para os dois casos.



**Figura 16 – Curvas de tensão de cisalhamento em função do tempo para as condições de evolução da taxa em rampa e taxa constante**

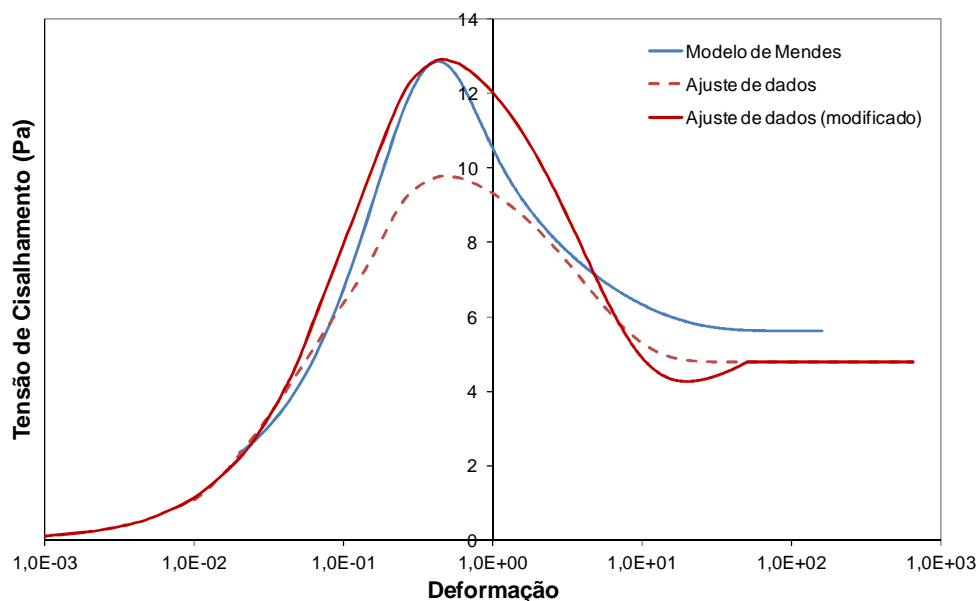
A Figura 17 mostra a comparação do ajuste de dados com o modelo de Mendes (2009) para a condição de taxa de deformação constante. Percebe-se que o ponto de ocorrência da quebra do gel é o mesmo para os dois modelos. Contudo, o valor do pico de tensão não é o mesmo.



**Figura 17 – Curvas de tensão de cisalhamento em função da deformação para o ajuste de dados e o Modelo de Mendes – Condição de taxa constante**

A diferença entre os valores de pico de tensão de cisalhamento das curvas da Figura 17 ocorre porque o ajuste de dados representa a tensão de quebra do gel em função da taxa de regime permanente para a condição de rampa. Quando se aplica a condição de taxa constante deve-se recalcular esta tensão com base na tensão real em que ocorre a quebra.

A Figura 17 mostra que a quebra do gel para a taxa de deformação constante ocorre em  $\gamma_c=0,437$ . Para poder comparar o ajuste com o modelo de Mendes (2009) deve-se aplicar ao ajuste da tensão de quebra do gel, equação (11), o valor de taxa de deformação de regime permanente na condição de rampa que resulte em uma taxa de deformação igual a  $10s^{-1}$  para  $\gamma_c=0,437$ . Este valor de taxa de deformação de regime permanente é  $114,42s^{-1}$ . Aplicando este valor no ajuste para a tensão de quebra do gel obtém-se a curva mostrada na Figura 18.



**Figura 18 – Comparação do modelo proposto por Mendes (2009) e o ajuste de dados modificado para taxa de deformação constante de  $10s^{-1}$ .**

A Figura 18 mostra que, com a correção do ajuste da tensão de quebra do gel, os valores de tensão de quebra para o ajuste de dados se torna muito próximo ao modelo de Mendes (2009). A deformação de quebra do gel não é alterada e o formato da curva é muito próximo ao modelo de Mendes (2009).

Portanto, percebe-se que a equação proposta pode de fato representar o comportamento de quebra de gel de fluidos de perfuração, pois seus resultados se aproximam muito do modelo microestrutural indireto proposto por Mendes (2009). Além desta constatação percebe-se que, dada a simplicidade da equação proposta, o ajuste proposto é muito mais simples de ser realizado do que para os modelos já existentes na literatura.

### **3.4 Síntese do Capítulo**

Este capítulo teve como principal objetivo apresentar uma equação que represente a quebra do gel de fluidos de perfuração e realizar o ajuste desta equação a dados experimentais conhecidos.

Para atingir o objetivo acima citado, primeiramente fez-se a apresentação e explicação dos dados experimentais utilizados, bem como manipulações algébricas que permitiram tornar os dados experimentais ajustáveis por meio de um modelo simples.

Posteriormente apresentou-se a equação diferencial de segunda ordem da qual foi deduzida a equação para ajuste dos dados experimentais. Comentou-se da dependência da tensão limite de escoamento em relação a duas variáveis distintas (taxa de deformação aplicada e deformação instantânea do material) e a forma como isto iria ser tratado no problema. Concluiu-se que, para uma dada taxa de deformação constante, apenas a deformação instantânea do material influencia na resposta em tensão de cisalhamento durante o escoamento. Dessa forma, foi possível utilizar a solução da equação diferencial de segunda ordem para fazer o ajuste.

A partir de dois pontos notáveis da curva de dados experimentais fez-se a dedução das constantes do modelo e definiu-se a forma como estas constantes tornam-se variáveis quando se utiliza uma taxa de deformação diferente.

Depois destas deduções realizou-se o ajuste da equação aos dados experimentais pelo método dos mínimos quadrados. Estes resultados foram



expostos e mostraram-se muito satisfatórios para descrever o comportamento da quebra do gel do fluido de perfuração.

Por fim, fez-se a comparação do ajuste proposto a um modelo microestrutural indireto viscoelástico da literatura, o modelo de Mendes (2009). Novamente o ajuste de dados mostrou-se de simples aplicação e com resultados muito satisfatórios.

## 4 MODELAGEM MATEMÁTICA E MÉTODO NUMÉRICO

Neste capítulo apresenta-se um modelo matemático para o reinício do escoamento de um fluido de perfuração gelificado em uma tubulação sob dois tipos de condições de contorno (pressão ou vazão constante na entrada do tubo). As variáveis do problema, bem como as condições de contorno são parametrizadas e expressas em termos de grupos adimensionais. Por fim o modelo é resolvido através do método das características.

### 4.1 Formulação do Problema

O problema consiste no escoamento transitório de um fluido tixotrópico em um tubo com diâmetro  $D$  e comprimento  $L$  sem variação de área de seção transversal. A Figura 19 mostra a geometria e o sistema de coordenadas adotado.

Inicialmente tem-se o fluido em repouso em toda a tubulação. No instante  $t=0,0s$  ocorre o início do escoamento através do acionamento de uma bomba. Têm-se duas condições de contorno na entrada da tubulação: pressão ou vazão constante. Já na saída da tubulação considera-se a condição de pressão nula.

O escoamento se desenvolve na direção axial e o perfil de velocidade é obtido através da integração numérica na direção radial em cada seção. Por esta razão, a malha deve ser construída considerando elementos diferenciais nas direções  $r$  e  $z$ .

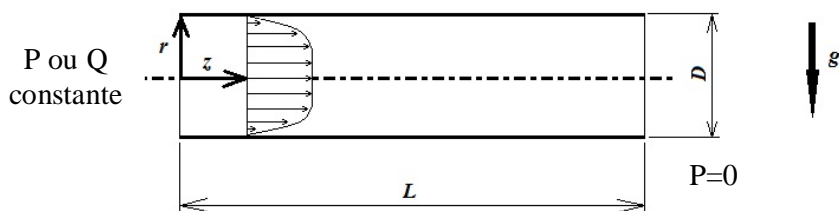


Figura 19 – Geometria e sistema de coordenadas adotado no problema

Para simplificar o problema considera-se o escoamento isotérmico. O escoamento é considerado fracamente compressível e o comportamento da tensão

de cisalhamento em função da taxa de deformação é descrito através do modelo de Bingham.

Para a solução do escoamento consideram-se as propriedades uniformes em cada seção transversal e o escoamento é considerado simétrico em relação à direção angular. Por tratar-se de um escoamento em uma tubulação horizontal os efeitos gravitacionais são desprezados.

## 4.2 Equações Básicas

### 4.2.1 Equação da Conservação da Massa

As propriedades na seção transversal do escoamento são obtidas através da integração numérica em  $r$ . Dessa forma, depois de obtidos os valores destas propriedades, apenas há variação de velocidade em  $z$ . Assim, a equação da conservação da massa assume a seguinte forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial z} = 0 \quad (14)$$

onde,  $\rho$  e  $V$  são, respectivamente, valores médios da massa específica e da velocidade.

Segundo Oliveira *et al.* (2010) a variação da massa específica na direção axial pode ser desprezada quando o escoamento é fracamente compressível. Com esta consideração, a equação da conservação da massa se resume a:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad (15)$$

Para o escoamento isotérmico, através da equação de estado sabe-se que a variação da massa específica com a pressão é dada por  $\partial \rho / \partial P = \rho \alpha$ , onde  $\alpha$  é a compressibilidade do fluido. Incluindo esta relação na equação (15) obtém-se a equação da conservação da massa em função da pressão e da velocidade:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad (16)$$

Como a área de seção transversal da tubulação é constante, pode-se reescrever a equação (16) em função da vazão volumétrica  $Q$ :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{\alpha A_s} \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \quad (17)$$

onde  $A_s$  é a área de seção transversal do tubo.

#### 4.2.2 Equação da Quantidade de Movimento

Para aplicar a equação da quantidade de movimento ao problema em questão utiliza-se um volume de controle cilíndrico de comprimento  $dx$ . Considerando o escoamento simétrico em relação à direção angular tem-se:

$$\frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho VV)}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\pi}{A_s} D\tau_w + \rho g \quad (18)$$

onde  $\tau_w$  é a tensão de cisalhamento na parede da tubulação.

Oliveira *et. al.* (2010) também demonstrou que o efeito do termo  $\partial(\rho VV)/\partial z$  pode ser desprezado. Dessa forma, a equação (18) se reduz a:

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\pi}{A_s} D\tau_w = 0 \quad (19)$$

Assim como para a equação de conservação da massa, reescreve-se a equação da quantidade de movimento em função da vazão volumétrica  $Q$ , visto que a área da seção transversal do tubo,  $A_s$ , é constante ao longo da direção  $z$ .

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{A_s} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\pi}{\rho A_s} D\tau_w = 0 \quad (20)$$

Na equação (20) o termo de tensão na parede  $\tau_w$  será avaliado através da integração do perfil de velocidade na direção radial.

### 4.2.3 Expressão para Tensão na Parede

Para obter a tensão na parede  $\tau_w$ , faz-se primeiro a integração do perfil de velocidade. Para obter este perfil, assume-se a estrutura do fluido de perfuração como sendo de um fluido de Bingham, como mostrado abaixo:

$$\tau = \tau_y + \eta \frac{\partial v_z}{\partial r} \quad (21)$$

Como mostrado no capítulo anterior, foi proposto um ajuste para a tensão limite de escoamento com a deformação. Neste caso a variação da tensão limite de escoamento na direção radial será desprezada, apenas será considerada a sua variação na direção axial. Dessa forma, na direção radial a relação entre a tensão e o raio é linear e dada pela seguinte expressão:

$$\tau = \tau_w \frac{r}{R} \quad (22)$$

Substituindo a equação (22) na equação constitutiva do fluido de Bingham, mostrada na equação (21), e isolando o termo diferencial da velocidade para realizar a integração e obter o perfil de velocidades, tem-se a seguinte equação:

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{1}{\eta} \left( \tau_w \frac{r}{R} - \tau_y \right) \quad (23)$$

### 4.3 Adimensionalização das Equações

Para adimensionalizar as equações constitutivas, da conservação da massa e a equação da quantidade de movimento, as variáveis são parametrizadas em função dos seguintes valores de referência: comprimento total da tubulação ( $L$ ), o tempo necessário para a onda percorrer a tubulação ( $L/c$ ), pressão e vazão de referência ( $P_R$  e  $Q_R$ , respectivamente) que dependem das condições de contorno adotadas. Desta forma, tem-se:

$$P^* = \frac{P}{P_R}, \quad Q^* = \frac{Q}{Q_R}, \quad z^* = \frac{z}{L} \quad \text{e} \quad t^* = \frac{tc}{L}$$

onde nas expressões acima o sobrescrito \* representa a variável adimensional.

Introduzindo na equação constitutiva (23), da conservação da massa (17) e da quantidade de movimento (20) os parâmetros adimensionais, têm-se as expressões (24), (25) e (26), respectivamente:

$$\frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} = \frac{\alpha^* Re_c}{2} (\tau_w^* r^* - \tau_y^*) \quad (24)$$

$$\frac{\partial P^*}{\partial t^*} + \frac{Ma}{\alpha^*} \frac{\partial Q^*}{\partial z^*} = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\alpha^*}{Ma} \frac{\partial P^*}{\partial z^*} + \frac{\partial Q^*}{\partial t^*} - \frac{4\delta\alpha^*}{Ma} \tau_w^* = 0 \quad (26)$$

onde  $\tau_w^* = \tau_w / P_R$  e  $\tau_y^* = \tau_y / P_R$  são respectivamente as tensões na parede e de limite de escoamento adimensionalizadas pela pressão de referência,  $Ma = Q_R / A_{sc}$  é o número de Mach,  $\delta = L/D$  é a razão de aspecto,  $\alpha^* = P_R \alpha$  é a compressibilidade adimensional e  $Re_c = \rho c D / \eta$  é o número de Reynolds para a velocidade da onda.

#### 4.4 Condições Iniciais e de Contorno

Como condições iniciais do problema, tem-se o fluido em repouso na tubulação, ou seja,  $Q^*(z^*, t^*) = 0$ . O campo inicial de pressões também é nulo visto que os efeitos gravitacionais são desprezados no presente trabalho. Dessa forma tem-se que  $P^*(z^*, t^*) = 0$ .

Para iniciar o escoamento na tubulação, uma bomba é acionada. A propagação da onda oriunda deste impulso ocorre à velocidade finita, visto que o fluido é compressível. Dessa forma, um tempo é necessário para que os efeitos da condição de contorno sejam percebidos no restante da tubulação.

Neste trabalho duas condições de contorno serão abordadas. Ambas as condições dizem respeito ao estado na entrada da tubulação após o acionamento da bomba em um instante de tempo  $t^* = 0$ . A primeira condição de contorno implica em uma pressão constante na entrada da tubulação denotada por  $P_B$ . A segunda condição de contorno implica em uma vazão constante na entrada da tubulação denotada por  $Q_B$ .

Tanto a pressão como a vazão de referência para a adimensionalização das equações são determinadas pela condição de regime permanente. Para o primeiro caso, a pressão de referência  $P_R = P_B$  e a vazão de referência é função da pressão de referência, ou seja,  $Q_R = f(P_B)$ . No segundo caso ocorre o oposto, a vazão de referência é  $Q_R = Q_B$  e a pressão de referência é função da vazão de referência, ou seja,  $P_R = f(Q_B)$ . Os valores adimensionais das condições de contorno são mostrados na Tabela 6.

**Tabela 6 – Parâmetros adimensionais das condições de contorno**

	Entrada	Saída
Condição 1 - Pressão constante	$P^*(z^*=0;t)=1$	$P^*(z^*=1;t)=0$
Condição 2 - Vazão constante	$Q^*(z^*=0;t)=1$	$P^*(z^*=1;t)=0$

## 4.5 Parâmetros do Escoamento

Uma vez definida a condição de contorno adotada tem-se que descrever a expressão para a vazão de referência em função da pressão da bomba,  $Q_R = f(P_B)$  no caso de pressão constante na entrada e a expressão para a pressão de referência em função da vazão da bomba,  $P_R = f(Q_B)$  no caso de vazão constante na entrada da tubulação.

### 4.5.1 Caso de Pressão Constante

Para o caso de pressão constante na entrada a vazão é determinada a partir da condição de regime permanente para um fluido newtoniano. Esta expressão para uma tubulação pode ser descrita por:

$$-\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{32\mu Q}{A_s D} \quad (27)$$

Substituindo o gradiente de pressão pela queda de pressão na tubulação  $\Delta P$  ao longo do comprimento total do tubo  $L$ , tem-se:

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{32\mu Q}{A_s D} \quad (28)$$

No caso de pressão constante na entrada, a pressão na entrada da tubulação é  $P_B$  enquanto que na saída da tubulação é zero. Dessa forma,  $\Delta P = P_B$ . Substituindo esta relação na equação (28) e isolando a vazão tem-se que:

$$Q = Q_R = \frac{P_B A_S D}{32 \mu L} \quad (29)$$

#### 4.5.2 Caso de Vazão Constante

Para o caso de vazão constante na entrada da tubulação, a pressão de referência é determinada em função da vazão na entrada da tubulação  $Q_B$ . Para obter esta expressão basta isolar a pressão na equação (29) substituindo a vazão por  $Q_B$ . Dessa forma, a expressão para a pressão de referência é dada pela equação (30):

$$P_R = \frac{32 Q_B \mu L}{A_S D} \quad (30)$$

#### 4.6 Integração da Equação Constitutiva

O início da solução do modelo proposto é a solução da equação constitutiva adimensional para obter um perfil de tensão adimensional na parede em função dos parâmetros do escoamento. Este perfil é então substituído na equação da quantidade de movimento adimensional.

Realizando a integração da equação (24) entre uma posição arbitrária  $r$  e o raio da tubulação  $R$  e, sabendo-se que a velocidade na parede é zero tem-se a seguinte expressão para o perfil de velocidade adimensional na tubulação:

$$v^* = \frac{\alpha^* \text{Re}_c}{2N} \left[ (1 - r^*) \tau_y^* - \frac{\tau_w^*}{2} \sum_{i=r/\Delta r}^N (2i + 1) \right] \quad (31)$$

onde  $i$  é um número inteiro,  $v^*$  é a velocidade axial na posição radial  $r$ ,  $\Delta r^*$  é a largura das divisões na direção radial adimensionalizada pelo raio da tubulação e  $N$  é a quantidade de divisões na direção radial.



A partir deste ponto, para facilitar a notação, o somatório acima será chamado

$$S_1 = \sum_{i=r/\Delta r}^N (2i+1).$$

Para calcular a velocidade média adimensionalizada no tubo, realiza-se a integração da equação (31) do ponto central  $r=0$  até a parede  $r=R$ , ou seja, de  $r^*=0$  até  $r^*=1$ . A equação (32) mostra a expressão para a velocidade média adimensional:

$$V^* = -\left(\frac{\alpha^* \text{Re}_c}{2}\right) \left(\frac{\tau_y^*}{N^2}\right) \sum_{j=0}^N [(1-r^*)(2j+1)] + \left(\frac{\alpha^* \text{Re}_c}{2}\right) \left(\frac{\tau_w^*}{2N^4}\right) \sum_{j=0}^N [S_{1,j}(2j+1)] \quad (32)$$

A partir deste ponto, para facilitar a notação, os somatórios acima serão chamados de  $S_2 = \sum_{j=0}^N [(1-r^*)(2j+1)]$  e  $S_3 = \sum_{j=0}^N [S_{1,j}(2j+1)]$ .

Reescrevendo a equação (32) em termos da vazão adimensional obtém-se a expressão para a tensão adimensional na parede mostrada abaixo:

$$\tau_w^* = 2N^2 \frac{S_2}{S_3} \left[ \tau_y^* + \left(\frac{2N^2}{S_2}\right) \left(\frac{Ma}{\alpha^* \text{Re}_c}\right) Q^* \right] \quad (33)$$

Substituindo a expressão (33) na equação da quantidade de movimento adimensionalizada, equação (26), obtém-se a equação (34) que, juntamente com a equação da conservação da massa adimensionalizada, equação (25) servirá de base para a solução do escoamento.

$$\frac{\alpha^*}{Ma} \frac{\partial P^*}{\partial z^*} + \frac{\partial Q^*}{\partial t^*} - 8 \left(\frac{\delta \alpha^*}{Ma}\right) \left(N^2 \frac{S_2}{S_3}\right) \left[ \tau_y^* + \left(\frac{2N^2}{S_2}\right) \left(\frac{Ma}{\alpha^* \text{Re}_c}\right) Q^* \right] = 0 \quad (34)$$

#### 4.7 Solução pelo Método das Características

As equações da conservação da massa adimensional (25) e quantidade de movimento adimensional (26) formam um sistema de equações com a pressão e a vazão como variáveis dependentes do espaço e tempo adimensionais. A solução deste sistema é realizada através do método das características (WYLIE E STREETER, 1978).

A primeira etapa da solução é realizar uma combinação linear das equações (25) e (26) utilizando um multiplicador  $\psi$  como mostrado abaixo:

$$\frac{\alpha^*}{Ma} \frac{\partial P^*}{\partial z^*} + \frac{\partial Q^*}{\partial t^*} - \left( 8N^2 \frac{S_2}{S_3} \right) \left( \frac{\delta\alpha^*}{Ma} \right) \left[ \tau_y^* + \left( 2 \frac{N^2}{S_2} \right) \left( \frac{Ma}{\alpha^* Re_c} \right) Q^* \right] + \psi \left[ \frac{\partial P^*}{\partial t^*} + \frac{Ma}{\alpha^*} \frac{\partial Q^*}{\partial z^*} \right] = 0 \quad (35)$$

Rearranjando a equação (35), tem-se:

$$\psi \left[ \frac{\partial P^*}{\partial t^*} + \frac{\alpha^*}{\psi Ma} \frac{\partial P^*}{\partial z^*} \right] + \left[ \frac{\partial Q^*}{\partial t^*} + \frac{\psi Ma}{\alpha^*} \frac{\partial Q^*}{\partial z^*} \right] - 8N^2 \frac{S_2}{S_3} \frac{\delta\alpha^*}{Ma} \left[ \tau_y^* + 2 \frac{N^2}{S_2} \left( \frac{Ma}{\alpha^* Re_c} \right) Q^* \right] = 0 \quad (36)$$

Como dito anteriormente, tanto a pressão quanto a vazão adimensional dependem exclusivamente da posição adimensional  $z^*$  e do tempo adimensional  $t^*$ , ou seja,  $P^* = P^*(z^*, t^*)$  e  $Q^* = Q^*(z^*, t^*)$ . Desta forma pode-se dizer que:

$$\frac{dP^*}{dt^*} = \frac{\partial P^*}{\partial z^*} \frac{dz^*}{dt^*} + \frac{\partial P^*}{\partial t^*} \quad \text{e} \quad \frac{dQ^*}{dt^*} = \frac{\partial Q^*}{\partial z^*} \frac{dz^*}{dt^*} + \frac{\partial Q^*}{\partial t^*}$$

Avaliando a equação (36) a partir dos diferenciais totais apresentados acima nota-se que:

$$\frac{dz^*}{dt^*} = \frac{\alpha^*}{\psi Ma} = \frac{\psi Ma}{\alpha^*} \rightarrow \psi = \pm \frac{\alpha^*}{Ma} \quad (37)$$

Substituindo a expressão obtida para  $\psi$  na primeira parte da expressão da equação (37) percebe-se que  $dz^*/dt^* = \pm 1$ .

Reescrevendo a equação (36) em termos dos diferenciais totais tem-se a expressão abaixo:

$$\psi \frac{dP^*}{dt^*} + \frac{dQ^*}{dt^*} - \left( 8N^2 \frac{S_2}{S_3} \right) \left( \frac{\delta\alpha^*}{Ma} \right) \left[ \tau_y^* + \left( 2 \frac{N^2}{S_2} \right) \left( \frac{Ma}{\alpha^* Re_c} \right) Q^* \right] = 0 \quad (38)$$

A substituição do valor de  $\psi$  da equação (37) na equação (38) resulta, juntamente com os dois valores possíveis de  $dz^*/dt^*$ , em dois pares distintos de equações:

$$C^+ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha^*}{Ma} \frac{dP^*}{dt^*} + \frac{dQ^*}{dt^*} - \left( 8N^2 \frac{S_2}{S_3} \right) \left( \frac{\delta\alpha^*}{Ma} \right) \left[ \tau_y^* + \left( 2 \frac{N^2}{S_2} \right) \left( \frac{Ma}{\alpha^* Re_c} \right) Q^* \right] = 0 \\ \frac{dz^*}{dt^*} = 1 \end{array} \right. \quad (39)$$

$$C^- \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\alpha^*}{Ma} \frac{dP^*}{dt^*} + \frac{dQ^*}{dt^*} - \left( 8N^2 \frac{S_2}{S_3} \right) \left( \frac{\delta\alpha^*}{Ma} \right) \left[ \tau_y^* + \left( 2 \frac{N^2}{S_2} \right) \left( \frac{Ma}{\alpha^* Re_c} \right) Q^* \right] = 0 \\ \frac{dz^*}{dt^*} = -1 \end{array} \right. \quad (40)$$

As linhas  $C^+$  e  $C^-$  são referentes às duas linhas pelas quais serão integradas as equações (39) e (40) conforme a Figura 20.

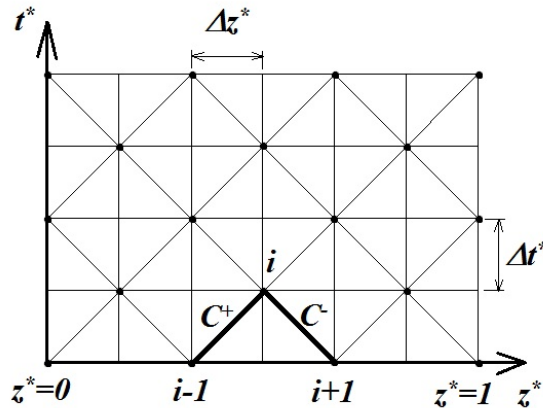


Figura 20 – Malha espacial e temporal utilizada para resolução do problema

A malha espacial utilizada na resolução do escoamento tem  $N$  células sendo  $N$  necessariamente par. O comprimento de cada célula é  $\Delta z^* = 1/N$ . De acordo com a condição  $dz^*/dt^* = 1$ , o valor de  $\Delta z^* = \Delta t^*$ .

Para obter expressões para pressão e vazão volumétrica adimensionais integram-se as equações da conservação da massa e quantidade de movimento em termos de diferenciais totais ao longo das linhas  $C^+$  e  $C^-$ . Realizando a integração na linha  $C^+$  obtém-se:

$$\frac{\alpha^*}{Ma} \int_{t^*}^{t^* + \Delta t^*} \frac{dP^*}{dt^*} dt^* + \int_{t^*}^{t^* + \Delta t^*} \frac{dQ^*}{dt^*} dt^* - \left( 8N^2 \frac{S_2}{S_3} \right) \left( \frac{\delta\alpha^*}{Ma} \right) \int_{t^*}^{t^* + \Delta t^*} \left[ \tau_y^* + \left( 2 \frac{N^2}{S_2} \right) \left( \frac{Ma}{\alpha^* Re_c} \right) Q^* \right] dt^* = 0 \quad (41)$$

$$\frac{\alpha^*}{Ma} \int_{P_{i-1}^*}^{P_i^*} dP^* + \int_{Q_{i-1}^*}^{Q_i^*} dQ^* - \left( 8N^2 \frac{S_2}{S_3} \right) \left( \frac{\delta \alpha^*}{Ma} \right)^{i^* + \Delta t^*} \left[ \tau_y^* + \left( 2 \frac{N^2}{S_2} \right) \left( \frac{Ma}{\alpha^* Re_c} \right) Q^* \right] dt^* = 0 \quad (42)$$

Considerando as propriedades médias no intervalo  $\Delta t^*$  e substituindo a equação (33) para a tensão na parede tem-se que:

$$\frac{\alpha^*}{Ma} (P_i^* - P_{i-1}^*) + (Q_i^* - Q_{i-1}^*) - \left( \frac{16N^4}{S_3} \right) \left( \frac{\delta}{Re_c} \right) Q_i^* - \left( 8N^2 \frac{S_2}{S_3} \right) \left( \frac{\delta \alpha^*}{Ma} \right) \tau_{y,i}^* = 0 \quad (43)$$

A partir deste ponto, com o objetivo de facilitar a notação das equações tem-se que  $A = \frac{\alpha^*}{Ma}$ ,  $B = \left( \frac{16N^4}{S_3} \right) \left( \frac{\delta}{Re_c} \right)$  e  $D = \left( 8N^2 \frac{S_2}{S_3} \right) \left( \frac{\delta \alpha^*}{Ma} \right)$ . Dessa forma a equação (43)

se torna:

$$A(P_i^* - P_{i-1}^*) + (Q_i^* - Q_{i-1}^*) - BQ_i^* - D\tau_{y,i}^* = 0 \quad (44)$$

Note que para o fluido newtoniano o termo isolado da equação  $D\tau_{y,i}^* = 0$ . A partir da equação (44) são obtidas expressões para a pressão e a vazão adimensional no ponto  $i$ , como mostrado nas equações (45) e (46), respectivamente.

$$P_i^* = P_{i-1}^* - \frac{Q_i}{A} + \frac{(1+B)}{A} Q_{i-1}^* + \frac{D}{A} \tau_{y,i-1}^* \quad (45)$$

$$Q_i^* = -A(P_i^* - P_{i-1}^*) + (1+B)Q_{i-1}^* + D\tau_{y,i-1}^* \quad (46)$$

Realizando o mesmo procedimento para a integração ao longo da linha  $C$  consegue-se obter outras expressões para a pressão e a vazão adimensional, como mostrado respectivamente nas equações (47) e (48):

$$P_i^* = P_{i+1}^* + \frac{Q_i}{A} + \frac{(B-1)}{A} Q_{i+1}^* + \frac{D}{A} \tau_{y,i+1}^* \quad (47)$$

$$Q_i^* = -A(P_{i+1}^* - P_i^*) + (1-B)Q_{i+1}^* - D\tau_{y,i+1}^* \quad (48)$$

As equações (45) e (46) podem ser utilizadas para determinar a pressão e vazão em um ponto adjacente ao ponto  $z^* = 0$  no qual a condição de contorno é conhecida. Já as equações (47) e (48) podem ser utilizadas para calcular pressão e vazão em um ponto adjacente ao ponto  $z^* = 1$  onde condições de contorno à direita são conhecidas.

Para obter expressões para calcular pressão e vazão nos pontos intermediários da malha é necessário resolver o sistema formado pelas equações (45) e (47). As expressões obtidas como resultado desta operação são as seguintes:

$$P_i^* = \frac{(P_{i-1}^* + P_{i+1}^*)}{2} + \frac{(Q_{i-1}^* - Q_{i+1}^*)}{2A} + \frac{B}{2A}(Q_{i+1}^* + Q_{i-1}^*) + \frac{D}{2A}(\tau_{y,i-1}^* + \tau_{y,i+1}^*) \quad (49)$$

$$Q_i^* = \frac{A(P_{i-1}^* - P_{i+1}^*)}{2} + \frac{(Q_{i-1}^* + Q_{i+1}^*)}{2} + \frac{B}{2}(Q_{i-1}^* - Q_{i+1}^*) + \frac{D}{2}(\tau_{y,i-1}^* - \tau_{y,i+1}^*) \quad (50)$$

Utilizando as expressões desenvolvidas acima pode-se calcular os campos de pressão e vazão em toda a malha conhecendo-se apenas as condições de contorno na entrada e saída da tubulação.

#### 4.8 Procedimento de cálculo

Para resolver as equações governantes do problema e encontrar os campos de pressão e vazão na tubulação um programa foi desenvolvido no *software Engineering Equation Solver 32*.

O programa em questão resolve o escoamento transiente de um fluido compressível pelo método das características conforme as equações deduzidas nas seções anteriores.

Em conjunto com a solução analítica também foi introduzido no programa a opção de solução analítica para o fluido newtoniano de acordo com as expressões deduzidas por Oliveira (2010).

O procedimento de cálculo para o fluido newtoniano é direto, não dependendo de processo iterativo dentro dos pontos da malha vista que as propriedades não variam com o tempo. Já para o fluido tixotrópico e de Bingham este processo iterativo se faz necessário.

Nos próximos capítulos uma análise detalhada da influência dos parâmetros da malha na resolução do problema e do critério de convergência do modelo será realizada.

Para facilitar o entendimento do procedimento de cálculo foi construído o fluxograma mostrado na Figura 21:

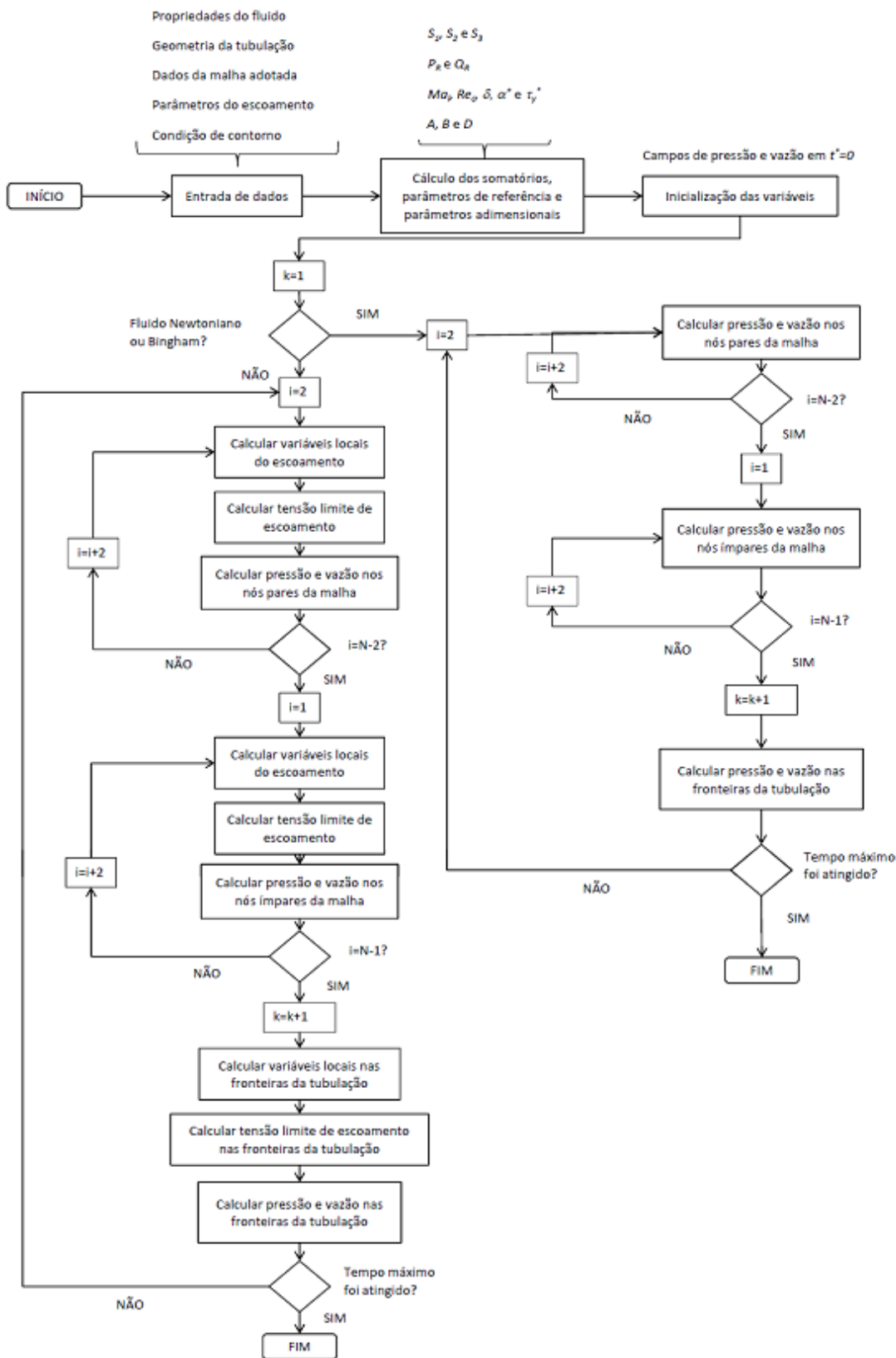


Figura 21 – Fluxograma do algoritmo de cálculo para solução do escoamento

#### 4.9 Síntese do Capítulo

No presente capítulo foi apresentada a modelagem matemática para o problema do escoamento transiente de um fluido compressível em uma tubulação. Foram apresentadas as equações básicas para solução do problema e as hipóteses para simplificação destas equações.

Depois de simplificadas as equações foram adimensionalizadas em função de parâmetros de referência do escoamento. Posteriormente foram apresentadas duas condições de contorno para o problema e os parâmetros de referência para as duas condições foram deduzidos.

Na sequência foi aplicado o método das características para transformar as equações em diferenciais totais e a integração foi feita por meio do método das diferenças finitas. Um algoritmo para solução do modelo ao longo do tempo também foi apresentado.

A Tabela 7 abaixo resume as equações governantes do problema e os parâmetros adimensionais envolvidos para solução do escoamento:

<b>Tabela 7 – Equações governantes e parâmetros adimensionais</b>	
<b>Equações governantes</b>	
$\frac{\partial P^*}{\partial t^*} + \frac{Ma}{\alpha^*} \frac{\partial Q^*}{\partial z^*} = 0$	
$\frac{\alpha^*}{Ma} \frac{\partial P^*}{\partial z^*} + \frac{\partial Q^*}{\partial t^*} - \left( 8N^2 \frac{S_2}{S_3} \right) \left( \frac{\delta \alpha^*}{Ma} \right) \left[ \tau_y^* + \left( 2 \frac{N^2}{S_2} \right) \left( \frac{Ma}{\alpha^* Re_c} \right) Q^* \right] = 0$	
$\frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} = \frac{\alpha^* Re_c}{2} (\tau_w^* r^* - \tau_y^*)$	
<b>Parâmetros adimensionais</b>	
$Ma = \frac{Q_R}{A_s c}$	
$\delta = \frac{L}{D}$	
$\alpha^* = P_R \alpha$	
$Re_c = \frac{\rho c D}{\eta}$	
$\tau_y^* = \frac{\tau_y}{P_R}$	

## 5 VERIFICAÇÃO DO MODELO E DA SENSIBILIDADE DA MALHA

O modelo apresentado no capítulo anterior é agora comparado com a solução analítica para o fluido newtoniano e duas condições de contorno (pressão constante e vazão constante na entrada da tubulação). A sensibilidade dos resultados em relação aos parâmetros numéricos da solução para o fluido tixotrópico é também apresentada. Por fim, é realizada uma análise da sensibilidade da solução em relação ao critério de convergência.

### 5.1 Comparação com a Solução Analítica

Nesta seção, é feita uma comparação do modelo proposto com a solução analítica conhecida para o escoamento transiente de um fluido newtoniano em um tubo de área de seção transversal constante. Este procedimento é realizado para as duas condições de contorno escolhidas (pressão e vazão constante na entrada).

#### 5.1.1 Escoamento com pressão constante na entrada da tubulação

Segundo Oliveira *et al.* (2010), para o escoamento com pressão constante na entrada da tubulação e pressão manométrica nula na saída da tubulação, a solução analítica para os campos de pressão e vazão em todo o domínio em função da posição axial e do tempo para um fluido newtoniano é dada pelas equações (51) e (52) respectivamente:

$$P^*(z^*, t^*) = (1 - z^*) - 2e^{\frac{-t^*}{2\lambda}} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\Omega_i} \sin \Omega_i z^* \left( \cos \omega_i t^* + \frac{1}{2\lambda \omega_i} \sin \omega_i t^* \right) \right] \quad (51)$$

$$Q^*(z^*, t^*) = \frac{2e^{\frac{-t^*}{2\lambda}}}{\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\omega_i} \cos \Omega_i z^* \sin \omega_i t^* \right) + \left( 1 - e^{\frac{-t^*}{\lambda}} \right) \quad (52)$$

onde  $\lambda = (Re \delta / 32 \alpha^*)$ ,  $\Omega_i = i\pi$ ,  $\omega_i = \Omega_i^2 - i/4\lambda^2$  e  $i$  é um número inteiro. Estas expressões são válidas para  $\lambda \geq 1/2\pi$ .

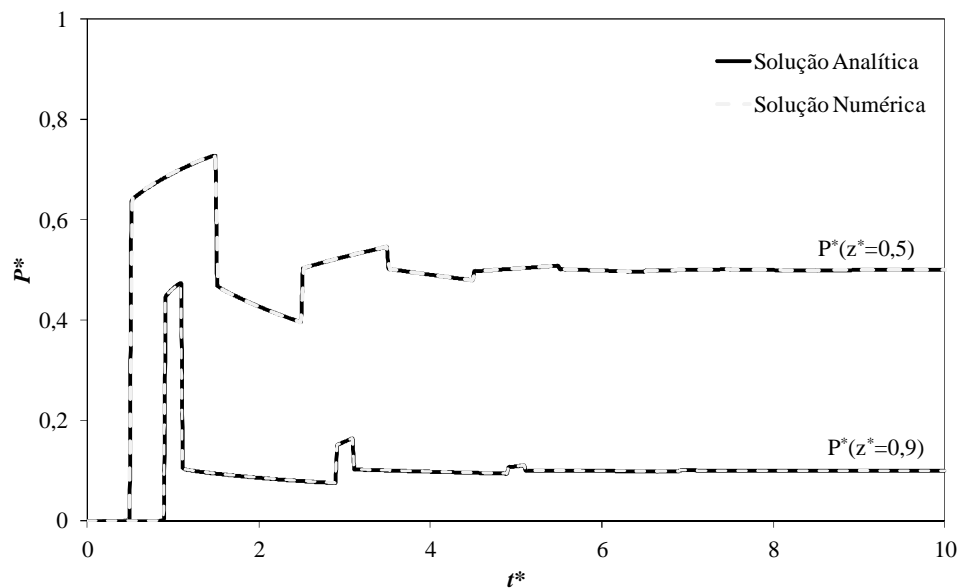


Para realizar a comparação da solução analítica para o fluido newtoniano com o modelo proposto, os parâmetros adimensionais adotados são os mostrados na Tabela 8 abaixo:

**Tabela 8 – Parâmetros adimensionais utilizados para comparação do modelo com a solução analítica**

$\lambda$	$Ma$	$\delta$	$\alpha^*$	$Re_c$	$\tau_y^*$
1,00	0,001	1000	0,001	32	0

Para o cálculo da solução analítica utilizaram-se somatórios de 1000 elementos e um passo de tempo igual ao da solução numérica com 100 divisões axiais. A malha utilizada para a solução numérica conta com 100 divisões nas direções axial e radial. Na Figura 22 abaixo, tem-se os resultados para a pressão adimensional em função de duas posições axiais diferentes na tubulação:  $z^*=0,5$  e  $z^*=0,9$ .

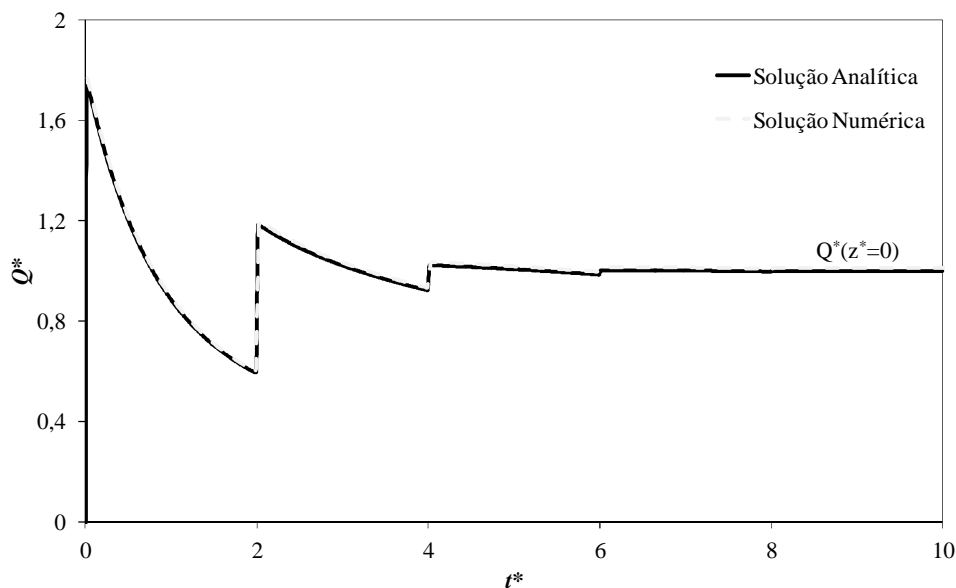


**Figura 22 - Comparação da pressão avaliada pelo método das características e pela solução analítica. Caso de pressão constante na entrada**

A análise da Figura 22 permite afirmar que o modelo proposto quando resolvido pelo método das características tem excelente concordância com a solução analítica. O erro percentual máximo encontrado entre as duas soluções para o pico de pressão é de 0,11%.

Note que a pressão na posição  $z^*=0,5$  não cresce imediatamente após a aplicação da pressão na entrada da tubulação. Isto ocorre devido à pressão se propagar com velocidade finita ao longo do tubo. Além disso, um pico de pressão ocorre com a chegada da onda de pressão em um determinado ponto. Esse pico evolui ao longo da tubulação e vai perdendo amplitude devido à dissipação viscosa. Em  $t^*=1,0$  o escoamento atinge a extremidade de saída, sofre uma reflexão e começa a se propagar no sentido contrário, reduzindo a amplitude do pico de pressão. Em  $t^*=2,0$  a propagação da onda chega novamente à entrada da tubulação e sofre nova reflexão. Esse processo continua até que o regime permanente seja atingido.

A Figura 23 mostra os resultados da solução do modelo pelo método das características comparada com a solução analítica para a vazão adimensional na entrada da tubulação.



**Figura 23 – Comparação da vazão na entrada da tubulação avaliada pelo método das características e pela solução analítica. Caso de pressão constante na entrada**

A Figura 23 mostra que com a aplicação do gradiente de pressão há um pico de vazão na entrada de amplitude aproximadamente 80% maior que o valor de regime permanente. O efeito de dissipação viscosa e de reflexão que ocorre para a propagação da pressão também ocorre para a vazão. Novamente, percebe-se grande concordância entre o modelo proposto quando resolvido através do método

das características e a solução analítica. O erro percentual para o valor da vazão de regime permanente na entrada da tubulação é 1,35%.

### 5.1.2 escoamento com vazão constante na entrada da tubulação

Segundo Oliveira *et al.* (2010), as expressões que descrevem o escoamento transitório com vazão constante na entrada da tubulação são as equações (53) e (54) respectivamente:

$$P^*(z^*, t^*) = 1 - z^* + 2\lambda e^{\frac{-t^*}{2\lambda}} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\Omega_i^2} \cos \Omega_i z^* \left[ \left( \omega_i - \frac{1}{4\lambda^2 \omega_i} \right) \sin \omega_i t^* - \frac{1}{\lambda} \cos \omega_i t^* \right] \right\} \quad (53)$$

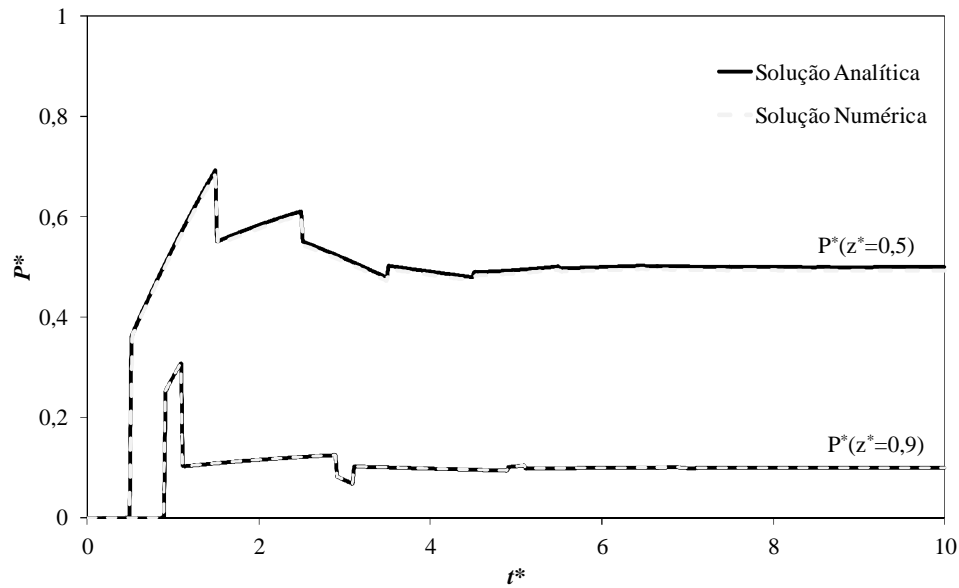
$$Q^*(z^*, t^*) = 1 - 2e^{\frac{-t^*}{2\lambda}} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\Omega_i} \sin \Omega_i z^* \left( \cos \omega_i t^* + \frac{1}{2\lambda \omega_i} \sin \omega_i t^* \right) \right] \quad (54)$$

Estas expressões são válidas para  $\lambda \geq 1/\pi$ .

Os parâmetros adimensionais utilizados nesta comparação são os mesmos do escoamento com pressão constante na entrada, mostrados na Tabela 8. A malha adotada para a solução numérica é a mesma adotada para o caso de pressão constante na entrada da tubulação.

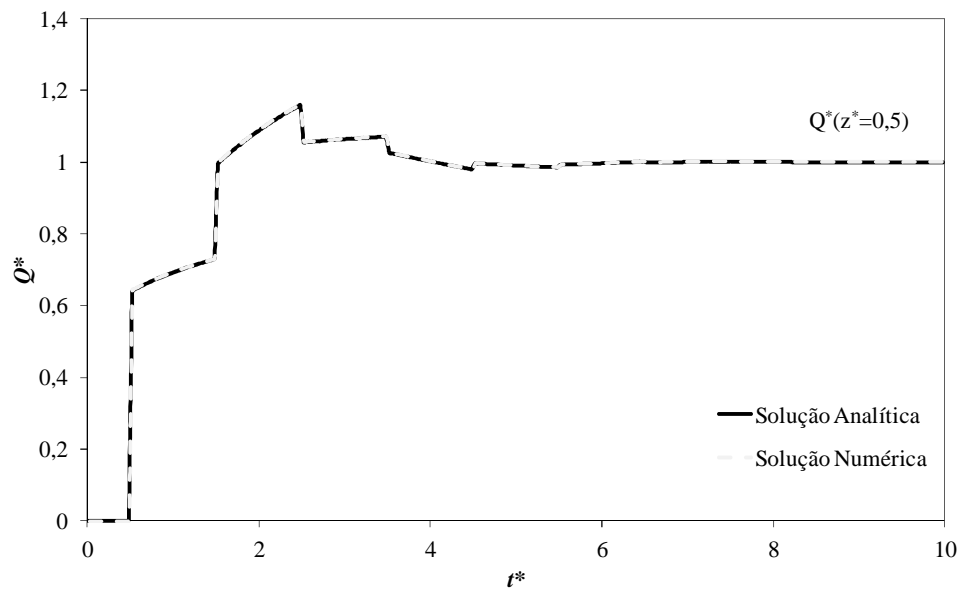
Os resultados da comparação entre a solução analítica e o modelo proposto para o caso de vazão constante na entrada da tubulação são mostrados abaixo. A Figura 24 mostra a comparação dos perfis de vazão ao longo do tempo em duas diferentes posições axiais da tubulação:  $z^* = 0,5$  e  $z^* = 0,9$ .

O mesmo efeito oscilatório da onda de pressão explicado para o caso de pressão constante na entrada também acontece neste caso. A concordância percebida entre os dois modelos para o caso de pressão constante na entrada também é percebida para o caso de vazão constante na entrada. O maior erro percentual obtido para o pico de pressão é 1,11%. Já quanto à pressão de regime permanente o maior erro percentual percebido foi de 1,32%.



**Figura 24 - Comparação da pressão avaliada pelo método das características e pela solução analítica. Caso de vazão constante na entrada**

A evolução temporal da vazão na metade da tubulação ( $z^*=0,5$ ) é mostrada na Figura 25. Percebe-se que os mesmos efeitos e a mesma concordância entre os dois modelos encontrados para o caso de pressão constante na entrada também são observados. O maior erro percentual percebido para a vazão de regime permanente foi de 0,17%.



**Figura 25 - Comparação da vazão na metade da tubulação avaliada pelo método das características e pela solução analítica. Caso de vazão constante na entrada**

## 5.2 Análise do Critério de Convergência - Fluido Tixotrópico

Para a solução do escoamento transiente para o fluido newtoniano não é necessário realizar o processo iterativo em cada ponto da malha, visto que as propriedades do fluido não variam com a taxa de deformação e/ou deformação. Já quando se resolve o escoamento para o fluido de Bingham, ou fluido tixotrópico, existe variação das propriedades em cada ponto da malha ao longo do tempo e, por esta razão, é necessário realizar um processo iterativo em cada ponto da malha. Nesta seção será avaliado o efeito do critério de convergência na solução do problema do fluido tixotrópico.

O critério de parada do processo iterativo em cada ponto da malha definido como a diferença entre a vazão na iteração atual e na iteração anterior.

$$\text{Res} = |Q_{i+1}^* - Q_i^*| \quad (55)$$

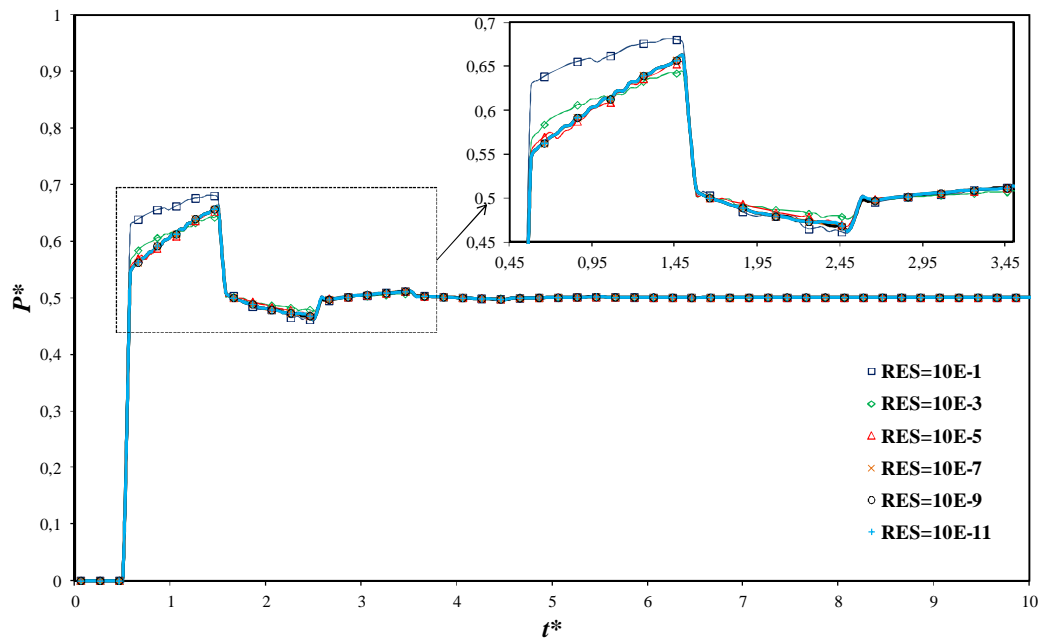
Para definir o valor de resíduo satisfatório que proporcione um resultado confiável sem despendar um elevado tempo computacional, fez-se uma avaliação dos resultados com diferentes critérios de parada para o fluido tixotrópico. Os parâmetros utilizados na solução do escoamento para realizar esta avaliação são mostrados na Tabela 9 abaixo:

**Tabela 9 – Parâmetros adimensionais utilizados para análise do critério de convergência**

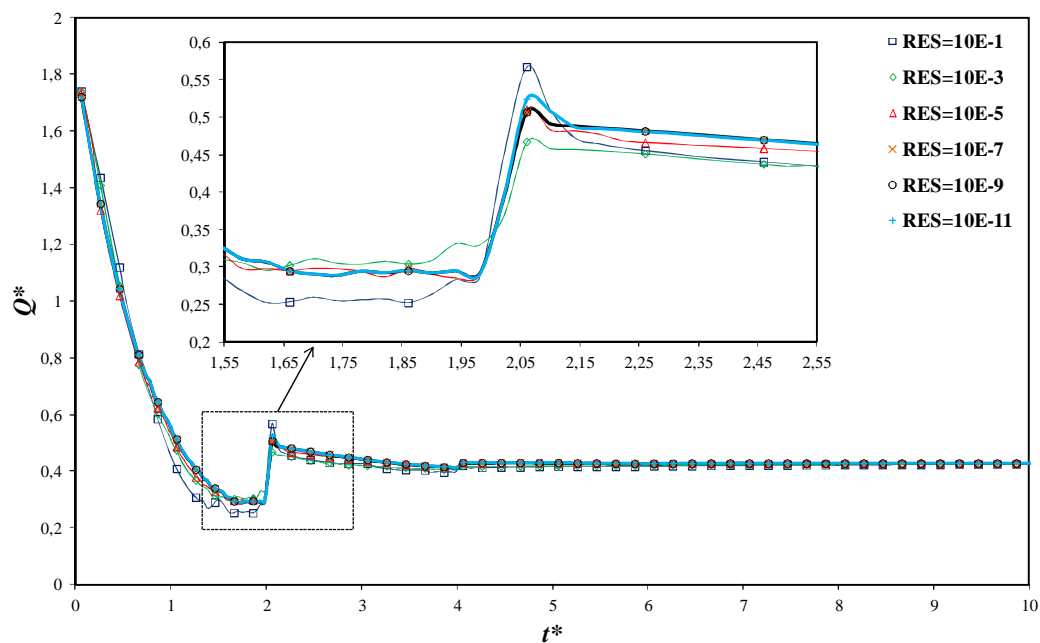
$\lambda$	$Ma$	$\delta$	$\alpha^*$	$Re_c$	$Bi_\infty$
1,00	0,001	1000	0,001	32	0,5

O parâmetro  $Bi_\infty$ , mostrado na Tabela 9 é o número de Bingham calculado com base na tensão limite de escoamento de regime permanente para o fluido tixotrópico.

O procedimento de avaliação foi selecionar uma malha padrão e então resolver o problema com pressão constante na entrada da tubulação com diferentes valores de critério de parada para o processo iterativo. A malha utilizada é uma malha com 100 divisões tanto na direção axial quanto na direção radial. A Figura 26 abaixo mostra o perfil de pressão obtido para a metade da tubulação ( $z^* = 0,5$ ) com diferentes critérios de parada para o resíduo do processo iterativo.



Já a Figura 27 abaixo mostra a evolução da vazão na entrada da tubulação com diferentes critérios de parada para o resíduo do processo iterativo.



A análise da Figura 26 e da Figura 27 permite afirmar que tanto para o perfil de pressão quanto de vazão, o resultado para resíduos maiores que  $10^{-7}$  apresenta muita instabilidade. A explicação para esta instabilidade é o baixo número de iterações necessário para atingir estes valores de resíduo maiores.

Já para resíduos numéricos menores que  $10^{-7}$ , os perfis de pressão e vazão em função do tempo ficam estáveis, contudo, o tempo computacional aumenta muito. Já para o valor do pico de pressão percebe-se que, a partir da curva com resíduo igual a  $10^{-7}$ , os valores de pico de pressão não se alteram mais.

Portanto, devido às instabilidades dos perfis, percebe-se que o resíduo deve ser pelo menos  $10^{-7}$ . Para decidir qual será o critério de convergência adotado, será avaliada a relação custo benefício entre o erro de pico de pressão em relação ao resíduo mais refinado ( $RES=10^{-11}$ ) e o tempo computacional gasto. A Tabela 10 mostra a compilação dos dados para esta análise.

**Tabela 10 – Erro percentual e tempo de simulação para os diferentes critérios de convergência**

<b>Resíduo aplicado</b>	<b>Erro % (Pico de pressão)</b>	<b>Tempo de simulação (s)</b>
$10^{-1}$	3,01%	30
$10^{-3}$	2,74%	33
$10^{-5}$	1,15%	60
$10^{-7}$	0,00%	298
$10^{-9}$	0,00%	506
$10^{-11}$	-	718

Percebe-se, a partir da análise da Tabela 10, que o erro percentual da curva com o resíduo  $10^{-7}$  quando comparado à curva de resíduo  $10^{-11}$  já é 0,00%. Portanto, este critério de convergência já seria suficiente para descrever o valor do pico de pressão. Contudo, ao observar os perfis de pressão e vazão em função do tempo para o resíduo igual a  $10^{-7}$  percebe-se que ainda há pequenas oscilações. Portanto, para garantir um resultado estável e confiável para as avaliações posteriores, o critério de convergência adotado para o presente trabalho será  $10^{-9}$ .

O tempo computacional de 506s (aproximadamente 8,5 min) é considerado aceitável para a quantidade de simulações que se deseja realizar. O *hardware* utilizado é um processador Intel Core i3 M380 @ 2,53GHz 4GB.

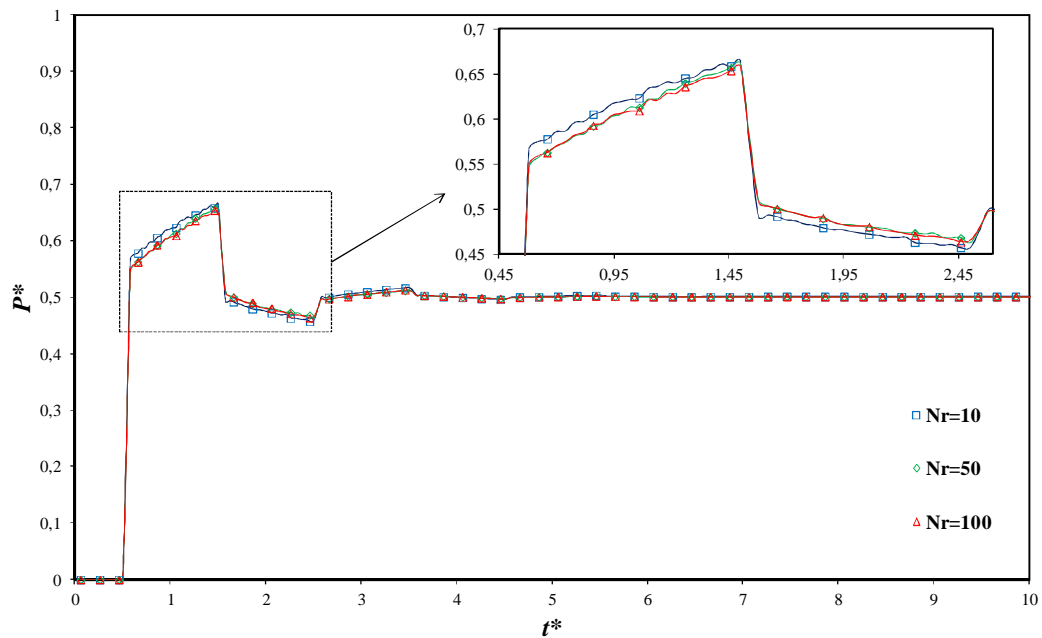
### **5.3 Análise da Sensibilidade da Malha – Fluido Tixotrópico**

A malha utilizada na solução do problema é bidimensional e uniforme com divisões na direção axial e radial. Para realização da análise da sensibilidade da malha foram avaliados os perfis de pressão e vazão ao longo do tempo para os dois casos de condição de contorno: pressão e vazão constante na entrada da tubulação. Os parâmetros adotados para o escoamento são os mesmos da análise do critério de convergência mostrados na Tabela 9. Em todas estas soluções a malha em uma das direções será mantida com um valor fixo de 100 divisões e a outra será testada em diferentes valores (10, 50 e 100 divisões). O critério de convergência como definido na seção anterior será  $10^{-9}$ .

#### **5.3.1 Análise da sensibilidade da malha na direção radial**

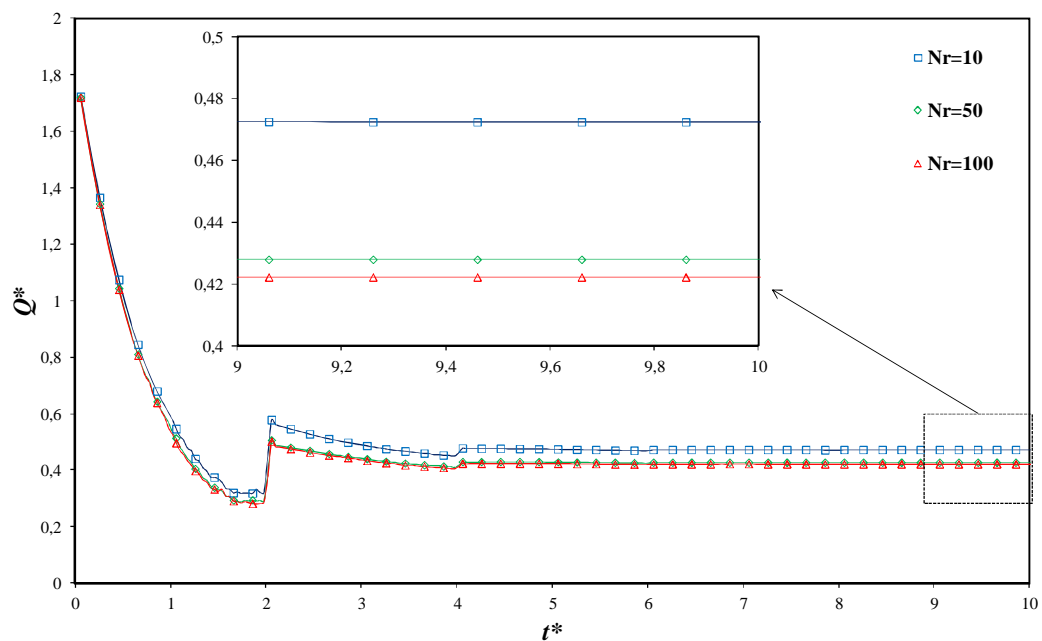
A análise de sensibilidade de malha na direção radial foi realizada para os dois casos de condição de contorno. Para a condição de contorno pressão constante na entrada da tubulação os perfis avaliados serão os de pressão na metade da tubulação e vazão na entrada. Ambos os gráficos serão mostrados para todas as variações de malha que foram testadas. A Figura 28 mostra o perfil de pressão na metade da tubulação para diferentes malhas na direção radial.





**Figura 28 – Perfil de pressão na metade da tubulação para diferentes malhas na direção radial – Caso de pressão constante na entrada**

Já a Figura 29 mostra o perfil de vazão na entrada da tubulação para diferentes malhas na direção radial.



**Figura 29 - Perfil de vazão na entrada da tubulação para diferentes malhas na direção radial – Caso de pressão constante na entrada**

A análise da Figura 28 e da Figura 29 permite dizer que a forma das curvas de pressão e de vazão não é alterada com o refino da malha. Contudo, os valores de pico das curvas e também de regime permanente são alterados com o refino da malha. A Tabela 11 abaixo mostra os erros percentuais para pico de pressão e vazão de regime permanente quando comparados aos valores da curva com malha mais refinada e os tempos computacionais de simulação.

**Tabela 11 – Erros percentuais e tempos de simulação para análise da sensibilidade da malha na direção radial – Caso de Pressão constante na entrada**

<b>Divisões na direção radial (Nr)</b>	<b>Erro % (Pico de pressão)</b>	<b>Erro % (Vazão de RP)</b>	<b>Tempo de simulação (s)</b>
10	1,14%	11,89%	64
50	0,56%	1,35%	256
100	-	-	450

A mesma avaliação realizada para o caso de pressão constante na entrada da tubulação foi realizada para o caso de vazão constante. Percebeu-se que os efeitos de refino de malha são muito próximos nos dois casos. A Tabela 12 mostra os erros percentuais e os tempos computacionais para o caso de vazão constante na entrada da tubulação.

**Tabela 12 - Erros percentuais e tempos de simulação para análise da sensibilidade da malha na direção radial – Caso de Vazão constante na entrada**

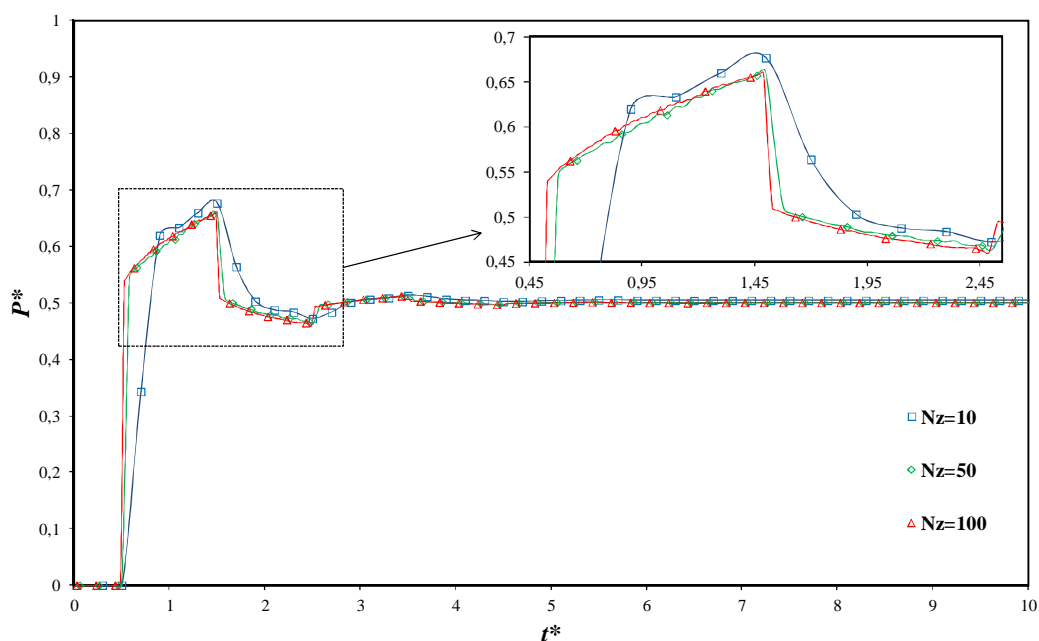
<b>Divisões na direção radial (Nr)</b>	<b>Erro % (Pico de vazão)</b>	<b>Erro % (Pressão de RP)</b>	<b>Tempo de simulação (s)</b>
10	1,98%	5,57%	86
50	0,00%	0,69%	300
100	-	-	570

A análise da Tabela 11 e da Tabela 12 permite afirmar que, além das curvas apresentarem o mesmo formato, os erros para os perfis de pressão e vazão com 50 divisões radiais quando comparados aos perfis de 100 divisões radiais são sempre menores que 0,7%. Além disso, o tempo computacional da solução com 100 divisões radiais é aproximadamente duas vezes maior do que o de 50 divisões. Por

estes fatos a malha radial adotada para as análises posteriores será a de 50 divisões.

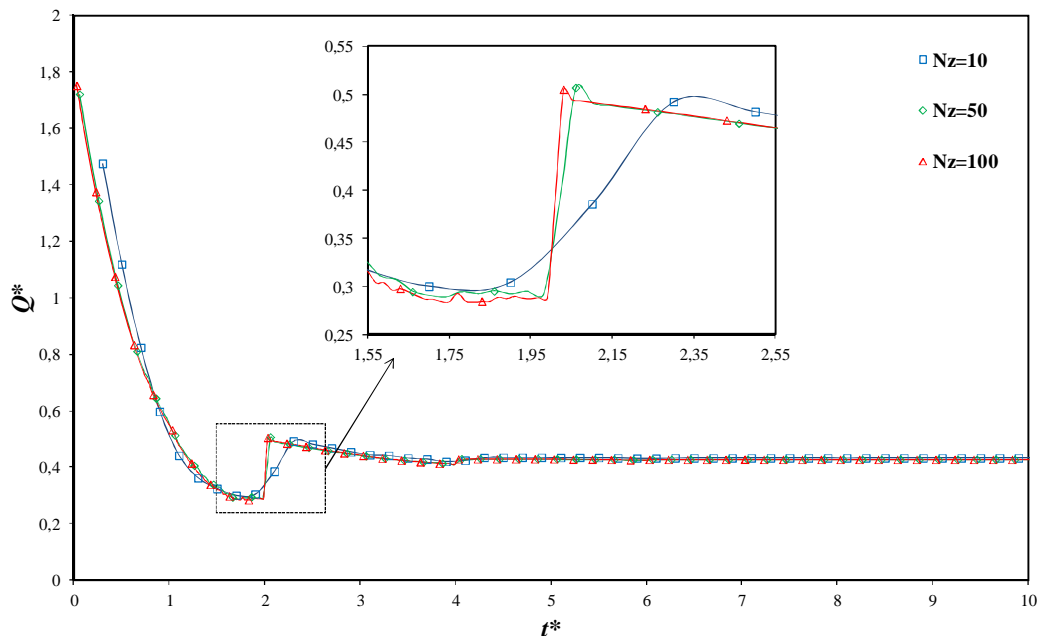
### 5.3.2 Análise da sensibilidade da malha na direção axial

A análise de sensibilidade de malha na direção axial foi realizada para os dois casos de condição de contorno. Para a condição de contorno de pressão constante na entrada da tubulação, os perfis avaliados serão os de pressão na metade da tubulação e vazão na entrada. Ambos os gráficos serão mostrados para todas as variações de malha que foram testadas. A Figura 30 abaixo mostra o perfil de pressão na metade da tubulação para diferentes malhas na direção axial.



**Figura 30 - Perfil de pressão na metade da tubulação para diferentes malhas na direção axial – Caso de pressão constante na entrada**

Já a Figura 31 mostra o perfil de vazão na entrada da tubulação para diferentes malhas na direção axial.



**Figura 31 - Perfil de vazão na entrada da tubulação para diferentes malhas na direção axial – Caso de pressão constante na entrada**

A análise da Figura 30 e Figura 31 permite afirmar que a forma das curvas de pressão e de vazão apresenta maior estabilidade quanto maior é o refino da malha. A Tabela 13 abaixo mostra os erros percentuais para pico de pressão e vazão de regime permanente quando comparados aos valores da curva com malha mais refinada e os tempos computacionais de simulação.

**Tabela 13 – Erros percentuais e tempos de simulação para análise da sensibilidade da malha na direção axial – Caso de Pressão constante na entrada**

<b>Divisões na direção axial (Nz)</b>	<b>Erro % (Pico de pressão)</b>	<b>Erro % (Vazão de RP)</b>	<b>Tempo de simulação (s)</b>
10	2,50%	0,74%	12
50	0,21%	0,08%	506
100	-	-	837

A avaliação do refino da malha na direção axial também foi realizada para o caso de vazão constante na entrada da tubulação. Os efeitos percebidos com o refino da malha são os mesmos citados para o caso de pressão constante na entrada da tubulação. A Tabela 14 mostra os erros percentuais e os tempos computacionais para o caso de vazão constante na entrada da tubulação.

**Tabela 14 - Erros percentuais e tempos de simulação para análise da sensibilidade da malha na direção axial – Caso de Vazão constante na entrada**

<b>Divisões na direção axial (Nz)</b>	<b>Erro % (Pico de vazão)</b>	<b>Erro % (Pressão de RP)</b>	<b>Tempo de simulação (s)</b>
10	1,42%	0,00%	17
50	0,19%	0,00%	570
100	-	-	852

A análise da Tabela 13 e da Tabela 14 permite afirmar além das curvas apresentarem o mesmo formato, os erros para os perfis de pressão e vazão com 50 divisões axiais quando comparados aos perfis de 100 divisões axiais são sempre menores que 1,3%. Além disso, o tempo computacional da solução com 100 divisões axiais é aproximadamente três vezes maior do que o de 50 divisões. Por estes fatos a malha axial adotada para as análises posteriores será a de 50 divisões axiais.

#### **5.4 Síntese do Capítulo**

Neste capítulo o modelo elaborado no capítulo anterior para o escoamento transiente foi resolvido e comparado com a solução analítica do escoamento transiente para o fluido newtoniano. O resultado obtido demonstra que o modelo proposto se aproxima muito da solução analítica.

Depois de comparar o modelo com a solução analítica, realizou-se o teste da sensibilidade da malha. O fluido tixotrópico foi comparado com a malha mais refinada. O parâmetro que foi adotado para critério de convergência foi o resíduo do processo iterativo definido como a diferença da vazão atual e a do instante anterior. A partir da análise dos resultados obtidos com diferentes valores de resíduo concluiu-se que o resíduo ótimo para solução do problema é  $10^{-9}$ . Contudo, a utilização de um resíduo de  $10^{-7}$  acelera a solução em até 2 vezes sem acarretar erros no valor do pico de pressão.

Depois da análise do critério de convergência fez-se a análise da sensibilidade da malha. Foram avaliadas as variações na malha das direções axial e radial. As variações adotadas foram testadas para os dois casos de condição de contorno

(pressão e vazão constante na entrada). A análise dos resultados demonstrou que uma malha de 50 divisões axiais e 50 divisões radiais é suficiente para obter um resultado confiável e estável.

A partir da análise dos resultados de todos os testes de análise do critério de convergência e sensibilidade da malha realizados elaborou-se a Tabela 15 abaixo, na qual se resumem os efeitos que o refino de qualquer um destes parâmetros pode exercer sobre os perfis de pressão e vazão para os dois casos de condição de contorno.

**Tabela 15 – Resumo das influências dos parâmetros da malha no resultado do escoamento**

	<b>Pico de pressão/vazão</b>	<b>Propriedades de regime permanente</b>	<b>Forma do perfil de pressão/vazão</b>
<b>Refino na direção radial</b>	Melhora os valores tanto para pressão quanto para vazão	Melhora os valores para vazão e não influencia vazão	Não altera
<b>Refino na direção axial</b>	Melhora os valores tanto para pressão quanto para vazão	Influencia pouco os valores de regime permanente	Melhora a forma dos perfis de pressão e vazão
<b>Refino do resíduo do processo iterativo</b>	Melhora os valores tanto para pressão quanto para vazão	Melhora apenas os valores de vazão para o fluido tixotrópico	Melhora a forma do perfil de pressão/vazão do fluido tixotrópico

Os dados contidos na Tabela 15 podem auxiliar trabalhos futuros nos quais se deseje refinar algum aspecto da malha para obter um resultado mais preciso. No próximo capítulo, com os parâmetros de malha e critério de convergência definidos neste capítulo será realizada uma avaliação do impacto dos parâmetros do fluido tixotrópico nos resultados do escoamento.

## 6 RESULTADOS

Neste capítulo serão mostrados os resultados das simulações do escoamento transiente para o fluido tixotrópico. O caso selecionado para comparação dos resultados é o caso de pressão constante na entrada da tubulação.

O primeiro resultado mostrado é a comparação entre os resultados do escoamento para o fluido newtoniano, fluido de Bingham e fluido tixotrópico em uma mesma seção axial da tubulação.

A segunda comparação realizada é a evolução da pressão em diferentes posições axiais da tubulação para o fluido tixotrópico com os mesmos parâmetros de escoamento.

Por fim, será mostrada a comparação dos resultados variando os parâmetros de ajuste do perfil de tensão limite de escoamento por deformação para o fluido tixotrópico. Quatro diferentes parâmetros serão variados e seus respectivos resultados em perfil de pressão por tempo serão analisados.

### 6.1 Comparação entre a solução para os três fluidos analisados

Para comparar a solução obtida para os três tipos de fluidos avaliados, selecionou-se o caso de pressão constante na entrada da tubulação e avaliou-se a pressão adimensional na metade da tubulação, ou seja,  $z^*=0,5$ , e a vazão adimensional na entrada da tubulação. As propriedades do escoamento são as mostradas na Tabela 16 abaixo.

**Tabela 16 – Parâmetros do escoamento para o fluido newtoniano**

$\lambda$	$Ma$	$\delta$	$\alpha^*$	$Re_c$
1,00	0,001	1000	0,001	32

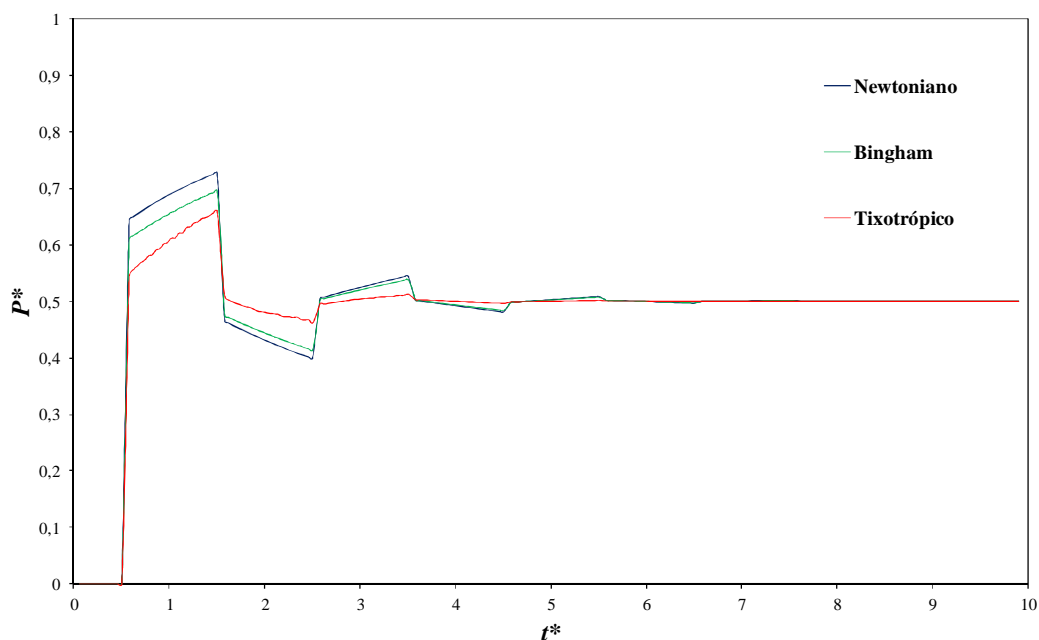
Já para o fluido de Bingham têm-se adicionalmente às propriedades da Tabela 16 uma tensão limite de escoamento aplicada que corresponde a um número de Bingham  $Bi=0,5$ . Para o fluido tixotrópico o número de Bingham  $Bi=0,5$  é avaliado em

regime permanente. As demais propriedades do perfil de tensão limite de escoamento por deformação são os mostrados na Tabela 17 abaixo.

**Tabela 17 – Parâmetros do escoamento para o fluido tixotrópico**

$Bi_\infty$	$Bi_c$	$\gamma_c$	$A$	$B$
0,5	0,6	0,5	8,81	2,09

O valor  $Bi_c$  na Tabela 17 é avaliado utilizando a tensão de pico do fluido tixotrópico. A Figura 32 mostra os resultados para a pressão adimensional na metade da tubulação.



**Figura 32 – Comparação da solução para a pressão adimensional na metade da tubulação para os três fluidos analisados com pressão constante na entrada da tubulação**

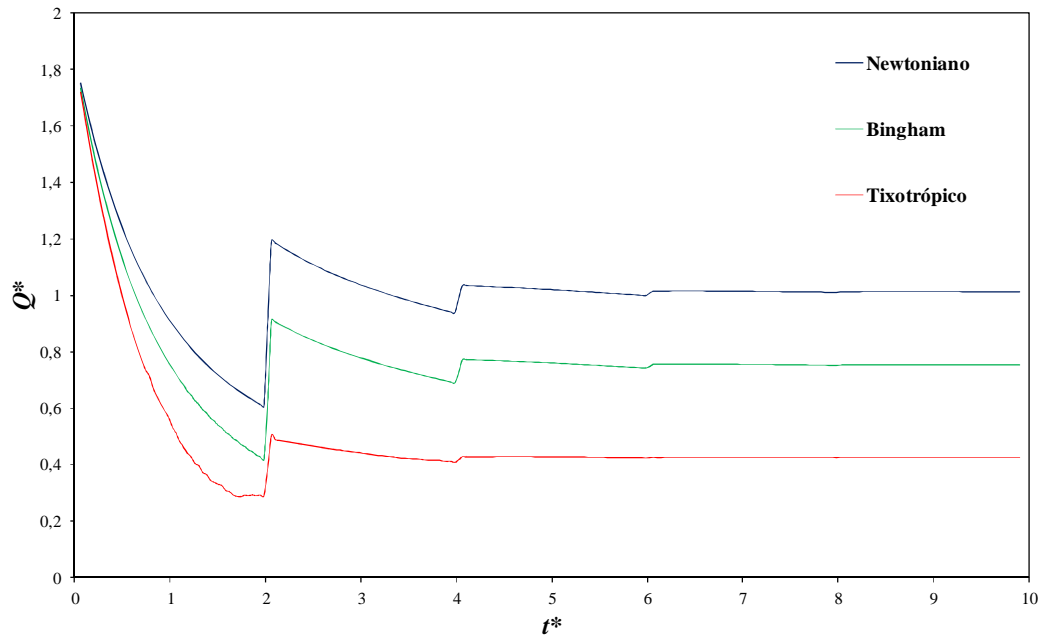
A análise da Figura 32 permite dizer que a influência da tensão limite de escoamento está na redução do pico de pressão adimensional. Isto ocorre porque a resistência ao escoamento é aumentada neste caso. Contudo, a alteração no tipo de fluido não altera o perfil de pressão de regime permanente.

Quando se compara o fluido de Bingham e o fluido tixotrópico percebe-se que a variação na tensão limite de escoamento aumenta ainda mais a resistência ao escoamento e reduz o pico de pressão adimensional. Além disso, a inclinação do



perfil do primeiro pico de pressão, que ocorre entre  $t^* = 0,5$  e  $t^* = 1,5$ , aumenta devido à variação da tensão limite de escoamento.

Já a Figura 33 mostra a comparação dos resultados para a vazão adimensional na entrada da tubulação.



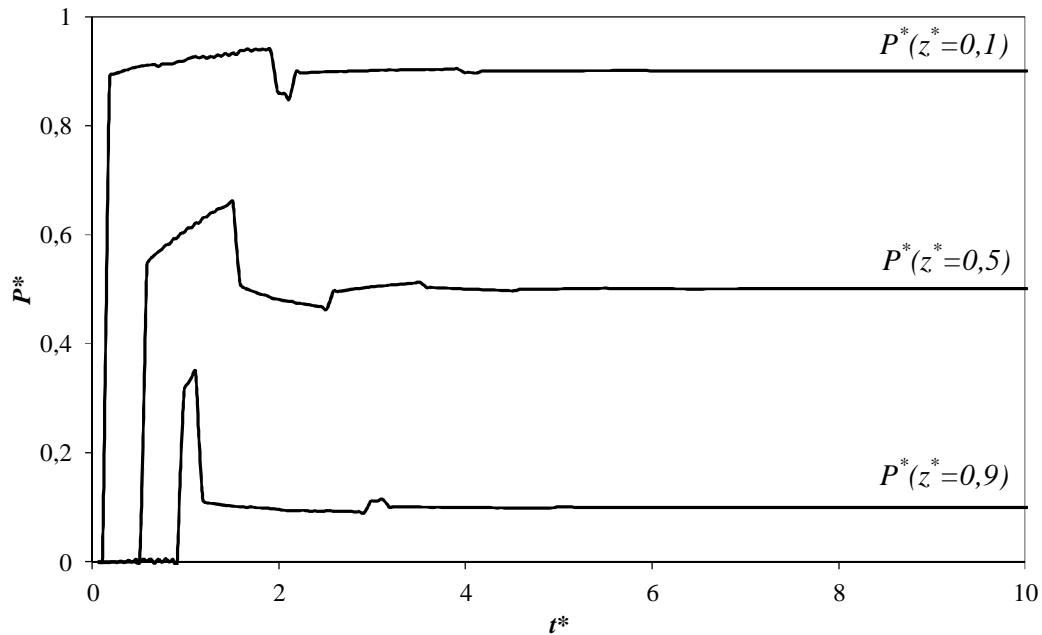
**Figura 33 - Comparação da solução para a pressão adimensional na metade da tubulação para os três fluidos analisados com pressão constante na entrada da tubulação**

A análise da Figura 33 permite afirmar que, para os fluidos de Bingham e tixotrópico, tem-se um amortecimento na vazão adimensional na entrada do tubo quando comparada com o perfil para o fluido newtoniano. Os picos de vazão também são reduzidos neste caso, bem como o valor de vazão de regime permanente.

## 6.2 Comparação em diferentes pontos da tubulação para o fluido tixotrópico

O segundo estudo no presente trabalho é a comparação da evolução da pressão ao longo do tempo em diferentes pontos da tubulação para o fluido tixotrópico. O objetivo deste estudo é mostrar como ocorre a evolução do escoamento na tubulação para o fluido tixotrópico. Os pontos da tubulação

analisados são os seguintes:  $z^* = 0,1$ ;  $z^* = 0,5$ ;  $z^* = 0,9$ . A Figura 34 mostra a evolução da pressão ao longo do tempo para as três posições axiais.



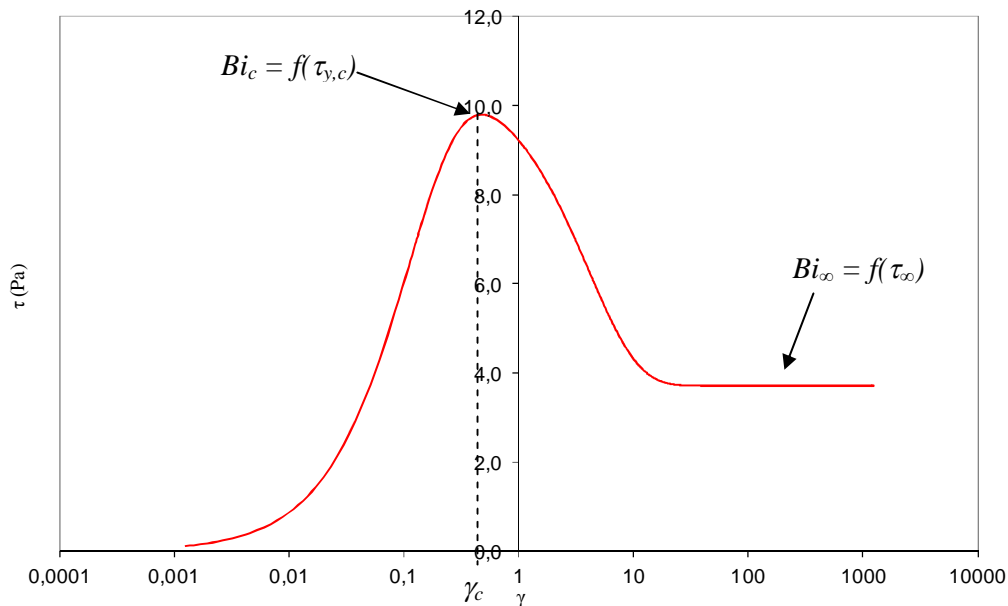
**Figura 34 – Comparação das soluções para o fluido tixotrópico em três diferentes posições da tubulação ( $z^*=0,1$ ;  $z^*=0,5$ ;  $z^*=0,9$ )**

Percebe-se na Figura 34 que o escoamento se inicia imediatamente na entrada da tubulação e demora um certo tempo para iniciar no restante da tubulação. Quando a onda de pressão chega a uma determinada posição axial tem-se um pico que continua a crescer. Isto ocorre até que a onda seja refletida na saída da tubulação e volte até a posição analisada.

Percebe-se também que, quanto mais perto da entrada, maior é o valor da pressão de regime permanente. Isto ocorre porque o perfil de pressão de regime permanente é linear, variando de um na entrada até zero na saída. Percebe-se também que a diferença entre o pico de pressão e a pressão de regime permanente é maior quanto mais distante da entrada da tubulação.

### 6.3 Avaliação dos parâmetros do ajuste para o fluido tixotrópico nos perfis de pressão e vazão ao longo do tempo

A última parte da análise dos resultados para o escoamento transiente do fluido tixotrópico é a avaliação da variação nos parâmetros de ajuste da curva de tensão limite de escoamento por deformação no resultado do escoamento. A Figura 35 abaixo mostra o resultado do ajuste do comportamento tixotrópico e os principais parâmetros de ajuste que são abordados na sequência.



**Figura 35 – Pontos notáveis da curva de tensão limite de escoamento por deformação para o fluido tixotrópico**

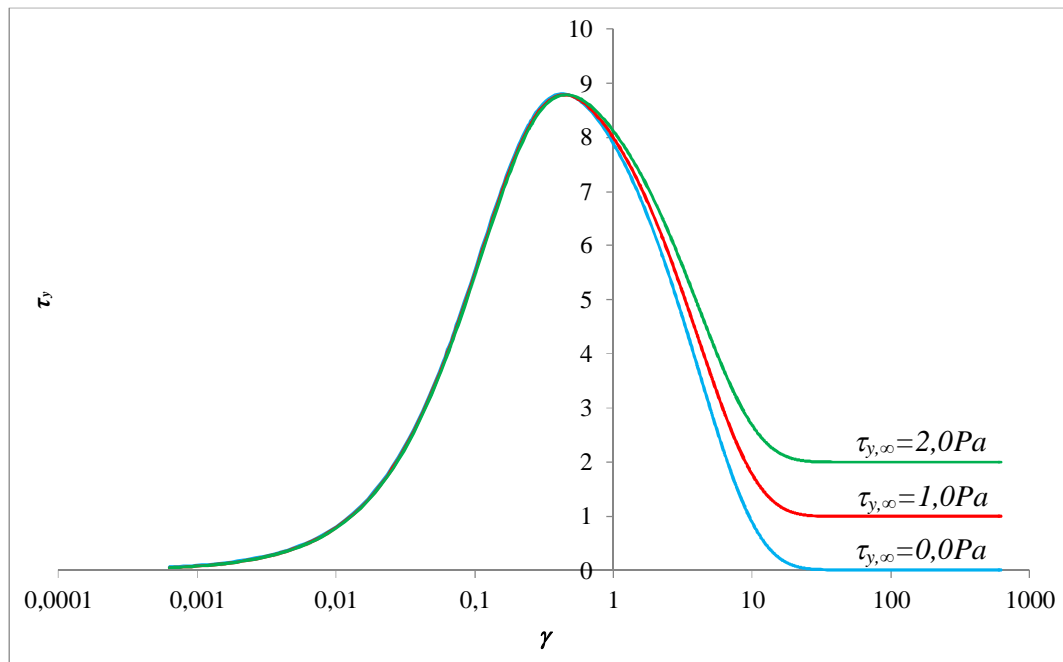
Os parâmetros avaliados para o ajuste do comportamento tixotrópico são os destacados na curva da Figura 35:  $Bi_\infty$  e  $Bi_c$ . Além destes pontos também é avaliada a influência dos dois parâmetros de ajuste que dão forma a curva da Figura 35:  $a$  e  $b$ . Como dito anteriormente, o caso de condição de contorno selecionado para estas avaliações é o de pressão constante na entrada da tubulação.

#### 6.3.1 Avaliação da influência de $Bi_\infty$ no escoamento transiente do fluido tixotrópico

O número de Bingham avaliado no regime permanente para os mesmos parâmetros de escoamento é definido pelo valor da tensão limite de escoamento de regime permanente do fluido tixotrópico e é definido pela expressão (56):

$$Bi_{\infty} = \frac{4\tau_{\infty}L}{D\Delta P} \quad (56)$$

A Figura 36 mostra diferentes curvas de tensão limite de escoamento por deformação para fluidos tixotrópicos com diferentes valores de tensão limite de escoamento de regime permanente.



**Figura 36 – Ajustes do comportamento tixotrópico para diferentes tensões limites de escoamento de regime permanente**

O aumento do valor de  $Bi_{\infty}$  representa um aumento no valor da tensão de regime permanente. Este aumento da tensão de regime permanente representa um aumento na resistência ao escoamento em regime permanente. Portanto, o efeito esperado para o aumento de  $Bi_{\infty}$  no perfil de pressão e vazão ao longo do tempo é a redução do pico de pressão e da vazão de regime permanente.

A influência da variação de  $Bi_{\infty}$  no resultado da pressão ao longo do tempo na metade da tubulação do escoamento transiente para o fluido tixotrópico é mostrada na Figura 37 abaixo.

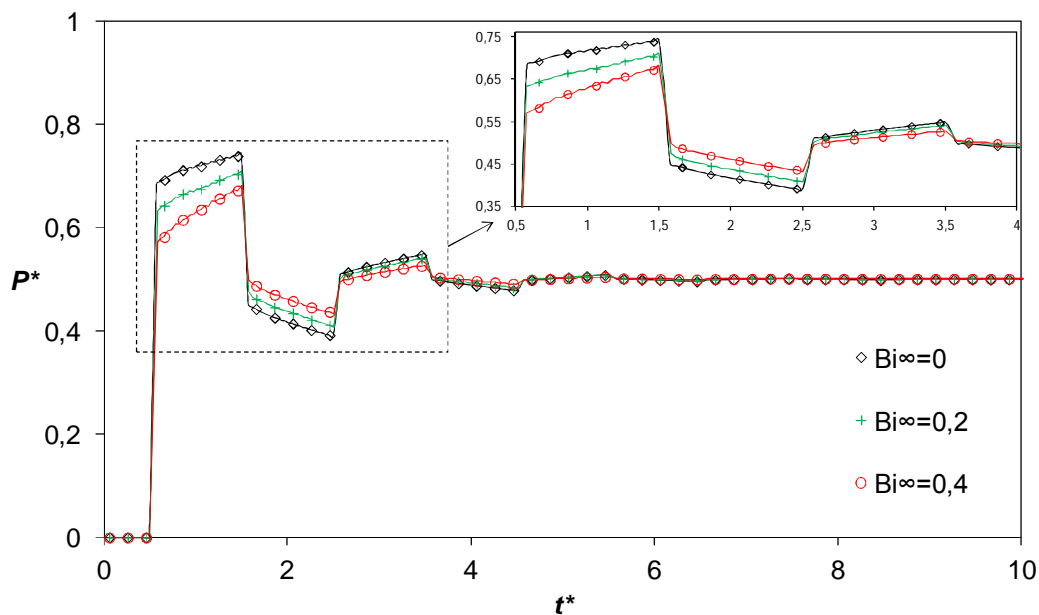


Figura 37 – Evolução da pressão na metade da tubulação para o fluido tixotrópico avaliado com diferentes valores de  $Bi_{\infty}$ .

Já a Figura 38 abaixo mostra a evolução da vazão ao longo do tempo com diferentes valores de  $Bi_{\infty}$ .

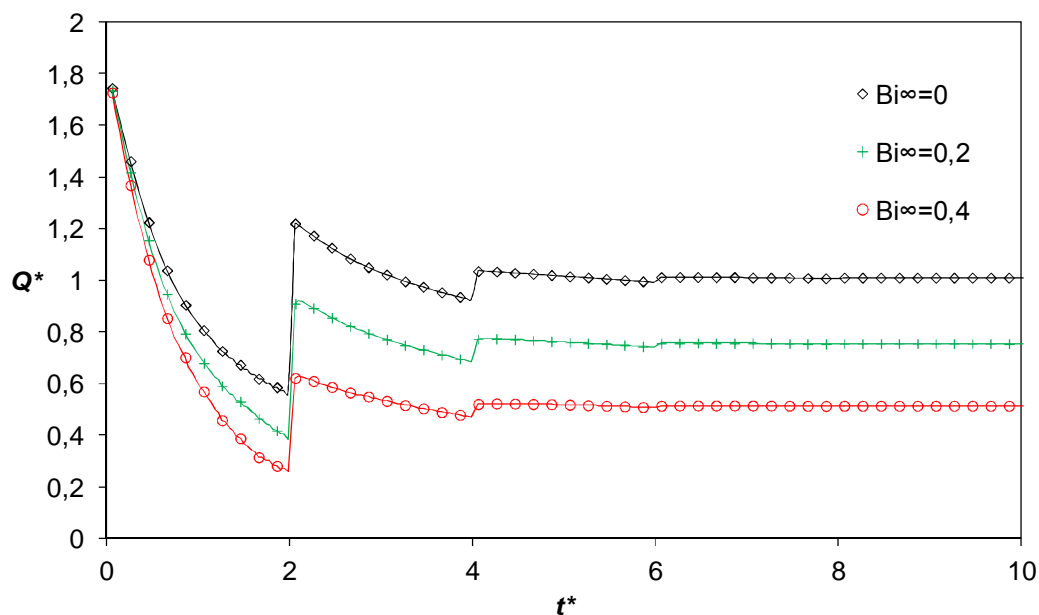


Figura 38 - Evolução da vazão na entrada da tubulação para o fluido tixotrópico avaliado com diferentes valores de  $Bi_{\infty}$ .

Percebe-se da análise da Figura 37 que a influência do  $Bi_\infty$  na curva de pressão ao longo do tempo na metade da tubulação é a redução do pico de pressão e no tempo que leva para a pressão estabilizar no valor de regime permanente.

Para o valor de  $Bi_\infty=0$  tem-se o resultado muito próximo ao newtoniano, com um leve amortecimento do pico de pressão devido à existência de uma tensão de pico na curva de tensão de cisalhamento pelo tempo.

Com o aumento de  $Bi_\infty$  tem-se também o aumento no amortecimento do pico de pressão. Outro fato importante que se percebe da análise da Figura 37 é a redução do tempo para estabilizar a pressão no valor de regime permanente com o aumento do número de Bingham de regime permanente. Ambos os fatos estão relacionados com o aumento da resistência ao escoamento com o aumento da tensão limite de escoamento de regime permanente.

Quanto à estabilidade da solução, percebeu-se que até valores de  $Bi_\infty=0,5$  tem-se o mesmo formato da solução com números de Bingham menores. Contudo, para o valor de  $Bi_\infty>0,5$  a solução não apresenta mais estabilidade.

### 6.3.2 Avaliação da influência de $Bi_c$ no escoamento transiente

O segundo parâmetro avaliado nesta seção é o  $Bi_c$  que é definido pela equação (57):

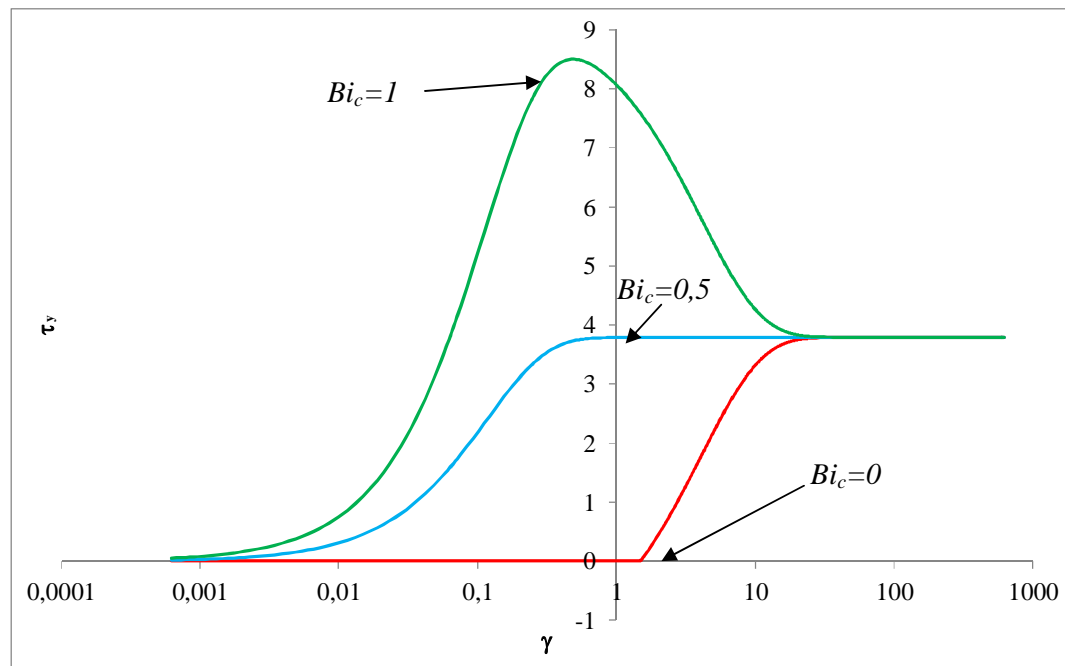
$$Bi_c = \frac{4\tau_{y,c}L}{D\Delta P} \quad (57)$$

A equação (57) mostra que, para os mesmos parâmetros de escoamento,  $Bi_c$  depende apenas da tensão limite de escoamento crítica, na qual ocorre a quebra do gel. Já a tensão limite de escoamento crítica é função da taxa de deformação e definida no ajuste proposto pela equação (58).

$$\tau_{y,c} = A\dot{\gamma}^B \quad (58)$$

Para o ajuste proposto para a quebra do gel, como mostra a equação (58) não se tem como alterar a tensão limite de escoamento crítica isoladamente. Para alterar o valor da tensão de quebra do gel nas avaliações fez-se variar a constante de

ajuste  $A$  da equação (58). O valor de  $Bi_c$  é calculado pelo próprio *software* a partir do maior valor de tensão limite de escoamento calculada no processo iterativo.



**Figura 39 - Ajustes do comportamento tixotrópico para diferentes tensões limites de escoamento críticas**

A Figura 39 mostra que a variação de  $Bi_c$  é dada pela variação na tensão limite de escoamento máxima que é o ponto onde ocorre a quebra do gel. Esta variação de tensão de quebra do gel está diretamente relacionada com a energia necessária para quebrar o gel e iniciar o escoamento, ou seja, quanto maior o valor de  $Bi_c$ , maior é a energia gasta para realizar a quebra do gel.

A influência da variação de  $Bi_c$  no resultado da pressão ao longo do tempo na metade da tubulação do escoamento transiente para o fluido tixotrópico é mostrada na Figura 40 abaixo.

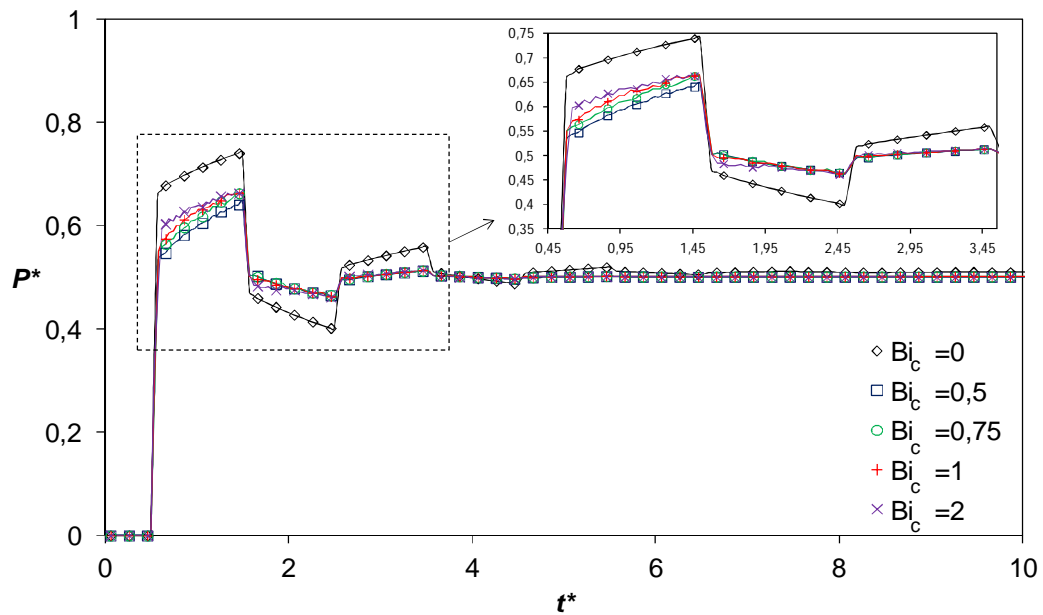


Figura 40 - Evolução da pressão na metade da tubulação para diferentes valores de  $Bi_c$

Já a Figura 41 abaixo mostra a evolução da vazão ao longo do tempo com diferentes valores de  $Bi_c$ .

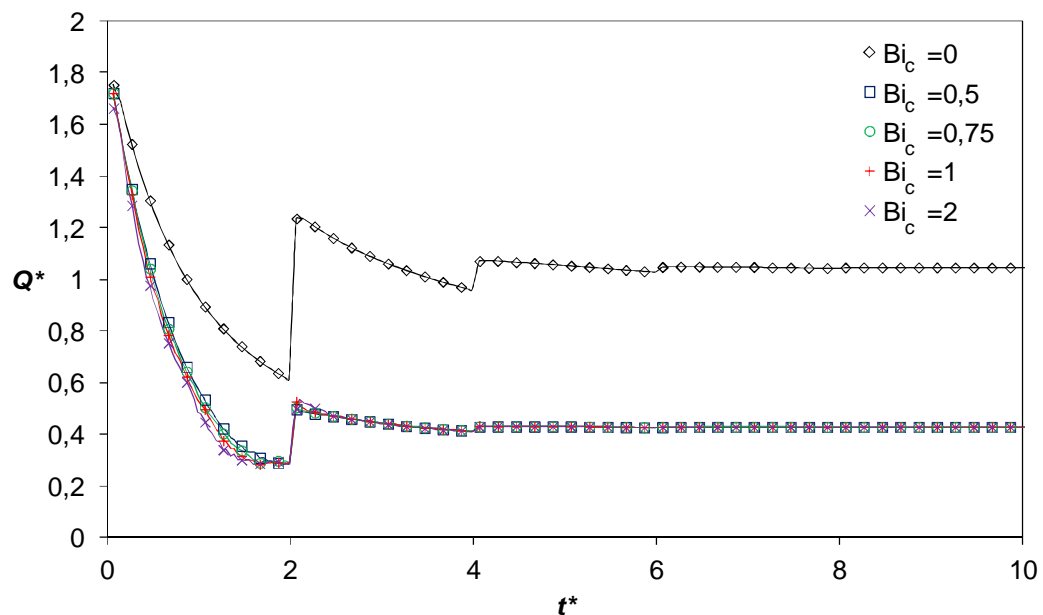


Figura 41 - Evolução da vazão na entrada da tubulação para diferentes valores de  $Bi_c$

Analisando as curvas de pressão ao longo do tempo para diferentes valores de  $Bi_c$  mostradas na Figura 40 percebe-se que, para um valor de  $Bi_c=0$  tem-se um



resultado muito próximo ao newtoniano (assim como percebido para a influência de  $Bi_\infty$ ).

Com o aumento de  $Bi_c$  até o valor de  $Bi_c=0,5$  tem-se a redução gradual do patamar linear de pressão. Percebe-se que, para o valor de  $Bi_c=0,5$ , o resultado é muito próximo a um fluido de Bingham com  $Bi=0,5$ . Desta forma, define-se portanto que, para uma razão de  $Bi_c/Bi_\infty=1$  a solução é muito próxima a do fluido de Bingham pois não há pico de tensão de cisalhamento e o valor desta tensão tende rapidamente ao valor de regime permanente.

Ao aumentar o valor de  $Bi_c$  para valores maiores do que 0,5 tem-se o novo aumento do pico de pressão devido ao aumento da tensão de cisalhamento crítica. Percebe-se que para valores elevados de  $Bi_c$  o resultado perde estabilidade. Isto ocorre pela redução drástica na vazão com o aumento de  $Bi_c$ , como mostra a Figura 41. Portanto, sugere-se para esta solução uma faixa de validade até  $Bi_c / Bi_\infty=4$ .

Ao analisar as curvas de vazão ao longo do tempo para diferentes valores de  $Bi_c$  apresentadas na Figura 41 percebe-se a existência dos mesmos efeitos mencionados para as curvas de pressão.

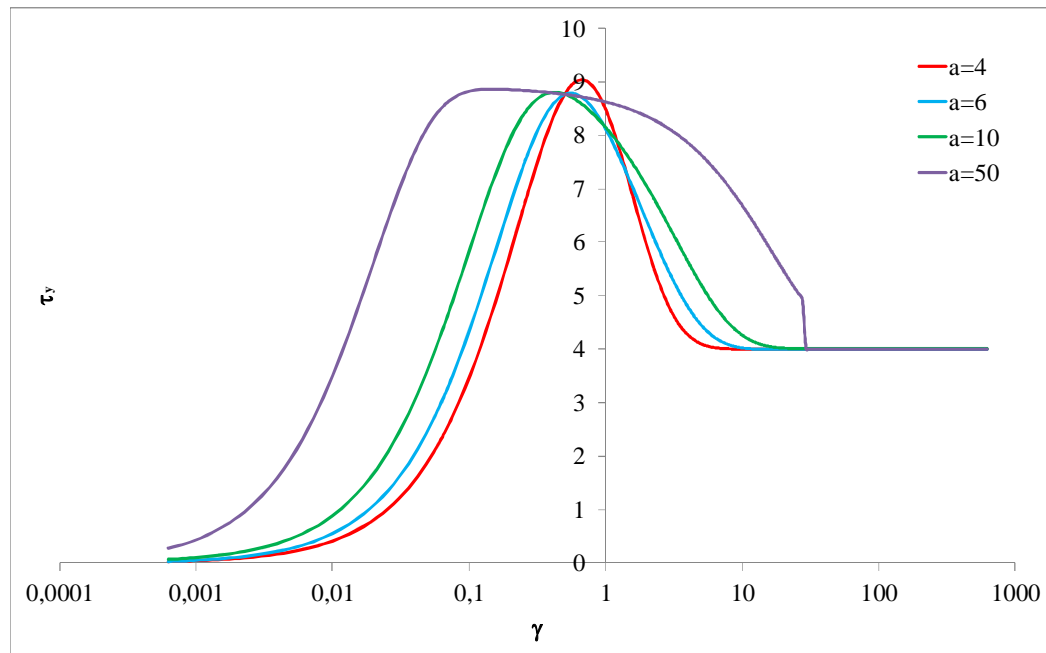
### 6.3.3 Avaliação do parâmetro de ajuste da quebra do gel $a$ no escoamento transiente

Nesta seção será avaliada a influência do parâmetro de ajuste do comportamento tixotrópico  $a$ . Este parâmetro, juntamente com o parâmetro de ajuste  $b$  define o formato da curva de tensão limite de escoamento por deformação.

Como definido anteriormente, a relação entre os parâmetros de ajuste  $a$  e  $b$  mostrada na expressão (59) define o valor do parâmetro  $\lambda$  que define qual será o formato da curva.

$$\lambda = (a^2 - 4b)^{1/2} \quad (59)$$

Para avaliação do parâmetro  $a$ , definiu-se um valor fixo de  $b=3$ . Dessa forma, para esta avaliação, o valor do parâmetro  $a$  deve ser necessariamente maior do que  $\sqrt{12} = 3,464$ . A Figura 42 mostra diferentes curvas de tensão limite de escoamento por deformação para fluidos tixotrópicos com diferentes valores de  $a$ .



**Figura 42 - Ajustes do comportamento tixotrópico para diferentes valores de parâmetro de ajuste  $a$**

O aumento do valor do parâmetro  $a$  implica no adiantamento do início do aumento da tensão limite de escoamento e retardo da ocorrência do patamar de regime permanente. Esta modificação no formato da curva aumenta a quantidade de energia necessária para realizar a quebra do gel, pois a área abaixo da curva de tensão limite de escoamento em função da deformação aumenta.

Entretanto, mesmo havendo aumento da energia necessária para quebra do gel, o valor de  $\tau_{y,c}$  fica praticamente inalterado. Dessa forma, espera-se que o impacto do aumento do parâmetro  $a$  no perfil de pressão e vazão pelo tempo seja o aumento do amortecimento do pico de pressão e de vazão. Contudo, este aumento não pode ser tão expressivo, visto que o valor de tensão necessária para quebrar o gel independe do valor de  $a$ .

A influência da variação do parâmetro de ajuste  $a$  no resultado da pressão ao longo do tempo na metade da tubulação do escoamento transiente para o fluido tixotrópico é mostrada na Figura 43.

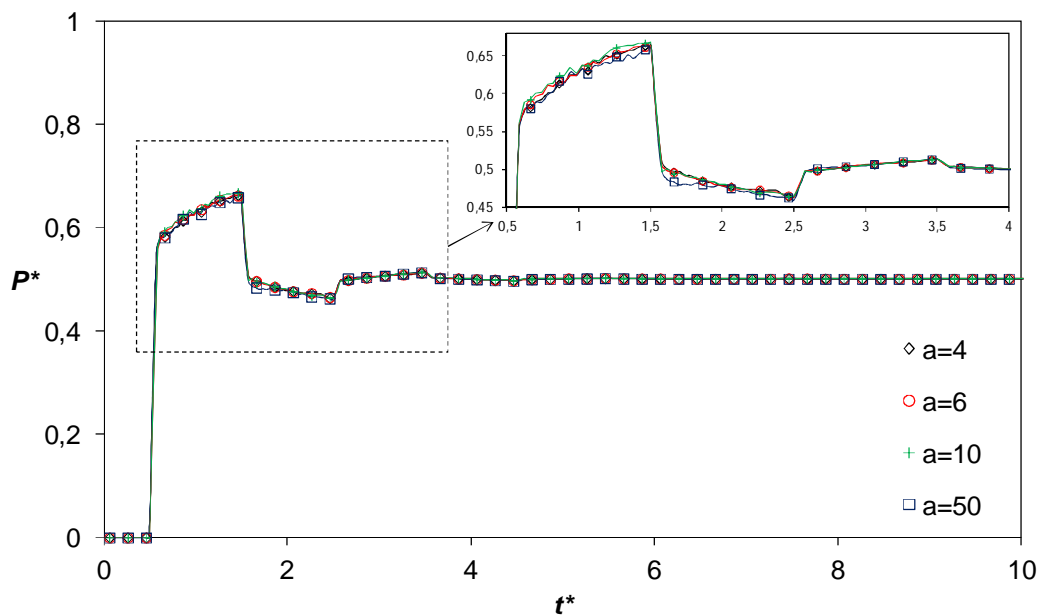


Figura 43 - Evolução da pressão na metade da tubulação para diferentes valores de parâmetro de ajuste  $a$

Já a Figura 44 mostra a evolução da vazão ao longo do tempo com diferentes valores de  $a$ .

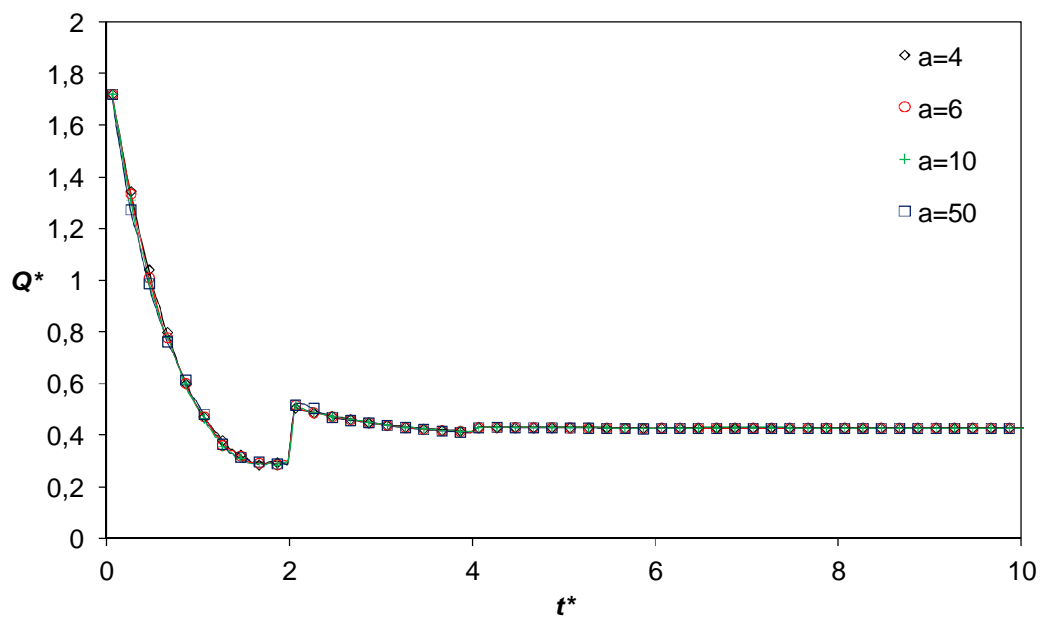


Figura 44 - Evolução da vazão na entrada da tubulação para diferentes valores de parâmetro de ajuste  $a$

Percebe-se que, como era esperado, o aumento do valor do parâmetro  $a$  reduz o valor do pico de pressão, como mostra o gráfico ampliado da Figura 43. Porém, esta redução é muito pequena, pois, como afirmado anteriormente, o valor da tensão de quebra de gel não se altera com a variação do parâmetro  $a$ .

### 6.3.4 Avaliação do parâmetro de ajuste da quebra do gel $b$ no escoamento transiente

Nesta seção será avaliada a influência do parâmetro  $b$ . O parâmetro de ajuste  $b$ , juntamente com o parâmetro de ajuste  $a$  define o formato da curva de tensão limite de escoamento por deformação.

Para esta avaliação fixou-se o valor do parâmetro de ajuste  $a$  em 5,0. Desta forma, pelas restrições de valores do parâmetro  $\lambda$  citados anteriormente, o valor máximo para o parâmetro de ajuste  $b$  é 6,25. A Figura 45 mostra diferentes curvas de tensão limite de escoamento por deformação para fluidos tixotrópicos com diferentes valores de  $b$ .

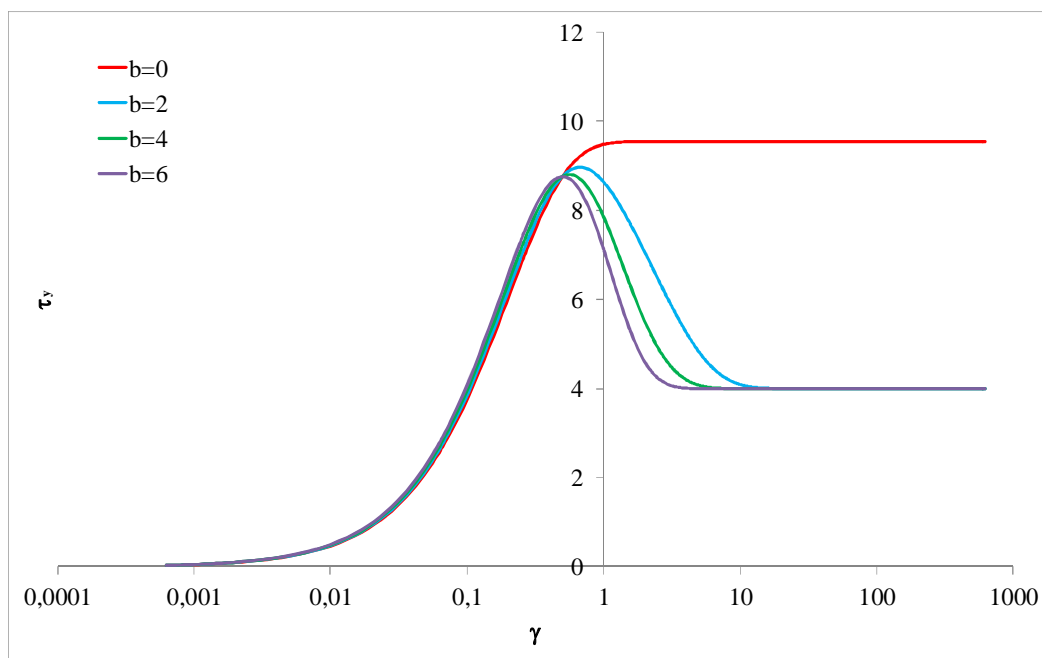
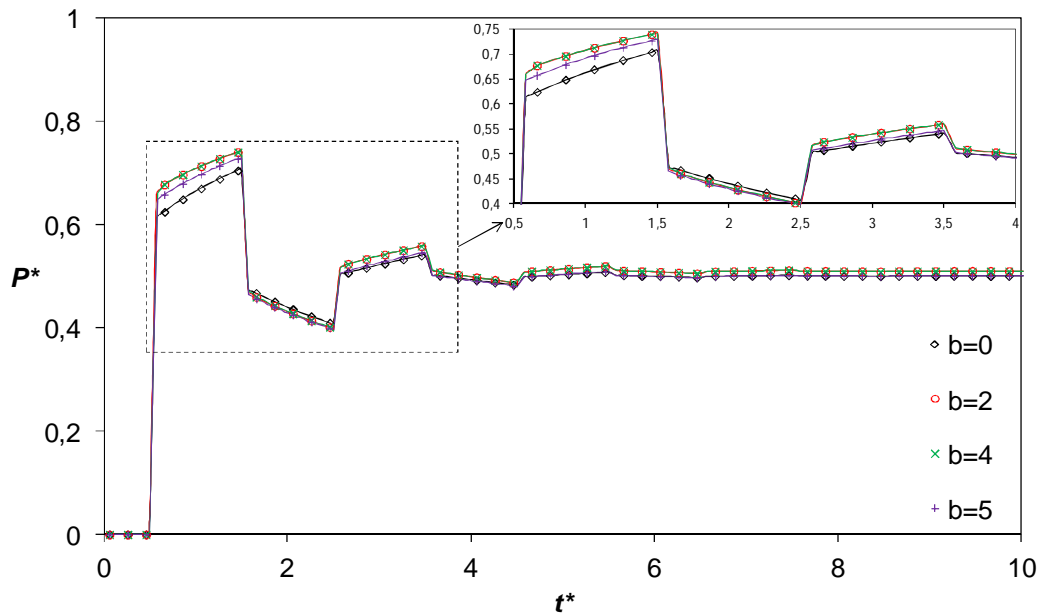


Figura 45 - Ajustes do comportamento tixotrópico para diferentes valores de parâmetro de ajuste  $b$

A Figura 45 mostra que para o valor de  $b=0$ , a curva tem seu formato alterado, não mais convergindo para o patamar de regime permanente definido por  $\tau_{y,\infty}$ . Esta é uma das características da equação selecionada para o ajuste de dados. Este aumento da tensão limite de escoamento de regime permanente aumenta a resistência ao escoamento após a quebra do gel.

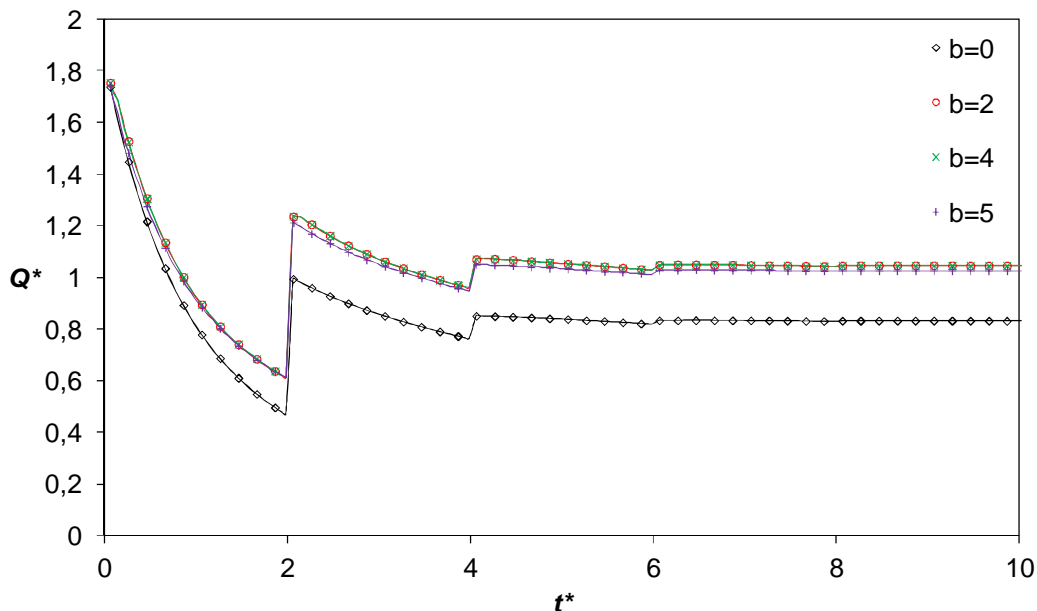
Já para os valores de  $b>0$  tem-se pouca variação no perfil das curvas de tensão limite de escoamento em função da deformação com a variação do parâmetro  $b$ . No valor de tensão de quebra do gel tem-se pouca variação com o aumento de  $b$ . Contudo, tanto a deformação em que ocorre a quebra do gel, quanto à deformação para que se inicie o patamar de tensão de regime permanente são aumentadas com o aumento de  $b$ .

A influência da variação do parâmetro de ajuste  $b$  no resultado da pressão ao longo do tempo na metade da tubulação do escoamento transiente para o fluido tixotrópico é mostrada na Figura 46.



**Figura 46 - Evolução da pressão na metade da tubulação para diferentes valores de parâmetro de ajuste  $b$**

Já a Figura 47 abaixo mostra a evolução da vazão ao longo do tempo com diferentes valores de  $b$ .



**Figura 47 - Evolução da vazão na entrada da tubulação para diferentes valores de parâmetro de ajuste  $b$**

A Figura 46 mostra que o pico de pressão quando  $b=0$  é menor do que para os outros valores. Isto ocorre porque a tensão de regime permanente é maior para este valor de  $b$ , como apresentado anteriormente. A Figura 47 também mostra uma redução na vazão de regime permanente para  $b=0$ . O motivo para esta redução também é o aumento do valor da tensão de regime permanente.

Para os outros valores de  $b$  percebe-se pouca variação entre os perfis de pressão e vazão ao longo do tempo. Contudo, percebe-se que quanto maior o valor de  $b$  menor é o pico de pressão (para  $b \neq 0$ ) pois o aumento de  $b$  tende a um pequeno aumento da tensão de quebra do gel, bem como a deformação em que esta quebra ocorre.

#### 6.4 Síntese do Capítulo

Neste capítulo foram mostrados e avaliados os resultados de diferentes simulações para o reinício do escoamento do fluido tixotrópico. Para modelar o comportamento do fluido tixotrópico foi utilizado o ajuste de dados proposto nos capítulos anteriores. O modelo de solução utilizado foi o modelo discretizado anteriormente através do método das características. Para todas as avaliações neste

capítulo utilizou-se a condição de contorno de pressão constante na entrada da tubulação.

O primeiro resultado obtido foi a comparação da solução para o fluido tixotrópico com a solução para o fluido newtoniano e o fluido de Bingham. Os efeitos de amortecimento pela tensão de cisalhamento de regime permanente foram observados nestes resultados.

O segundo resultado obtido foi a comparação da solução para o fluido tixotrópico em três diferentes pontos da tubulação. Avaliou-se a diferença dos picos de pressão em cada solução e o perfil de pressão de regime permanente na tubulação.

Por fim, fez-se um estudo da influência de quatro parâmetros do ajuste de dados do comportamento tixotrópico na solução do escoamento transiente. Os resultados obtidos foram muito satisfatórios e conseguiu-se definir qual a influência de cada parâmetro no resultado do escoamento.

Com estes resultados conseguiu-se atingir o último objetivo específico do presente trabalho que era simular o escoamento transiente de um fluido tixotrópico em uma tubulação horizontal sem efeitos gravitacionais e avaliar as influências dos parâmetros do ajuste de dados neste escoamento.

## 7 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo geral propor uma equação constitutiva simplificada para representar a relação entre tensão e taxa de deformação durante a quebra da estrutura gelificada do fluido de perfuração e simular o escoamento do fluido em uma tubulação.

Para atingir o objetivo geral do trabalho, foram definidos os seguintes objetivos específicos:

- i) Propor uma equação simplificada que se ajuste aos dados experimentais das curvas de tensão-deformação de um fluido de perfuração;
- ii) Elaborar um modelo matemático para o reinício do escoamento de fluidos de perfuração;
- iii) Resolver numericamente o reinício do escoamento de um fluido de perfuração tixotrópico com o ajuste proposto no item i e o modelo matemático elaborado no item ii.

Nesta seção são expostas as conclusões do presente trabalho e a relação do que foi realizado com os objetivos propostos. Para finalizar o trabalho são expostas as sugestões para trabalhos futuros.

### 7.1 Conclusões

Para alcançar o objetivo i, foi realizado o ajuste da curva de tensão por deformação de um fluido de perfuração tixotrópico. O ajuste foi feito com base na solução de uma equação diferencial de segunda ordem e, portanto, conta com apenas duas constantes de ajuste, muito mais simples do que outros trabalhos presentes na literatura.

Foi realizado o ajuste para os dados experimentais e os resultados mostraram-se muito satisfatórios, com um coeficiente de correlação entre as variáveis de  $R^2=0,840$  até  $R^2=0,934$ .



Outro teste realizado com o ajuste foi a comparação com um modelo da literatura, o modelo de Mendes (2009). Primeiramente realizou-se a comparação para uma evolução da taxa de deformação em rampa e observou-se que os resultados são muito satisfatórios. Posteriormente realizou-se a comparação para uma taxa de deformação constante e percebeu-se a necessidade de aplicar uma correção no ajuste da tensão de quebra do gel para este caso.

Posteriormente, para alcançar o objetivo ii, realizou-se a modelagem do reinício do escoamento de um fluido de perfuração tixotrópico em uma tubulação horizontal para duas condições de contorno (pressão e vazão constantes na entrada da tubulação). As equações de conservação da massa, de quantidade de movimento e a equação característica do fluido foram resolvidas. A parcela de atrito foi avaliada através da variação da tensão limite de escoamento do fluido tixotrópico, sem haver necessidade de utilizar fator de atrito. Este fato também foi inédito dentre os trabalhos realizados pelo Laboratório de Ciências Térmicas da UTFPR.

Para discretizar as equações, utilizou-se o método das características que consiste em uma combinação linear entre as equações que permite transformar os diferenciais parciais em diferenciais totais para realizar a integração ao longo da malha. Utilizou-se este método para redução do tempo computacional gasto.

Por fim, para alcançar o objetivo iii, um software foi elaborado para resolver o modelo proposto. Antes de avaliar os resultados foi realizada uma análise da sensibilidade da malha utilizada nas direções radial e axial e o critério de estabilidade da solução para o fluido tixotrópico, visto que uma solução iterativa se fez necessária. O critério de convergência adotado foi a diferença entre a vazão no instante atual e no instante anterior. Percebeu-se que, para atingir a convergência da solução, é necessário utilizar um resíduo de  $10^{-9}$ .

Os resultados expostos foram baseados em três testes diferentes: comparação da solução para o fluido newtoniano, fluido de Bingham e tixotrópico; Comparação da solução para o fluido tixotrópico em diferentes pontos axiais da tubulação; Avaliação da influência da variação dos parâmetros de ajuste na solução obtida. Para todos os testes foi adotada a condição de contorno de pressão constante na entrada da tubulação. Em resumo, os resultados mostraram o seguinte:

- Para os fluidos de Bingham e tixotrópico, a inclusão de  $\tau_y$  tende a amortecer os picos de pressão, porém não interfere na pressão de regime permanente. Já a vazão de regime permanente é reduzida com a inclusão de  $\tau_y$ ;
- Entre os diferentes pontos da tubulação percebe-se o efeito da reflexão da onda de pressão no final da tubulação e o efeito transitório até o estabelecimento do perfil linear de regime permanente;
- Quanto à influência de  $\tau_{y,\infty}$ , percebeu-se que o aumento desta grandeza diminui o pico de pressão e a vazão de regime permanente. O escoamento se mantém estável até valores de  $Bi_\infty=0,5$ ;
- Quanto à influência da  $\tau_{y,c}$ , percebeu-se que, para  $\tau_{y,c}=0Pa$ , tem-se um resultado próximo ao do fluido newtoniano. Quando se aplica uma relação  $Bi_c/Bi_\infty=1$  o resultado é muito próximo ao do fluido de Bingham, visto que a tensão limite de escoamento tende rapidamente ao patamar de regime permanente. Para valores acima de  $Bi_c/Bi_\infty=4$  o escoamento perde estabilidade;
- A última avaliação realizada foi quanto aos parâmetros de ajuste  $a$  e  $b$ . Percebeu-se que, quando se aumenta a área abaixo da curva de tensão em função da deformação, tem-se a necessidade de uma energia maior para realizar a quebra do gel. Quanto a influência do parâmetro  $b$  percebe-se um caso especial que é  $b=0$ . Para este caso, o patamar de regime permanente é maior do que para os outros valores de  $b$ . Este aumento na tensão de regime permanente reduz os picos de pressão e a vazão de regime permanente.

## 7.2 Sugestões

Para trabalhos futuros sugere-se:

- Incluir no ajuste de dados o efeito da variação da taxa de deformação, visto que o ajuste proposto apenas avalia a influência do valor da taxa e não sua variação;

- Modelar o problema utilizando geometrias mais próximas à da coluna de perfuração;
- Avaliar a influência de outros parâmetros da curva de tensão em função da deformação (p.ex. deformação de quebra do gel) e outros parâmetros do escoamento;

## REFERÊNCIAS

- BIRD, R. B. **Useful Non-Newtonian Models**. Annual Reviews Fluid Mechanics, 1976.
- BJØRKEVOLL, K. S.; ROMMETVEIT, R.; AAS, B.; GJERALDSTVEIT H.; MERLO, A. **Transient Gel Breaking Model for Critical Wells Applications with Field Data Verification**. IADC/SPE Drilling Conference and Exhibition, SPE/IADC 79843, 2003.
- CAWKWELL, M. & CHARLES, M. **An Improved Model for Start-up of Pipelines containing Gelled Crude Oil**. Journal of Pipelines, v. 7, pp. 41-52, 1987.
- CHANG, C.; RØNNINGSEN, H.; NGUYEN, Q. **Isothermal Start-up of Pipeline Transporting Waxy Crude Oil**. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, v. 87, pp. 127-154, 1999.
- DAVIDSON, M. R.; CHANG, C.; RØNNINGSEN, H. P.; NGUYEN, Q. D. **A Model for Restart of a Pipeline with Compressible Gelled Waxy Crude Oil**. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, v. 123, pp. 269-280, 2004.
- DULLAERT, K.; MEWIS, J. **A model system for thixotropy studies**. Rheological Acta, v.45, 23–32, 2006.
- MENDES, P. R. S. **Modeling the thixotropic behavior of structured fluids**. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, v. 164, 66–75, 2009.
- MEWIS, J.; WAGNER, N.J. **Thixotropy**. Adv. Colloid Interface Science, v.147–148, 214–227, 2009.
- NEGRÃO, C. O. R.; FRANCO, A. T.; ROCHA, L. L. V. **A Weakly Compressible Flow Model for the Restart of Thixotropic Drilling Fluids**. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, v. 166, pp. 1369-1381, 2011.
- OLIVEIRA, G. M.; ROCHA, L. L. V.; NEGRÃO, C. O. R.; FRANCO, A. T.; MARTINS, A. L. **Reinício da Circulação de Fluidos de Perfuração Gelificados**. In: 4º Congresso Brasileiro de P&D em Petróleo de Gás, 2007, Campinas, Brasil: ABPG, p. 113-1, 2007.
- OLIVEIRA, G. M.; ROCHA, L. L. V.; NEGRÃO, C. O. R.; FRANCO, A. T. **Numerical Simulation of the Start-up of Bingham Fluid Flows in Pipelines**. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, v. 165, pp. 1114-1128, 2010.
- OLIVEIRA, Gabriel Merhy, **MODELAGEM DA PROPAGAÇÃO DE PRESSÃO NO REINÍCIO DO ESCOAMENTO DE FLUIDOS DE PERFURAÇÃO NÃO GELIFICADOS**, 2011, Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 130 p.

RITTER, R.A.; BATYCKY, J.P. Numerical Prediction of the Pipeline Flow Characteristics of Thixotropic Liquids. SPE Journal, v. 7, 369–376, 1967.

ROCHA, L. L. V. **Modelagem do Reinício do Escoamento de Fluidos de Perfuração em Tubulações**: Monografia do Projeto Final de Curso. Curitiba, Brasil: Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2007.

SESTAK, J.; CAWKWELL, M.; CHARLES, M.; HOUSKAS, M. **Start-up of Gelled Crude Oil Pipelines**. Journal of Pipelines, v. 6, pp. 15-24, 1987.

THOMAS, J. E. **Fundamentos de Engenharia de Petróleo**. 2ª Ed. Rio de Janeiro: Petrobras, 2004.

VINAY, G.; WACHS, A.; AGASSANT, J. F. **Numerical Simulation of Weakly Compressible Bingham Flows: The Restart of Pipeline Flows of Waxy Crude Oils**. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, v. 136, pp. 93-105, 2006.

VINAY, G.; WACHS, A.; FRIGAARD, I. **Start-up Transients and Efficient Computation of Isothermal Waxy Crude Oil Flows**. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, v. 143, pp. 141-156, 2007.

WACHS, A.; VINAY, G.; FRIGAARD, I. **A 1.5D Numerical Model for the Start up of Weakly Compressible Flow of a Viscoplastic and Thixotropic Fluid in Pipelines**. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, v. 159, pp. 81-94, 2009.

WHITE, F. M. **Fluid Mechanics**. 5ª ed. Estados Unidos: McGraw-Hill, 2003.

WILYE, E. B.; STREETER, V. L. **Fluid Transients**. 1ª ed. Estados Unidos: McGraw-Hill, 1978.