

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MECÂNICA

CURSO DE ENGENHARIA INDUSTRIAL MECÂNICA

LUCAS GIMENIS DE MOURA

**APLICAÇÃO DE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA A INTEGRAÇÃO DE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE MODELOS DE EVOLUÇÃO DE TRINCA À
AMPLITUDE DE TENSÃO CONSTANTE**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CURITIBA

2014

LUCAS GIMENIS DE MOURA

**APLICAÇÃO DE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA A INTEGRAÇÃO DE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE MODELOS DE EVOLUÇÃO DE TRINCA À
AMPLITUDE DE TENSÃO CONSTANTE**

Monografia do Projeto de Pesquisa apresentada à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso - Tcc2 do curso de Engenharia Industrial Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial para aprovação na disciplina.

Orientador: Prof. Doutor Cláudio Ávila

CURITIBA

2014

RESUMO

MOURA, Lucas Gimenis. Aplicação de métodos numéricos para integração de equações diferenciais de modelos de evolução de trinca à amplitude de tensão constante (2014). Trabalho de conclusão de curso – Graduação em Engenharia Industrial Mecânica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2014.

Uma abordagem realística de estruturas e componentes usados na engenharia deve considerar a existência de trincas. A presença de trincas em estruturas, ou componentes mecânicos, geralmente, está associada ao fenômeno da fadiga, e a sua propagação é fortemente influenciada pelo estado de tensões em sua vizinhança.

Neste trabalho foram obtidas soluções numéricas aproximadas através da integração das equações diferenciais que descrevem as leis de evolução de trincas dos tipos Paris-Erdogan, Forman, Priddle e McEvily. Essas leis de evolução de trinca podem ser formuladas com o uso dos métodos numéricos de Euler, implícito e explícito, e Runge-Kutta de quarta ordem explícito (RK4).

A equação apresentada por Paris-Erdogan define um problema de valor inicial (PVI), definido por uma equação diferencial ordinária (EDO) de primeira ordem, não linear e autônoma. De forma mais geral, a equação pode ser colocada como um problema de Cauchy, que consiste em determinar as trajetórias (funções), que satisfazem a equação diferencial, e que passam pelo ponto definido pela condição inicial, $(a(N_0)=a_0)$. A EDO é separável, portanto o método de integração direta pode ser utilizado para obter soluções para a EDO. Apesar disso, em geral, a definição da função "fator de correção do fator intensidade de tensão" impossibilita a determinação explícita da função "tamanho de trinca". Desta forma é possível obter soluções numéricas para a EDO, somente, através da utilização de métodos numéricos.

A utilização de um ambiente computacional para auxiliar o uso dos métodos numéricos torna possível a geração de gráficos para demonstrar a evolução de uma determinada trinca a medida que o número de ciclos aumenta. Pequenas divergências entre os resultados dos diferentes métodos são esperadas devido ao fato de que cada método possui um grau de precisão diferente.

Palavras Chaves: Lei de Paris-Erdogan, Mecânica da fratura elástica linear e PVI.

ABSTRACT

MOURA, Lucas Gimenis. Application of numerical methods for integrating differential equations of crack evolution models to the range of constant tension (2014). Completion of course work – Graduate in Mechanical Industrial Engineering. Federal Technological University of Paraná. Curitiba, 2014.

A realistic approach to structures and components used in engineering should consider the existence of cracks. The presence of cracks in structures, or mechanical components, is usually associated with the existence of the phenomenon of fatigue. The propagation of a crack is strongly influenced by the state of stress in its vicinity.

In this work were obtained approximated numerical solutions through the integration of differential equations describing the crack evolution laws of Paris-Erdogan type, Forman, Priddle and McEvily. These crack evolution laws can be formulated with the use of numerical methods of Euler, implicit and explicit, and explicit fourth-order Runge-Kutta (RK4).

The equation presented by Paris sets an initial value problem (IVP), defined by a nonlinear and autonomous ordinary differential equation (ODE) of first order. More generally, the equation can be placed as a Cauchy problem that consists in determining the paths (functions) that satisfy the differential equation, passing through the point set in the initial condition ($a(N_0) = a_0$). ODE is separable, so the direct integrating method can be used for solutions to the equation. Nonetheless, generally, the definition of the function “geometric correction factor” prevents the explicit determination of function “crack size”. Thus, it is possible to obtain numerical solution for the ODE, only, through the use of numerical methods.

The use of a computing environment to assist the use of numerical methods makes it possible to generate graphics that show the evolution of a determined crack as the number of cycles increases. Small differences between the results of different methods are expected because each method works with a different degree of accuracy.

Keywords: Paris-Erdogan’s Law, Linear elastic fracture mechanics, IVP.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	6
1.1	Contexto do Tema	6
1.2	Caracterização do Problema	6
1.3	Objetivos	6
1.4	Justificativa	7
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	8
2.1	Modelos de Propagação de Trinca	8
2.1.1	Modelo de Paris-Erdogan	9
2.1.2	Modelo de Forman	11
2.1.3	Modelo de Priddle	12
2.1.4	Modelo de Walker	13
2.1.5	Modelo de McEvily	13
2.2	Solução Numérica de Equações Diferenciais Ordinárias	15
	Problema de Valor Inicial (PVI)	15
	Solução Numérica de um PVI de Primeira Ordem	15
	Método de Euler	16
	Método de Euler Implícito	17
	Métodos de Runge-Kutta	17
	Fórmulas de Runge-Kutta de Quarta Ordem	18
3	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	20
3.1	Revisão Bibliográfica	20
3.2	Formulação Matemática	20
3.3	Métodos e Algoritmos	20
3.4	Implementação Computacional	20
3.5	Resultados Numéricos	21
4	ANÁLISE COMPUTACIONAL	22
4.1	Modelo de Paris-Erdogan	22
4.2	Modelo de Forman	26
4.3	Modelo de Priddle	29
4.4	Modelo de McEvily	32
5	CONCLUSÕES	36
6	REFERÊNCIAS	37

1 INTRODUÇÃO

1.1 Contexto do Tema

Quando analisamos o desempenho estrutural de componentes, ou estruturas, será mais adequado à realidade se considerarmos a existência de trincas. A ocorrência destas, dentro de certos limites, não significa, necessariamente, que o componente está em falha, ou que deve ser, imediatamente, substituído. No entanto, a partir do momento que se detecta a trinca, é importante realizar o monitoramento de sua evolução. Muitos sistemas estruturais em engenharia que apresentam grande relação de compromisso, como as indústrias automobilística e aeroespacial, admitem a coexistência de trincas durante a vida de operação dos componentes. Desta maneira, a previsão da evolução de trincas, é relevante na determinação de períodos de inspeção e manutenção destes componentes, ou sistemas estruturais.

1.2 Caracterização do Problema

Quando constatada a ocorrência de trincas em estruturas, ou componentes mecânicos, geralmente, sua presença está associada à existência do fenômeno de fadiga. A propagação de uma trinca é fortemente influenciada pelo estado de tensões em uma vizinhança da frente de trinca. Esta característica confere ao processo de propagação de trincas, um caráter localizado.

Sabe-se que a nucleação de trincas tem origem em nível atômico pelo rompimento das ligações atômicas e deslizamento de planos propagando-se ao longo da rede cristalina do material. O dano em fadiga é acumulativo e permanente, se manifestando através de uma trinca.

Temos à disposição vários modelos para a previsão do crescimento de uma trinca. Qual modelo deve ser utilizado irá depender da precisão exigida, dos gastos envolvidos e do número de variáveis que se deseja, ou que seja possível avaliar.

1.3 Objetivos

Neste trabalho serão obtidas soluções numéricas, para a integração de equações diferenciais relativas aos modelos de evolução de trincas do tipo Paris-Erdogan, Forman,

Priddle e McEvily, obtendo soluções para o tamanho de trinca à luz dos métodos numéricos de Euler, implícito e explícito, e do método de Runge-Kutta de quarta ordem. Será analisada uma configuração tradicionalmente tratada na literatura, a placa “infinita” com uma trinca sujeita a esforços de tração. Os resultados numéricos servirão para avaliação do desempenho da formulação implementada e comprovação experimental dos resultados teóricos relativos à existência e convergência das soluções numéricas.

1.4 Justificativa

Para muitas aplicações de engenharia, o uso de métodos numéricos é relevante para a obtenção de resultados. Para a maior parte das leis de evolução de trincas que serão apresentadas não é possível obter uma solução exata para as equações diferenciais destes modelos, fazendo necessário o uso de métodos numéricos para obter soluções aproximadas. Um dos primeiros modelos proposto para a previsão da evolução de trincas foi o de Paris-Erdogan (1963). A partir disso, este trabalho utiliza, além da lei de Paris, outros modelos desenvolvidos a partir do modelo de Paris. Eles são: modelo de Forman, modelo de Priddle, modelo de Walker e modelo de McEvily. Independentemente do rigor teórico em que o modelo escolhido seja concebido, este terá seu sucesso determinado pelo uso e aplicação em problemas de engenharia, também pela sua utilização como alicerce de novas propostas que sejam mais eficazes. Devido a sua simplicidade, a equação de Paris é uma das mais amplamente utilizadas.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Modelos de Propagação de Trinca

Esta seção será dedicada à apresentação dos modelos de crescimento de trinca de Paris-Erdogan, Forman, Priddle e McEvily. Uma parcela significativa da vida em fadiga de um componente mecânico está na etapa de propagação de trinca. É possível, através da mecânica da fratura, prever o número de ciclos necessários para que uma trinca cresça para um tamanho especificado ou limite. Este valor está relacionado a uma condição de falha. A previsão do crescimento de uma trinca é uma informação importante em várias aplicações de engenharia, pode-se citar a industrial aeroespacial e o transporte através de dutos.

O estudo da evolução de uma trinca é feito com base na taxa de crescimento da trinca. Com relação ao comportamento da taxa de propagação de trinca, o diagrama $\log\left(\frac{da}{dN}\right) \times \log(\Delta K)$ pode ser dividido em três regiões.

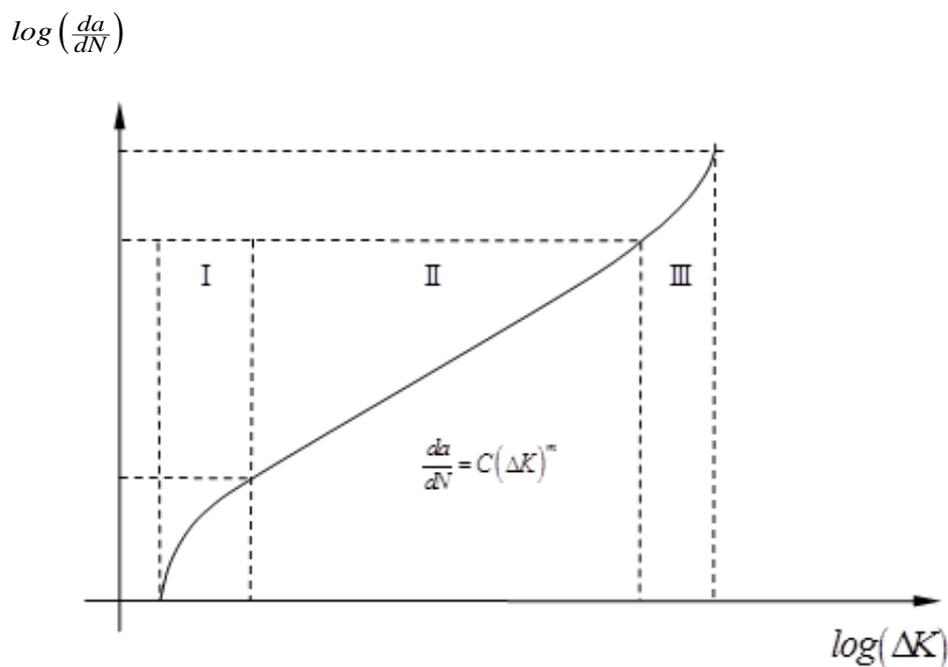


Figura 1: Diagrama $\log\left(\frac{da}{dN}\right) \times \log(\Delta K)$

Fonte: Ávila et al. (2013)

Região I: Nesta região são observados valores numéricos baixos para o fator intensidade de tensão K e o comportamento da trinca está associado a um (ΔK) limite. Abaixo desse valor não é observado um crescimento mensurável de trinca.

Região II: Muitas metodologias de projeto baseadas em “taxa de crescimento de trinca” são desenvolvidas para serem utilizadas nesta região. Muitas curvas têm sido ajustadas para esta região, que é caracterizada por um comportamento aproximadamente linear. Entre elas destaca-se a equação de Paris e Erdogan (1963) que tem sido amplamente utilizada.

Região III: Esta região possui elevadas taxas de crescimento de trinca. Em geral, nesta região, é observado um comportamento instável.

2.1.1 Modelo de Paris-Erdogan

O modelo de propagação de trinca proposto por Paris-Erdogan (Paris & Erdogan, 1963) descreve o crescimento de trinca na região II da figura 1. Este modelo baseia-se em observações experimentais e diretrizes heurísticas. Em detrimento disso, a evolução de uma trinca através desse modelo é melhor representada ao se utilizar uma caracterização probabilística. Esta é a proposta de trabalho de Ghonen & Dore (1984), em que foram ensaiados e analisados resultados obtidos a partir de uma amostra de experimentos, para uma placa finita contendo uma trinca centrada sujeita a um carregamento.

Utilizando o modelo de propagação de trinca de Paris-Erdogan, o PVI ou problema de Cauchy para o crescimento de trinca pode ser formulado conforme a equação 2.1.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } a \in C^1([N_0, N_1]; \mathfrak{R}^+), \text{ tal que:} \\ \frac{da}{dN} = C_p \Delta K^{m_p}, \forall N \in (N_0, N_1); \\ a(N_0) = a_0; \end{array} \right. \quad (2.1)$$

sendo C_p e m_p constantes do material e N é o número de ciclos. A variação do fator intensidade de tensão ΔK é definido conforme a equação 2.2.

$$\begin{aligned} \Delta K(a(N)) &= (K_{\max} - K_{\min})(a(N)) = \sqrt{\pi a(N)} f(a(N)) (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = \\ &= \sqrt{\pi a(N)} f(a(N)) \Delta \sigma \end{aligned} \quad (2.2)$$

sendo $f(a)$ a função de “correção do fator intensidade de tensão” e $\Delta\sigma$ a variação de tensão. Assim, a equação 2.1 pode ser reformulada conforme o problema de valor inicial (2.3).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } a \in C^1([N_0, N_1]; \mathfrak{R}^+), \text{ tal que:} \\ \left(\frac{da}{dN} \right) (N) = C_p (\sqrt{\pi a(N)} f(a(N)) \Delta\sigma)^{m_p}, \forall N \in (N_0, N_1); \\ a(N_0) = a_0. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

A taxa de crescimento de trinca (da/dN) do problema de valor inicial (2.3) é definida como uma equação diferencial ordinária, de 1ª ordem, não-linear e autônoma. Sua determinação consiste em um problema de Cauchy, em que se busca a função (trajetória) que satisfaça a equação diferencial do PVI que tem como valor inicial, $a(N_0) = a_0$. E o intervalo (N_0, N_1) corresponde ao número de ciclos do carregamento que representa a região II da figura 1.

A EDO é separável, portanto o método de integração direta pode ser utilizado para obter soluções para a EDO. Apesar disso, em geral, a definição da função "fator de correção geométrica" impossibilita a determinação explícita da função "tamanho de trinca". Desta forma é possível obter, somente, soluções numéricas para a EDO. Para isso, deve-se aplicar métodos numéricos como, por exemplo, o Runge Kutta clássico, de quarta ordem, explícito (RK4).

Devido a sua simplicidade (apenas, dois parâmetros precisam ser identificados experimentalmente), o modelo de Paris é amplamente utilizado. No entanto, esta equação apresenta algumas limitações, são elas:

- Representa apenas a região II;
- Efeitos de tensão média não são considerados;
- Não é considerado o histórico de carregamento e efeitos da interação de carregamento.

Muitas variações da equação de Paris têm sido desenvolvidas para tratar dessas limitações. Uma delas é o modelo de Elber (1970), que propõe um fator intensidade de tensão equivalente para considerar fechamento de trincas sobre a ação de tensões compressivas; Forman et al. (1967), considera os efeitos de tensão média. Muitos outros modelos estão disponíveis na literatura. Entretanto, a própria existência de uma grande variedade de modelos é uma evidência que não existe uma equação que seja a mais indicada para todos os tipos de aplicações.

Para simular o crescimento de trinca em componentes ou estruturas com geometria complexa, análises numéricas têm sido extensivamente usadas nos últimos anos. Entre elas podemos citar o cálculo de fatores de intensidade de tensão pelo método de elementos de contorno (Leonel&Venturini, 2011; Leonel et al., 2010; Leonel et al., 2011), métodos dos elementos finitos (MEF) (Réthoré et al., 2010; Shen& Lew, 2010; Elguedj et al., 2006; Gupta et al, 2012) e método de elementos finitos Xfem (Réthoré et al., 2010; Shen& Lew, 2010; Elguedj et al., 2006; Gupta et al, 2012) incluindo a modelagem coesiva de trincas.

Cálculos numéricos de fatores de intensidade de tensão e esquemas iterativos aumentam significativamente o “esforço computacional” da estimação de crescimento de trincas quando a propagação aleatória de trincas e/ou análise de confiabilidade é considerada. Isto é mais evidente quando são consideradas incertezas sobre os parâmetros do modelo de propagação de trincas (Virkler et al., 1979; Ghonem& Dore, 1987; Provan, 1987; Sobczyk& Spencer, 1992; Beck & Melchers, 2004; Beck & Gomes, 2013); já que estudos de propagação com incertezas aumentam significativamente o esforço computacional.

2.1.2 Modelo de Forman

O modelo de Forman (Forman et al. 1967) é usado para prever a taxa de crescimento de trinca em fadiga nas regiões II e III do diagrama $\log\left(\frac{da}{dN}\right) \times \log(\Delta K)$ da figura 1. Este modelo inclui o efeito da tensão média e da instabilidade da trinca no início do processo acelerado de fratura.

A equação de Paris tem boa correlação entre os resultados experimentais e os resultados teóricos. No entanto, quando comparada com uma faixa maior de dados, como maiores taxas de carregamento de crescimento de trinca, esta correlação pode não ser satisfatória. Assim sendo, deve-se escolher entre os diversos métodos de previsão de crescimento de trinca, qual o que melhor irá se encaixar às condições que estamos avaliando e com a precisão desejada. É importante ressaltar que uma análise mais complexa pode exigir uma quantidade maior de tempo, custos e número de variáveis que devem ser analisadas.

Dois efeitos não são considerados na equação (2.3). Um deles é a variação na taxa de crescimento de trinca devido ao carregamento. O outro é a instabilidade do crescimento da trinca quando o valor do fator de intensidade de tensão máximo se aproxima da tenacidade de fratura do material, K_c .

Para considerar a variação na taxa do crescimento de trinca, Broek (Broek D, Schijve J, 1963) estudou o efeito acumulativo devido à razão de carregamento R , definida como a razão entre a tensão mínima e a tensão máxima do ciclo de fadiga, propondo uma equação exponencial (2.4) incorporando R para o caso de uma placa com uma trinca centralizada,

$$\frac{da}{dN} = C_1 e^{-C_2 R} (\sigma \sqrt{a})^3 [1 + 10(a/b)^2], \quad (2.4)$$

sendo C_1 e C_2 constantes do material e σ é a tensão normal aplicada à trinca.

A equação (2.4) não prevê a taxa de propagação de trinca acelerada ou a instabilidade do crescimento de trinca, características da região III da figura 1. A partir da teoria da MFEL, uma lei de crescimento de trinca deve atender a seguinte condição,

$$\lim_{K_{\max} \rightarrow K_c} \frac{da}{dN} = \lim_{\Delta K \rightarrow (1-R)K_c} \frac{da}{dN} = \infty \quad (2.5)$$

A partir disso, aplicando-se a condição expressa na equação (2.5) a equação (2.4), obtém-se

$$\frac{da}{dN} = \frac{C(\Delta K)^n}{(1-R)K_c - \Delta K}, \quad (2.6)$$

sendo “ n ” é uma constante do material. Este modelo apresenta excelente concordância com os testes executados por Broek e Shijve (1963).

A utilização desta técnica, aliada com integrações numéricas e auxílio de softwares, torna possível uma análise mais precisa para a evolução de trincas em estruturas em fadiga.

2.1.3 Modelo de Priddle

Entre os modelos de propagação de trinca com maior versatilidade está o modelo proposto por Priddle (1976). Este modelo descreve as regiões I, II e III da figura 1 sendo dado pela equação (2.7),

$$\frac{da}{dN} = C \left(\frac{\Delta K - \Delta K_{th}}{K_c - K_{máx}} \right)^m + C', \quad (2.7)$$

sendo C e m parâmetros da equação de Priddle, ΔK_{th} o valor inicial onde as trincas em formação iniciam a sua propagação e $K_{máx}$ o fator intensidade de tensão máximo.

Equações contendo o termo $(\Delta K - \Delta K_{th})$ prevêm que quando $\Delta K \rightarrow \Delta K_{th}$ a taxa de propagação tende a zero, sendo nula para $\Delta K = \Delta K_{th}$. Esta afirmação não é correta e para contornar essa dificuldade, Priddle propos a utilização do parâmetro C' .

2.1.4 Modelo de Walker

A partir da equação de Paris-Erdogan, Walker (1970) aprimorou conceitos da equação e verificou, utilizando ligas de alumínio, que a razão de tensão, R , influencia na evolução de uma trinca. O modelo proposto é descrito conforme a equação 2.8,

$$\frac{da}{dN} = C_w [(1-R)^{\gamma_w} K_{máx}]^{m_w}, \quad (2.8.1)$$

ou

$$\frac{da}{dN} = C_w [(1-R)^{\gamma_w-1} \Delta K]^{m_w}, \quad (2.8.2)$$

sendo C_w , m_w e γ_w parâmetros do modelo de Walker. Assim como a equação de Paris, esse modelo é válido, somente, para a região II da figura 1. Sua validade está condicionada à valores de razão de tensão definidos entre $-2 < R < 0,7$ (NOROOZI et al., 2005). Para $R = 0$, a equação 2.8.2 se torna equivalente a Lei de Paris, considerando C_w e m_w igual a C_P e m_P .

2.1.5 Modelo de McEvily

McEvily e Groeger (1977) propuseram um modelo para descrever as regiões I, II e III da figura 1,

$$\frac{da}{dN} = \frac{A}{\sigma_y} (\Delta K - \Delta K_{th})^m \left(1 + \frac{\Delta K}{K_c - K_{máx}} \right), \quad (2.9.1)$$

ou

$$\frac{da}{dN} = C_m (\Delta K - \Delta K_{th})^m \left(1 + \frac{\Delta K}{K_c - K_{máx}} \right), \quad (2.9.2)$$

sendo A uma constante do material, σ_y a tensão de escoamento do material e m uma constante do material utilizado. Destaca-se que o valor ΔK_{th} é função da razão de tensão, R , e, também, do meio ambiente. A constante A , também é uma função do meio ambiente. Com isso, a figura 2 mostra, para diferentes aços, a variação da razão de tensão, R , e a sua influência no

valor de ΔK_{th} . Também, observa-se que as propriedades mecânicas e metalúrgicas dos aços analisados pouco influenciam o início da propagação da trinca.

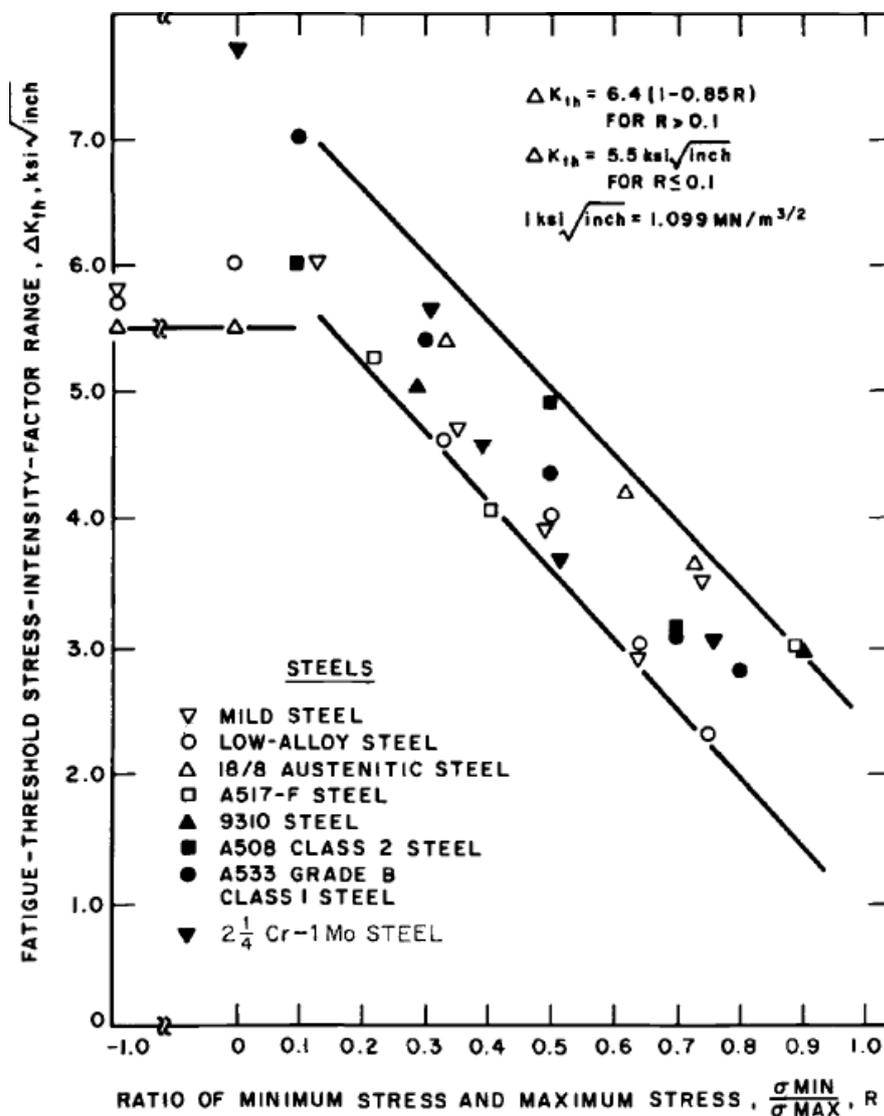


Figura 2: Variação de R em relação ao fator intensidade de tensão ΔK_{th} para diversos aços.

Fonte: Barsom e Rolfe (1999).

Assim, muitos outros modelos, com suas especificidades e limitações, são encontrados na literatura para descrever os modelos de crescimento de trinca para um carregamento com amplitude constante conforme destacam Toor (1973), Hoepfner e Krupp (1974), Nelson (1977) e Beden et al. (2009).

2.2 Solução Numérica de Equações Diferenciais Ordinárias

Para a solução numérica de equações diferenciais ordinárias (EDO), Nunes (2009) apresenta algumas definições iniciais. Se uma equação diferencial tem apenas uma variável independente, então ela é chamada equação diferencial ordinária. Se uma equação diferencial envolve mais que uma variável independente, então ela é equação diferencial parcial. A ordem de uma equação diferencial é a mais alta ordem de derivação que aparece na equação.

Se, dada uma equação diferencial de ordem n , assim como suas derivadas até ordem $n-1$, são especificadas em um mesmo ponto, então tem-se um problema de valor inicial (PVI).

Nem sempre se consegue obter uma solução exata para a EDO, pois nem toda solução pode ser obtida por integração direta. Deste modo, o uso de métodos numéricos se faz necessário para se obter uma solução numérica aproximada.

Problema de Valor Inicial (PVI)

As equações de propagação de trincas acompanhadas do tamanho inicial da trinca definem um problema de valor inicial (PVI). Na solução dos problemas de valor inicial, uma equação diferencial de ordem n se apresenta da seguinte forma:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', y^{(3)}, y^{(4)}, \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.10)$$

sendo

$$y^{(l)} = \frac{d^l y}{dx^l}, l = 1, 2, \dots, n, \quad x \in [a, b] \text{ e } y : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}. \quad (2.11)$$

Solução Numérica de um PVI de Primeira Ordem

Toma-se m subintervalos de $[a, b]$, ($m \geq 1$), e faz-se $x_j = x_0 + jh$ onde $h = \frac{b-a}{m}$, $j=0, 1, 2, \dots, m$, $x_j \in [a, b]$.

Denota-se $I_h = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ a “malha” referente à discretização do domínio físico $[a, b]$. A solução numérica $y_m(x)$ é uma função linear.

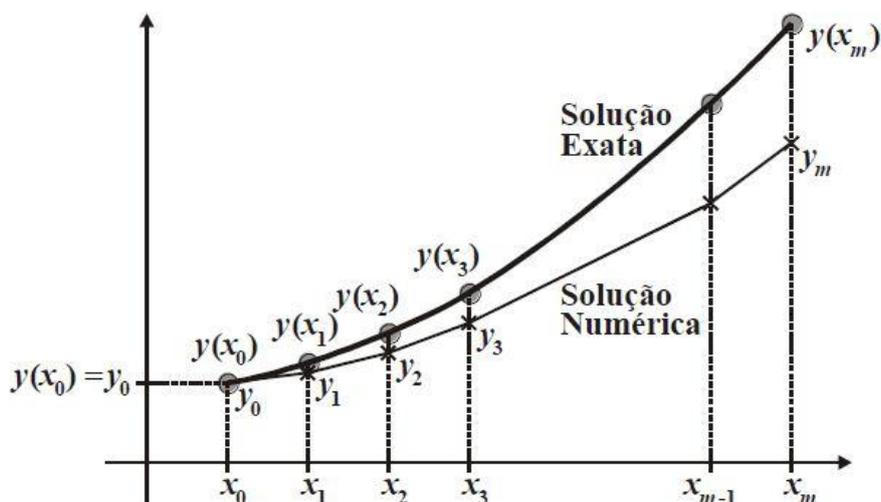


Figura 3: Solução exata e solução numérica

Fonte: Nunes et al. (2009)

- NOTAÇÃO: $y(x_j) \approx y_j$ significa que y_j é aproximação para $y(x_j)$, com $x_j \in I_h$.
- NO GRÁFICO: $y(x_j) \rightarrow$ valor exato; $y_j \rightarrow$ valor aproximado; $j=1,2,\dots,m$.

Método de Euler

Considere o seguinte problema de valor inicial, definido pelo PVI (2.12):

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 = \eta, \end{cases} \quad \text{sendo } \eta \text{ um número dado.} \quad (2.12)$$

Para se aproximar y_j para as soluções exatas $y(x_j)$, com $j=1,2,\dots,m$, procura-se inicialmente y_1 .

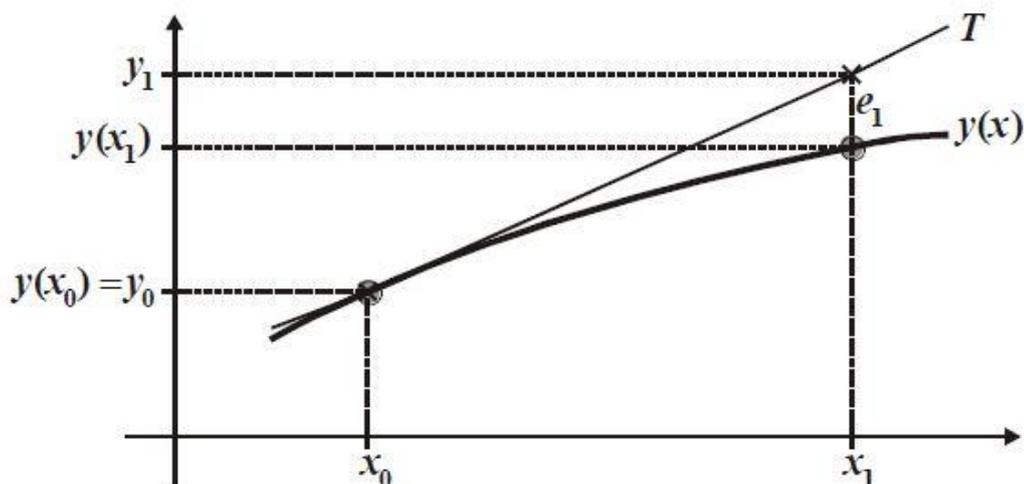


Figura 4: Curva aproximada

Fonte: Nunes et al. (2009)

Traça-se a tangente T à curva $y(x)$ no ponto $(x_0, y(x_0))$, cuja equação é:

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0). \quad (2.13)$$

Fazendo $x = x_1$ e lembrando que $y(x_0) = y_0$, $x_1 - x_0 = h$, $y'(x_0) = f(x_0, y(x_0))$, temos a equação geral de recorrência do método de Euler explícito,

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y(x_0)). \quad (2.14)$$

Conhecendo-se a solução exata, é possível obter a função erro, $e : I_h \rightarrow \mathfrak{R}$, e a solução aproximada, definidas da seguinte maneira geral,

$$\begin{cases} y_{j+1} = y_j + h \cdot f(x_j, y_j) \\ e_{j+1} = y_{j+1} - y(x_{j+1}) \end{cases}, \text{ com } j = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (2.15)$$

Método de Euler Implícito

É conveniente encontrar outros métodos para os quais não se verifique o problema de instabilidade. Uma solução possível são os métodos implícitos, por exemplo.

$$\text{Método de Euler implícito: } y_{m+1} = y_m + f(t_{m+1}, y_{m+1})h,$$

em que o valor y_{m+1} é calculado por resolução de uma equação não linear.

Galvão demonstra que com este método, a mesma equação $y'(x) = c y(x)$, leva agora à estimativa de erro, $e_{m+1} = e_m + c h e_{m+1} + y''(\xi_m)h^2 / 2$, logo,

$$e_{m+1} = e_m / (1 - ch) + y''(\xi_m) / h^2 / 2 / (1 - ch), \quad (2.16)$$

e assim obtemos o termo $(1 - ch)^{-m} e_0$, que apenas tenderá para o infinito se $|1 - ch| < 1$, e isto apenas pode acontecer se $hc > 2$, pelo que basta considerar um h suficientemente pequeno para o evitar.

Métodos de Runge-Kutta

Um método para resolver o PVI é de passo simples se a aproximação y_{j+1} depende apenas do resultado y_j da etapa anterior. Além dos métodos de Euler que são de passo simples, também temos o método de passo simples usando Runge-Kutta.

Forma geral para métodos de passo simples:

$$y_{j+1} = y_j + h \phi(x_j, y_j; h), \text{ para } j = 0, 1, 2, \dots, m-1, \quad (2.17)$$

onde ϕ é a função incremento e h o comprimento do passo.

OBS. 1: Para o método de Euler, a função incremento é $\phi(x_j, y_j; h) = f(x_j, y_j)$.

O método de Euler possui ordem um pois, foi obtido da fórmula de Taylor com desenvolvimento até o termo em h .

Ao fazer o mesmo desenvolvimento até o termo em h^2 , obtém-se o método de passo simples e ordem dois.

$$y_{j+1} = y_j + h y'(x_j) + \frac{h^2}{2!} y''(x_j), \text{ para } j = 0, 1, 2, \dots, m-1. \quad (2.18)$$

O erro local de truncamento é obtido da seguinte maneira,

$$e_{j+1} = \frac{h^3}{3!} y'''(\xi), \quad x_j < \xi < x_{j+1}. \quad (2.19)$$

OBS. 2: Em (2.23), $y'(x_j) = f(x_j, y_j)$.

$y''(x_j)$ é obtido usando a regra da cadeia de f em relação a x_j :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_j, y_j) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_j, y_j) \frac{\partial x}{\partial x}(x_j, y_j) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_j, y_j) \frac{\partial y}{\partial x}(x_j, y_j) \\ y''(x_j) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_j, y_j) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_j, y_j) f(x_j, y_j) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Fórmulas de Runge-Kutta de Quarta Ordem

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \text{ para } j = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (2.21)$$

onde $k_1 = f(x_j, y_j)$,

$$k_2 = f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_2\right) \text{ e}$$

$$k_4 = f(x_j + h, y_j + hk_3).$$

Ou segundo Ascher (ASCHER, PETZOLD, 1998):

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + \left(\frac{h}{6}\right)(f(K_1) + 2f(K_2) + 2f(K_3) + f(K_4)); \\ K_1 = y_n; \\ K_2 = y_n + \left(\frac{h}{2}\right)f(K_1); \\ K_3 = y_n + \left(\frac{h}{2}\right)f(K_2); \\ K_4 = y_n + (h)f(K_3). \end{array} \right. \quad (2.22)$$

O método possui precisão de quarta ordem ($O(h^4)$) (BARROSO et al., 1987). O erro local de truncamento (ETL) é obtido da seguinte maneira:

$$e_j = \frac{h^5}{5!} y^{(5)}(\xi), \quad x_{j-1} < \xi < x_j. \quad (2.23)$$

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste projeto foi desenvolvido um ambiente computacional para análise de métodos numéricos explícitos, implícitos, de passo simples e múltiplo obtendo soluções para o tamanho de trinca. A seguir são descritas, sinteticamente, as etapas a serem realizadas.

3.1 Revisão Bibliográfica

A revisão bibliográfica constituiu das atividades de **busca, compilação e registro** da informação científica relacionada aos métodos numéricos e equações de previsão do crescimento de trincas. Na atividade de busca foram utilizados recursos disponíveis na biblioteca da instituição, tais como livros, artigos e a base eletrônica de artigos e referências bibliográficas disponibilizadas pela CAPES. A compilação foi feita através da reunião e leitura das referências bibliográficas, que contenham assuntos relacionados com os métodos a serem utilizados neste projeto. Na atividade de registro foram extraídas as informações pertinentes, e de sumo interesse para as formulações matemáticas, utilizadas e desenvolvidas neste trabalho.

3.2 Formulação Matemática

Elaboração de um modelo teórico, a partir de métodos numéricos aplicados no contexto de um problema de valor inicial (PVI), para análise do fenômeno de evolução de trincas.

3.3 Métodos e Algoritmos

A partir da formulação matemática, realizada na etapa anterior, foram definidos os métodos e algoritmos utilizados. Para análise numérica, via equação de Paris-Erdogan, é necessária a integração numérica e algoritmos para solução e pré-condicionamento de sistemas lineares.

3.4 Implementação Computacional

Nesta etapa foi desenvolvido o ambiente computacional, utilizando o software MATLAB. Tal escolha baseia-se na versatilidade e robustez da programação através deste software que implementará métodos numéricos para solução de problemas de valor inicial.

Para avaliar os métodos e algoritmos a serem implementados, foram realizados testes com problemas, cuja solução é conhecida.

3.5 Resultados Numéricos

Nesta etapa foram obtidas soluções numéricas, para a integração de equações diferenciais dos modelos para propagação de trinca de Paris-Erdogan, Forman, Priddle e McEvily. Estes problemas foram escolhidos com base no material compilado na revisão bibliográfica. Os resultados numéricos serviram para avaliação do desempenho, da formulação implementada e comprovação experimental dos resultados teóricos relativos a existência e convergência das soluções numéricas.

4 ANÁLISE COMPUTACIONAL

Para realizar as comparações entre os métodos numéricos, foram simulados os modelos de Paris, Forman, Priddle e McEvily. A integração necessária para se obter uma estimativa do tamanho de trinca, a medida que o número de ciclos aumenta, é obtida a partir dos métodos de Euler, implícito e explícito, e do Runge-Kutta de quarta ordem. O problema proposto foi o de uma placa plana infinita com uma trinca. Avaliou-se a função “tamanho de trinca”, para uma amplitude de tensão $\Delta\sigma = 20\text{ksi}$ para 900000 ciclos de aplicação de carga. Devido a sua versatilidade e robustez, utilizou-se o MATLAB na análise do modelos de propagação de trinca.

4.1 Modelo de Paris-Erdogan

A seguir iremos discretizar a equação para obtenção do tamanho de trinca via modelo de Paris-Erdogan a partir dos métodos de Euler, implícito e explícito, e RK4.

Euler

Sendo k o número de intervalos obtidos entre N_0 e N_1 , considerando um passo $\Delta N = 1$ entre os intervalos, temos a equação (2.24) para o método de Euler explícito e (2.25) para o método implícito.

$$\text{Euler (Explícito)} \Rightarrow \begin{cases} \text{Dado } a_0 = a(N_0), \text{ a } k\text{-ésima iteração, } a_k \in \mathbb{R}^+, \text{ é calculada por,} \\ a_{k+1} = a_k + \Delta N \cdot C_p \left(\sqrt{\pi a_k} f(a_k) \Delta\sigma \right)^{m_p}. \end{cases} \quad (2.24)$$

$$\text{Euler (Implícito)} \Rightarrow \begin{cases} \text{Dado } a_0 = a(N_0), \text{ a } k\text{-ésima iteração, } a_k \in \mathbb{R}^+, \text{ é calculada por,} \\ a_{k+1} = a_k + \Delta N \cdot C_p \left(\sqrt{\pi a_{k+1}} f(a_{k+1}) \Delta\sigma \right)^{m_p} \end{cases} \quad (2.25)$$

Runge-Kutta de 4ª ordem

Sendo m o número de intervalos obtidos entre N_0 e N_1 , considerando um passo h entre os intervalos, temos a equação (2.26) que representa o método RK4 aplicado para o problema de Paris.

$$\text{Runge - Kutta} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Dado } a_0 = a(N_0), \text{ a } k\text{-ésima iteração, } a_k \in \mathbb{R}^+, \text{ é calculada por,} \\ a_{k+1} = a_k + \frac{\Delta N}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4); \\ K_1 = C_p \left(\sqrt{\pi a_k} f(a_k) \Delta \sigma \right)^{m_p}; \\ K_2 = a_k + \frac{\Delta N}{2} \cdot K_1; \\ K_3 = a_k + \frac{\Delta N}{2} \cdot K_2; \\ K_4 = a_k + \Delta N \cdot K_3. \end{array} \right. \quad (2.26)$$

Fazendo, inicialmente, a análise para o modelo de Paris-Erdogan para determinado conjunto de dados, esses valores foram aplicados na equação de Paris para se observar a evolução da trinca.

Dados para solução da equação de Paris, (BARSOM, ROLF, 1999):

$$\left\{ \begin{array}{l} C_p = 10^{-9}; \\ m_p = 2; \\ b = 0,5in; \\ a_0 = 0,005in; \\ N_0 = 0; \\ N_1 = 900000ciclos; \\ \Delta \sigma = 20ksi, \forall N \in [0, 900000]. \end{array} \right.$$

Aplicando os métodos de Euler, a figura 5 apresenta o gráfico da curva que representa a evolução do tamanho de trinca com o número de ciclos.

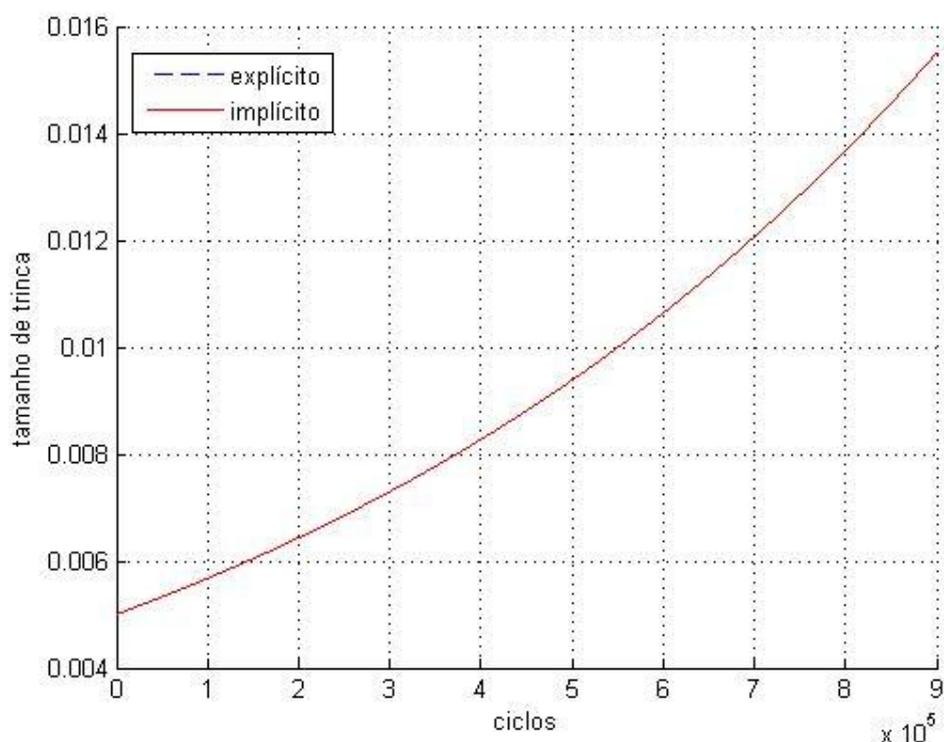


Figura 5: Crescimento da trinca para o método de Paris usando o método de Euler

Fonte: Gráfico elaborado pelo autor

Completados os 900000 ciclos de aplicação de carga, o valor obtido da trinca foi $15,493338in$ para o método implícito e $15,493325in$ para o método explícito. A diferença entre os valores do tamanho de trinca nesse ponto analisado foi de $1.318630 \cdot 10^{-5} in$. As taxas de crescimento obtidas foram muito pequenas, devido às condições de carregamento e de material aplicadas no problema.

Utilizando-se o método de Runge-Kutta, para 900000 ciclos o tamanho de trinca foi $15,493336in$. Traçando o gráfico da evolução do tamanho de trinca, utilizando os dados fornecidos, assim como foi feito para o método de Euler, tem-se a curva mostrada na figura 6.

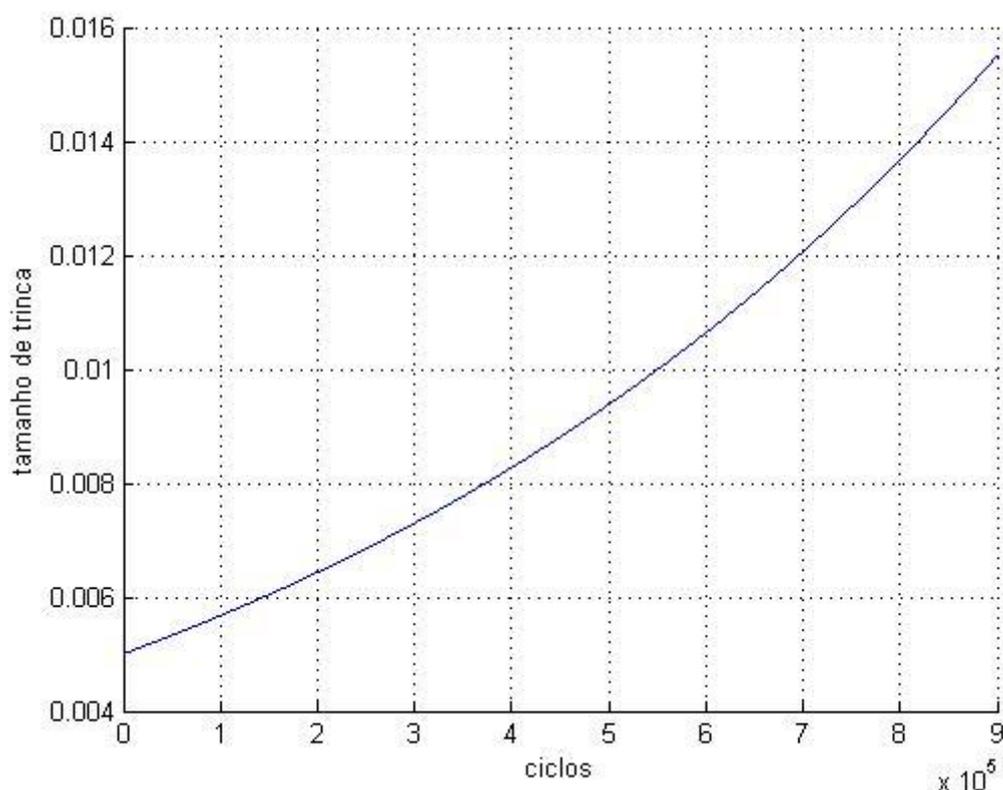


Figura 6: Crescimento da trinca para o método de Paris usando o método RK4

Fonte: Gráfico elaborado pelo autor

A partir da coleta de diferentes pontos dos gráficos de crescimento de trinca, é possível organizar esse dados na forma de uma tabela, como a observada na figura 7. A análise dessa tabela é utilizada para obter diversas conclusões discutidas a seguir.

A tabela 1 foi criada estipulando valores para N, entre intervalos de 10000 ciclos. Nesta tabela observa-se as seguintes informações: os valores obtidos para o tamanho de trinca utilizando os métodos de Euler, a diferença entre eles, o valor obtido pelo método RK4 e as diferenças entre o método RK4 e os métodos de Euler, implícito e explícito.

N	Euler implícito	Euler explícito	diferença	RK4	diferença imp	diferença exp
100000	5,6694968	5,6694963	0,0000004	5,6694968	0,0000000	0,0000004
200000	6,4286476	6,4286458	0,0000018	6,4286468	-0,0000008	0,0000010
300000	7,2894488	7,2894459	0,0000029	7,2894476	-0,0000012	0,0000017
400000	8,2655119	8,2655078	0,0000041	8,2655104	-0,0000015	0,0000026
500000	9,3722705	9,3722650	0,0000055	9,3722687	-0,0000018	0,0000037
600000	10,6272248	10,6272177	0,0000071	10,6272227	-0,0000020	0,0000050
700000	12,0502184	12,0502095	0,0000089	12,0502162	-0,0000022	0,0000067
800000	13,6637518	13,6637409	0,0000109	13,6637495	-0,0000023	0,0000086
900000	15,4933384	15,4933252	0,0000132	15,4933362	-0,0000022	0,0000110

Tabela 1: Valores e diferenças entre os métodos usados no modelo de Paris

Fonte: Tabela elaborada pelo autor.

Para as simulações feitas para o modelo de Paris, o valor de 15,4933384in obtido para o método implícito de Euler foi o que mais se aproximou do valor de 15,4933362in obtido usando o método RK4, enquanto o valor obtido usando Euler explícito foi 15,4933252in. Esses valores reforçam o fato de que cada método possui um grau de precisão próprio e que o método de Euler implícito possui precisão superior à obtida usando o método explícito, pois se aproximou mais do resultado obtido pelo método RK4.

4.2 Modelo de Forman

Assim como foi feito para o método de Paris, iremos discretizar a equação para obtenção do tamanho de trinca via modelo de Forman a partir dos métodos de Euler, implícito e explícito, e RK4.

Euler

Sendo k o número de intervalos obtidos entre N_0 e N_1 , considerando um passo ΔN entre os intervalos, temos a equação (2.27) para o método de Euler explícito e (2.28) para o método implícito.

$$\text{Euler (Explícito)} \Rightarrow \begin{cases} \text{Dado } a_0 = a(N_0), \text{ a } k\text{-ésima iteração, } a_k \in \square^+, \text{ é calculada por,} \\ a_{k+1} = a_k + \Delta N \cdot \left[\frac{C(\Delta K(a_k))^{m_F}}{(1-R)K_c - \Delta K(a_k)} \right]. \end{cases} \quad (2.27)$$

$$\text{Euler (Implícito)} \Rightarrow \begin{cases} \text{Dado } a_0 = a(N_0), \text{ a } k\text{-ésima iteração, } a_k \in \square^+, \text{ é calculada por,} \\ a_{k+1} = a_k + \Delta N \cdot \left[\frac{C(\Delta K(a_{k+1}))^{m_F}}{(1-R)K_c - \Delta K(a_{k+1})} \right] \end{cases} \quad (2.28)$$

Runge-Kutta de 4ª ordem

Sendo k o número de intervalos obtidos entre N_0 e N_1 , considerando um passo ΔN entre os intervalos, temos a equação (2.29) que representa o método RK4 aplicado para o problema de Paris.

$$\text{Runge - Kutta} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Dado } a_0 = a(N_0), \text{ a } k\text{-ésima iteração, } a_k \in \mathbb{R}^+, \text{ é calculada por,} \\ a_{k+1} = a_k + \frac{\Delta N}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4); \\ K_1 = \left[\frac{C(\Delta K(a_k))^{m_F}}{(1-R)K_c - \Delta K(a_k)} \right]; \\ K_2 = a_k + \frac{\Delta N}{2} \cdot K_1; \\ K_3 = a_k + \frac{\Delta N}{2} \cdot K_2; \\ K_4 = a_k + \Delta N \cdot K_3. \end{array} \right. \quad (2.29)$$

Para o modelo de Forman foram feitas as análises do crescimento de trinca para valores diferentes de razão de carregamento R , que representa a tensão mínima dividida pela tensão máxima, desta maneira obtivemos dois conjuntos de dados, um para cada valor de R .

Dados para solução da equação de Forman, (FORMAN et al., 1967):

$$\left\{ \begin{array}{l} C_F = 5 \cdot 10^{-13}; \\ m_F = 3; \\ R = 0,1 \text{ e } 0,9; \\ K_c = 68000 \text{ lb} / \text{in}^{3/2}; \\ b = 0,5 \text{ in}; \\ a_0 = 0,005 \text{ in}; \\ N_0 = 0; \\ N_1 = 900000 \text{ ciclos}; \\ \Delta \sigma = 20 \text{ ksi}, \forall N \in [0, 900000]. \end{array} \right.$$

Primeiro foi utilizado o valor de R igual a 0,1 para analisar o comportamento da trinca. O valor obtido pela trinca ao chegar aos 900000 ciclos foi de 5,000000116in.

Ao utilizar o método de Runge-Kutta de quarta ordem para obter o comportamento da trinca não foram observadas diferenças mensuráveis entre os métodos. O módulo das diferenças entre os diferentes métodos foi nula para esta precisão, como podemos observar na tabela 2.

N	Euler implícito	Euler explícito	diferença	RK4	diferença imp	diferença exp
100000	5,00000001	5,00000001	0,0000000	5,00000001	0,0000000	0,0000000
200000	5,00000003	5,00000003	0,0000000	5,00000003	0,0000000	0,0000000
300000	5,00000004	5,00000004	0,0000000	5,00000004	0,0000000	0,0000000
400000	5,00000005	5,00000005	0,0000000	5,00000005	0,0000000	0,0000000
500000	5,00000006	5,00000006	0,0000000	5,00000006	0,0000000	0,0000000
600000	5,00000008	5,00000008	0,0000000	5,00000008	0,0000000	0,0000000
700000	5,00000009	5,00000009	0,0000000	5,00000009	0,0000000	0,0000000
800000	5,00000010	5,00000010	0,0000000	5,00000010	0,0000000	0,0000000
900000	5,00000012	5,00000012	0,0000000	5,00000012	0,0000000	0,0000000

Tabela 2: Valores e diferenças entre os métodos para o modelo de Forman, $R=0,1$.

Fonte: Tabela elaborada pelo autor.

Para R igual a 0,9 foi obtido um tamanho de trinca máximo de $5,00000104in$. Novamente, não foram observadas diferenças mensuráveis entre os métodos utilizados. Os dados obtidos podem ser observados na tabela 3.

O tamanho de trinca obtido para 900000 ciclos foi de $5,0000001155in$ para R igual a 0,1 e $5,0000010429in$ para R igual a 0,9. Para um carregamento R de 0,9, o crescimento de trinca foi 9,03 vezes o valor obtido para um R igual a 0,1. Desta maneira observa-se, para este exemplo, um caráter aproximadamente proporcional e linear entre mudanças no valor de R e o quanto a trinca cresce.

N	Euler implícito	Euler explícito	diferença	RK4	diferença imp	diferença exp
100000	5,0000001	5,0000001	0,0000000	5,0000001	0,0000000	0,0000000
200000	5,0000002	5,0000002	0,0000000	5,0000002	0,0000000	0,0000000
300000	5,0000003	5,0000003	0,0000000	5,0000003	0,0000000	0,0000000
400000	5,0000005	5,0000005	0,0000000	5,0000005	0,0000000	0,0000000
500000	5,0000006	5,0000006	0,0000000	5,0000006	0,0000000	0,0000000
600000	5,0000007	5,0000007	0,0000000	5,0000007	0,0000000	0,0000000
700000	5,0000008	5,0000008	0,0000000	5,0000008	0,0000000	0,0000000
800000	5,0000009	5,0000009	0,0000000	5,0000009	0,0000000	0,0000000
900000	5,0000010	5,0000010	0,0000000	5,0000010	0,0000000	0,0000000

Tabela 3: Valores e diferenças entre os métodos para o modelo de Forman, $R=0,9$.

Fonte: Tabela elaborada pelo autor.

4.3 Modelo de Priddle

Assim como foi feito para os métodos de Paris-Erdogan e Forman, a discretização da equação do tamanho de trinca via modelo de Forman a partir dos métodos de Euler, implícito e explícito, e do método RK4 é obtida conforme segue:

Euler

Sendo k o número de intervalos obtidos entre N_0 e N_1 , considerando um passo ΔN entre os intervalos, temos a equação (2.30) para o método de Euler explícito e (2.31) para o método implícito.

$$\text{Euler (Explícito)} \Rightarrow \begin{cases} \text{Dado } a_0 = a(N_0), \text{ a } k\text{-ésima iteração, } a_k \in \square^+, \text{ é calculada por,} \\ a_{k+1} = a_k + \Delta N \cdot \left[C \left(\frac{\Delta K(a_k) - \Delta K_{th}}{K_c - K_{máx}} \right)^m + C' \right]. \end{cases} \quad (2.30)$$

$$\text{Euler (Implícito)} \Rightarrow \begin{cases} \text{Dado } a_0 = a(N_0), \text{ a } k\text{-ésima iteração, } a_k \in \square^+, \text{ é calculada por,} \\ a_{k+1} = a_k + \Delta N \cdot \left[C \left(\frac{\Delta K(a_{k+1}) - \Delta K_{th}}{K_c - K_{máx}} \right)^m + C' \right]. \end{cases} \quad (2.31)$$

Runge-Kutta de 4ª ordem

Sendo k o número de intervalos obtidos entre N_0 e N_1 , considerando um passo ΔN entre os intervalos, temos a equação (2.32) que representa o método RK4 aplicado para o problema de Priddle.

$$\text{Runge - Kutta} \Rightarrow \begin{cases} \text{Dado } a_0 = a(N_0), \text{ a } k\text{-ésima iteração, } a_k \in \square^+, \text{ é calculada por,} \\ a_{k+1} = a_k + \frac{\Delta N}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4); \\ K_1 = \left[C \left(\frac{\Delta K(a_k) - \Delta K_{th}}{K_c - K_{máx}} \right)^m + C' \right]; \\ K_2 = a_k + \frac{\Delta N}{2} \cdot K_1; \\ K_3 = a_k + \frac{\Delta N}{2} \cdot K_2; \\ K_4 = a_k + \Delta N \cdot K_3. \end{cases} \quad (2.32)$$

Para as simulações do modelo de Priddle, utilizaremos os dados obtidos no mesmo artigo em que Priddle demonstra seu modelo para um aço EN3A.

Dados para solução da equação de Priddle, (PRIDDLE et al., 1967):

Material: Aço EN3A

$$\left\{ \begin{array}{l} C = 2,2 \cdot 10^{-7}; \\ C' = 2 \cdot 10^{-10}; \\ a_0 = 10mm; \\ N_0 = 0; \\ N_1 = 900000 \text{ ciclos}; \\ Kc = 70MN.m^{-\frac{3}{2}}; \\ \Delta K_0 = 7MN.m^{-\frac{3}{2}}; \\ K_{max} = 2,3MN.m^{-\frac{3}{2}}. \end{array} \right.$$

Utilizando os métodos de Euler foi possível obter um crescimento de trinca de 9,744mm quando completados 900000 ciclos, da maneira que está mostrada na figura 7.

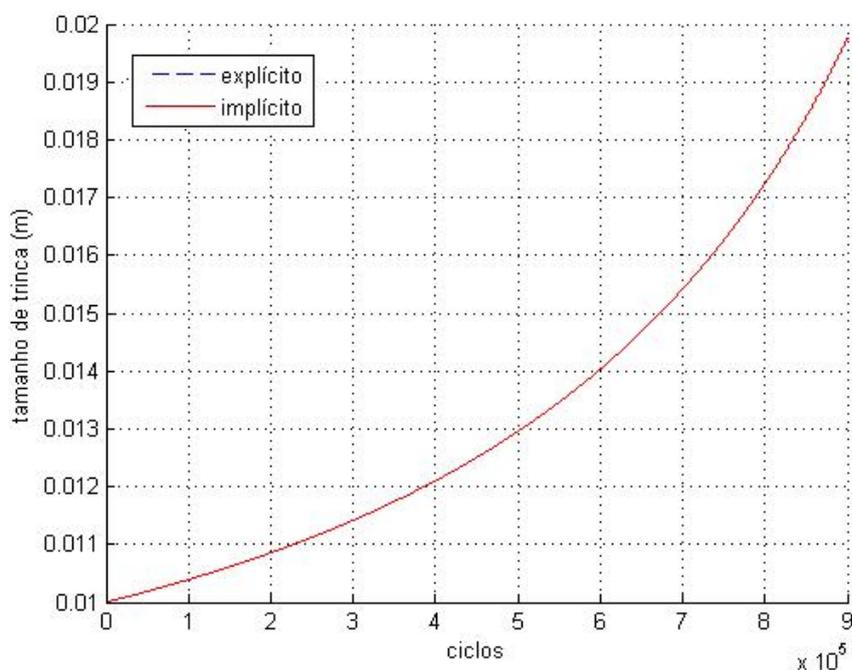


Figura 7: Crescimento da trinca para o método de Priddle usando o método de Euler.

Fonte: Gráfico elaborado pelo autor.

Quando aplicamos RK4 obtemos os valores mostrados conforme a figura 8.

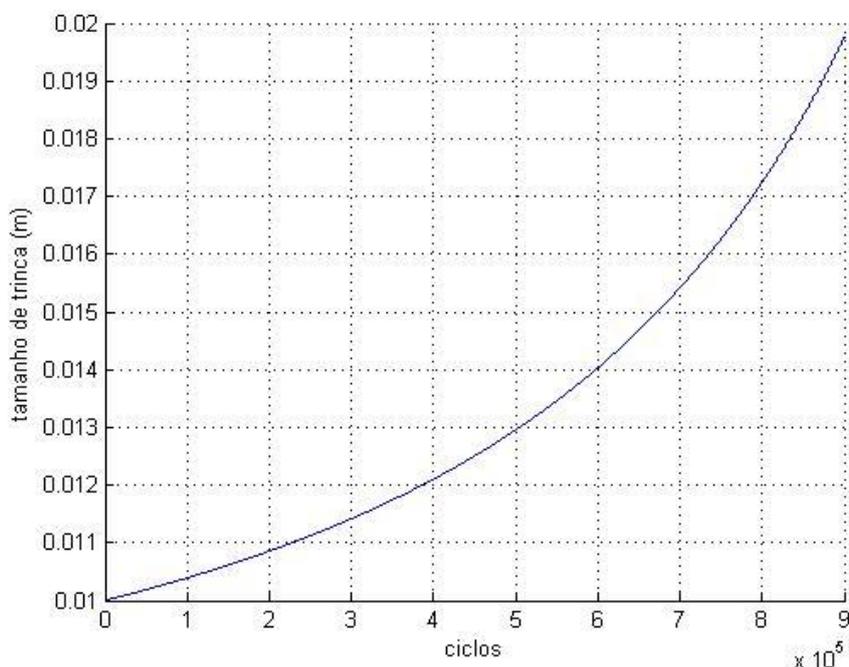


Figura 8: Crescimento da trinca para o método de Priddle usando o método RK4.

Fonte: Gráfico elaborado pelo autor

Analisando a tabela 4 temos que, para 900000 ciclos foi obtido um valor de tamanho de trinca de 19,744307mm, ou seja um crescimento de aproximadamente 9,744mm. Novamente, analisando os valores de tamanho de trinca para o último ciclo, notamos que o valor de 19,744302mm obtido com o método de Euler implícito foi o que mais se aproximou do valor de 19,744307mm obtido com o método RK4, enquanto o método explícito obteve um valor de 19,744276mm. A diferença entre os métodos implícito e explícito foi de $2.568087 \cdot 10^{-5}$ mm. O mesmo comportamento se observa para todos os números de ciclos analisados, pois os módulos das diferenças entre os métodos RK4 e Euler implícito são menores.

N	Euler implícito	Euler explícito	diferença	RK4	diferença imp	diferença exp
100000	10,3904495	10,3904488	0,0000007	10,3904492	-0,0000003	0,0000004
200000	10,8547231	10,8547216	0,0000015	10,8547225	-0,0000006	0,0000009
300000	11,4139521	11,4139496	0,0000026	11,4139512	-0,0000009	0,0000017
400000	12,0974011	12,0973971	0,0000040	12,0973999	-0,0000012	0,0000028
500000	12,9464326	12,9464267	0,0000059	12,9464313	-0,0000013	0,0000046
600000	14,0208447	14,0208361	0,0000085	14,0208435	-0,0000012	0,0000074
700000	15,4092528	15,4092405	0,0000123	15,4092523	-0,0000005	0,0000118
800000	17,2465708	17,2465531	0,0000176	17,2465720	0,0000012	0,0000189
900000	19,7443020	19,7442763	0,0000257	19,7443070	0,0000050	0,0000307

Tabela 4: Valores e diferenças entre os métodos usados no modelo de Priddle.

Fonte: Tabela desenvolvida pelo autor.

4.4 Modelo de McEvily

Para o modelo de McEvily, utilizando-se os seguintes dados para uma liga de alumínio, obtivemos a geração dos gráficos da variação do tamanho de trinca em relação ao número de ciclos.

Dados para solução da equação de McEvily, (WANG et al, 2008):

Material: liga de alumínio 6013

$$\left\{ \begin{array}{l} R = 0,5; \\ \sigma_y = 448MPa \\ \Delta K_{th} = 2,20MPa\sqrt{m}; \\ K_{m\acute{a}x} = 2,50MPa\sqrt{m}; \\ K_c = 61,67MPa\sqrt{m}; \\ a_0 = 10mm; \\ m_m = 2; \\ \Delta\sigma = 20ksi. \end{array} \right.$$

Assim como foi feito para os métodos de Paris, Forman e Priddle, a seguir iremos discretizar a equação para obtenção do tamanho de trinca via modelo de McEvily a partir dos métodos de Euler, implícito e explícito, e do método RK4.

Euler

Sendo m o número de intervalos obtidos entre N_0 e N_1 , considerando um passo h entre os intervalos, temos a equação (2.33) para o método de Euler explícito e (2.34) para o método implícito.

$$\textbf{Explícito: } a_{k+1} = a_k + h \cdot \left(\frac{A}{\sigma_y} (\Delta K(a_k) - \Delta K_{th})^{m_m} \left(1 + \frac{\Delta K(a_k)}{K_c - K_{m\acute{a}x}} \right) \right) \quad (2.33)$$

$$\textbf{Implícito: } a_{k+1} = a_k + h \cdot \left(\frac{A}{\sigma_y} (\Delta K(a_{k+1}) - \Delta K_{th})^{m_m} \left(1 + \frac{\Delta K(a_{k+1})}{K_c - K_{m\acute{a}x}} \right) \right) \quad (2.34)$$

Runge-Kutta de 4ª ordem

Sendo k o número de intervalos obtidos entre N_0 e N_1 , considerando um passo ΔN entre os intervalos, temos a equação (2.35) que representa o método RK4 aplicado para o problema de McEvily.

$$\text{Runge - Kutta} \Rightarrow \begin{cases} \text{Dado } a_0 = a(N_0), \text{ a } k\text{-ésima iteração, } a_k \in \mathbb{R}^+, \text{ é calculada por,} \\ a_{k+1} = a_k + \frac{\Delta N}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4); \\ K_1 = \left(\frac{A}{\sigma_y} (\Delta K(a_k) - \Delta K_{th})^{m_m} \left(1 + \frac{\Delta K(a_k)}{K_c - K_{máx}} \right) \right); \\ K_2 = a_k + \frac{\Delta N}{2} \cdot K_1; \\ K_3 = a_k + \frac{\Delta N}{2} \cdot K_2; \\ K_4 = a_k + \Delta N \cdot K_3. \end{cases} \quad (2.35)$$

Para a primeira simulação do modelo de McEvily foram utilizados os métodos de Euler, implícito e explícito, para obter o gráfico mostrado na figura 9, onde o máximo valor obtido para o tamanho de trinca foi de 10,217798mm para a expressão implícita de Euler.

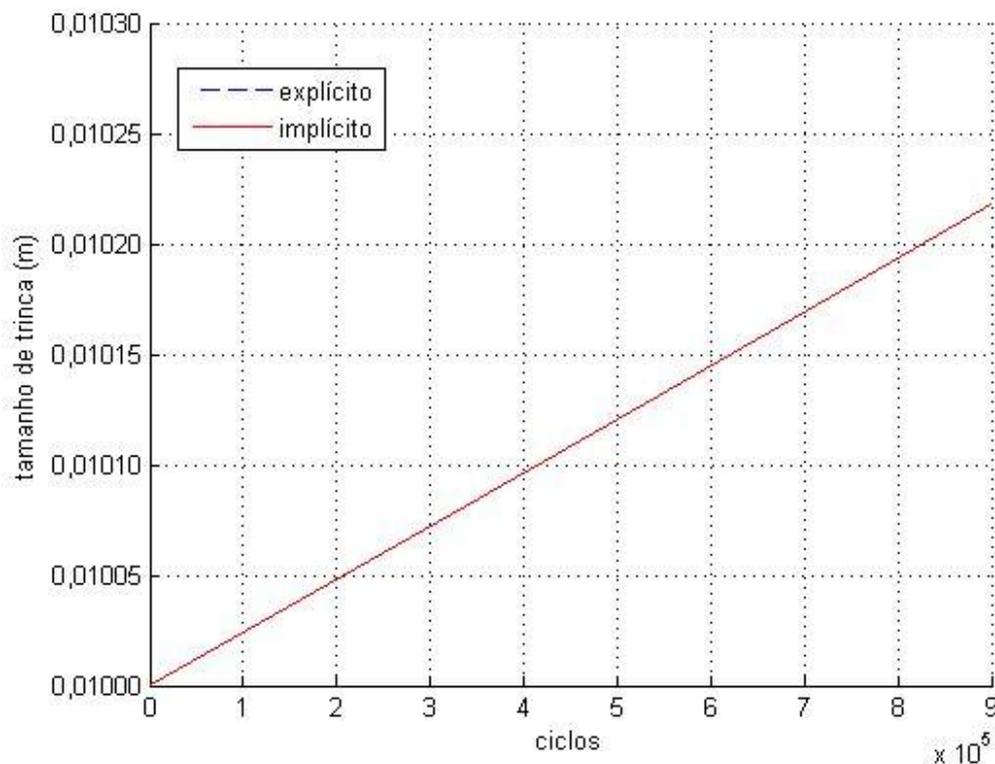


Figura 9: Crescimento da trinca para o método de McEvily usando o método de Euler.

Fonte: Gráfico elaborado pelo autor.

Para o método RK4 foi obtido o gráfico mostrado na figura 10. Para esta situação temos que o valor máximo da trinca de 10,217798mm, o que representa um crescimento de aproximadamente 0,22mm.

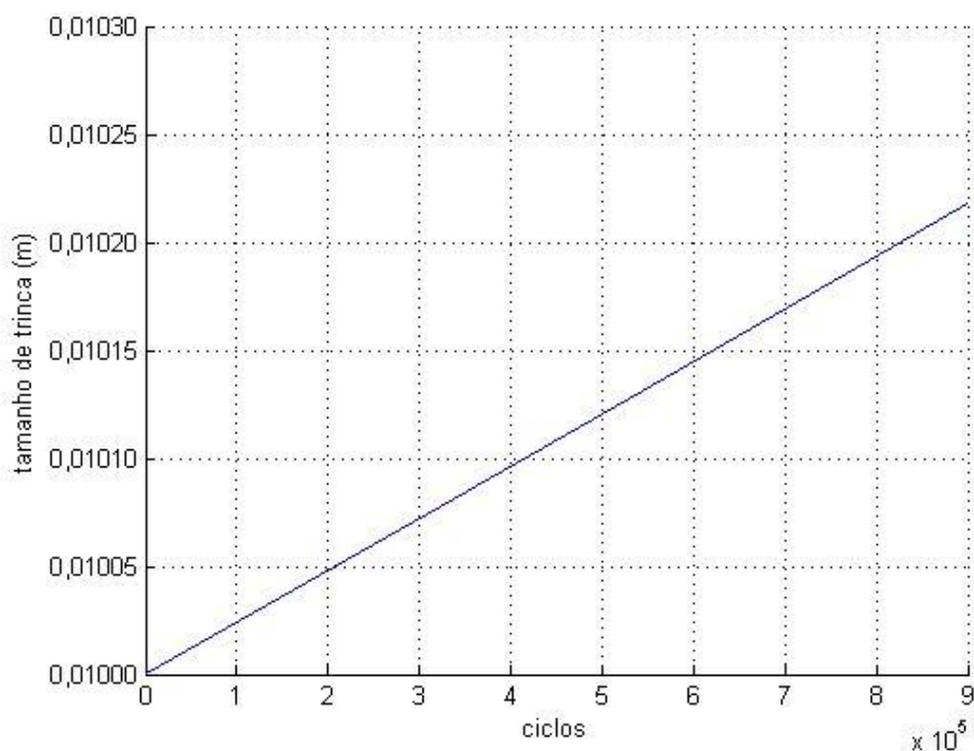


Figura 10: Crescimento da trinca para o método de McEvily usando o método RK4.
Fonte: Gráfico elaborado pelo autor.

Os resultados para o tamanho de trinca, para $N=900000$, foram muito próximos. Esta observação pode ser notada na tabela 5.

N	Euler implícito	Euler explícito	diferença	RK4	diferença imp	diferença exp
100000	10,02391228	10,02391228	0,0000000007	10,02391228	-0,0000000004	0,0000000004
200000	10,04789604	10,04789604	0,0000000014	10,04789604	-0,0000000007	0,0000000007
300000	10,07195129	10,07195129	0,0000000021	10,07195129	-0,0000000011	0,0000000011
400000	10,09607828	10,09607828	0,0000000029	10,09607828	-0,0000000014	0,0000000014
500000	10,12027727	10,12027727	0,0000000036	10,12027727	-0,0000000018	0,0000000018
600000	10,14454852	10,14454852	0,0000000043	10,14454852	-0,0000000021	0,0000000022
700000	10,16889229	10,16889228	0,0000000050	10,16889229	-0,0000000025	0,0000000025
800000	10,19330883	10,19330882	0,0000000058	10,19330883	-0,0000000028	0,0000000029
900000	10,21779840	10,21779840	0,0000000065	10,21779840	-0,0000000032	0,0000000033

Tabela 5: Valores e diferenças entre os métodos usados no modelo de McEvily.

Fonte: Tabela desenvolvida pelo autor.

Os resultados apresentados indicam que qualquer um dos métodos analisados fornecem resultados com precisão adequada para este exemplo.

5 CONCLUSÕES

Conforme apresentado no objetivo deste trabalho, foram analisadas diversas relações entre métodos numéricos e modelos de propagação de trinca. A utilização de métodos numéricos facilita e complementa o uso do problema de valor inicial proposto por Paris, utilizado como base para os demais modelos de crescimento de trinca.

A ordem de um método mede a rapidez que este converge para a solução analítica. O valor da imprecisão de cada método diminui quando se aumenta o número de passos. Outra maneira de se obter valores mais precisos é utilizar métodos de ordem superior como os métodos de Runge-Kutta.

Tanto os métodos de Euler quanto o método RK4 mostraram ter grande eficácia para a integração das equações diferenciais encontradas nos modelos de propagação de trinca, sendo que o método de maior ordem entre os analisados é o Runge-Kutta de quarta ordem. O método de Euler implícito foi o que obteve valores mais próximos aos obtidos via RK4 em todos os modelos estudados.

Temos à disposição vários modelos de previsão de crescimento de trinca. Uma questão relevante para a engenharia assenta-se no custo inerente de cada tipo de análise. Um modelo mais complexo, envolvendo muitos parâmetros, poderá exigir informações adicionais, geralmente obtidas experimentalmente, promovendo a elevação do custo da análise. Por outro lado, dependendo da confiabilidade exigida nos resultados, um modelo mais simples pode não fornecer a acurácia desejada.

6 REFERÊNCIAS

Ascher U, Petzold L, 1998. *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*, SIAM.

Noroozi AH, Glinka G, Lambert S, 2005. A two parameter driving force for fatigue crack growth analysis. *International Journal of Fatigue*. v. 27, p. 1277-1296.

Ávila C, Beck AT, 2013. Efficient Bound for Crack Growth Computation.

Beck AT, Gomes WJS, 2013, Stochastic fracture mechanics using polynomial chaos. *Probabilistic Engineering Mechanics* 34, 26-39.

Beck AT, Melchers RE, 2004: Overload Failure of Structural Components under Random Crack Propagation and Loading - A Random Process Approach. *Structural Safety* 26, 471-488.

Beden, SM, Abdullah S, Ariffin AK, 2009. Review of fatigue crack propagation models for metallic components. *European Journal of Scientific Research*. v. 28, n. 3, p. 364-397.

Broek D, Schijve J, 1963. The influence of the Mean Stress on Propagation of Fatigue Cracks in Aluminum Alloy Sheet.

Elber W, 1970: Fatigue crack closure under cyclic tension. *Eng. Fract. Mech.* 2, 37-45.

Elguedj T, Gravouil A, Combescure A, 2006. Appropriate extended functions for X-FEM simulation of plastic fracture mechanics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195, 7-8, 501-515.

Forman RG, Kearney VE, Engle RM, 1967. Numerical analysis of crack propagation in cyclic loaded structures, *J. Basic Engineering* 89, 459-464.

Ghonem H, Dore S, 1987. Experimental study of the constant-probability crack growth curves under constant amplitude loading. *Engineering Fracture Mechanics* 27, 1-25.

Gupta P, Pereira JP, Kim DJ, Duarte CA, Eason T, 2012. Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems: A non-intrusive approach using a generalized finite element method, *Engineering Fracture Mechanics* 90, 41-64.

Hoepfner, DW, Krupp WE, 1974. Prediction of component life by application of fatigue crack growth knowledge. *Engineering Fracture Mechanics*. v. 6, p. 47-70.

- Leonel ED, Beck AT, Venturini WS, 2011: On the performance of response surface and direct coupling approaches in solution of random crack propagation problems, *Structural Safety* 33, 261-274.
- Leonel ED, Chateaneuf A, Venturini WS, Bressolette P, 2010: Coupled reliability and boundary element model for probabilistic fatigue life assessment in mixed mode crack propagation. *International Journal of Fatigue* 32, 1823-1834.
- Leonel ED, Venturini WS, 2011: Multiple random crack propagation using a boundary element formulation. *Engineering Fracture Mechanics* 78, 1077-1090.
- McEvily AJ, Groeger J, 1977. On the threshold for fatigue crack growth. In: ICF4, Waterloo (Canada).
- Nelson DV, 1977. Review of fatigue-crack-growth prediction methods. *Experimental Mechanics*. v. 17, p. 41-49.
- Nunes LF, Galvão LC, 2009. Cálculo numérico, notas de aula.
- Paris P, Erdogan F, 1963. A critical analysis of crack propagation laws, *J. Basic Eng., Trans. ASME.*, 85: 528-534.
- Priddle EK, 1976. High cycle fatigue crack propagation under random and constant amplitude loadings. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, v. 4, n. 2, p. 89-117.
- Provan J, 1987. Probabilistic fracture mechanics and reliability. Dordrecht: MartinusNijhoff.
- Réthoré J, Roux S, Hild F, 2010. Mixed-mode crack propagation using a Hybrid Analytical and eXtended Finite Element Method, *ComptesRendusMécanique* 338, 121-126.
- Shen Y, Lew A, 2010. Stability and convergence proofs for a discontinuous-Galerkin-based extended finite element method for fracture mechanics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199, 37–40, 2360-2382.
- Sobczyk K, Spencer BF, 1992. Random fatigue: from data to theory. London: Academic Press.
- Toor PM, 1973. A review of some damage tolerance design approaches for aircraft structures. *Engineering Fracture Mechanics*. v. 5, p. 837-880.
- Virkler DA, Hillberry BM, Goel PK, 1979. The Statistical Nature of Fatigue Crack Propagation, *Journal of Engineering Materials and Technology (ASME)* 101, 148-153.

Walker K, 1970. The effect of stress ratio during crack propagation and fatigue for 2024-T3 and 7076-T6 aluminum. Effect of environment and complex load history on fatigue life.

Wang Y, Cui W, Wuc X, Wang F, Huang X, 2008. The extended McEvily model for fatigue crack growth analysis of metal structures.